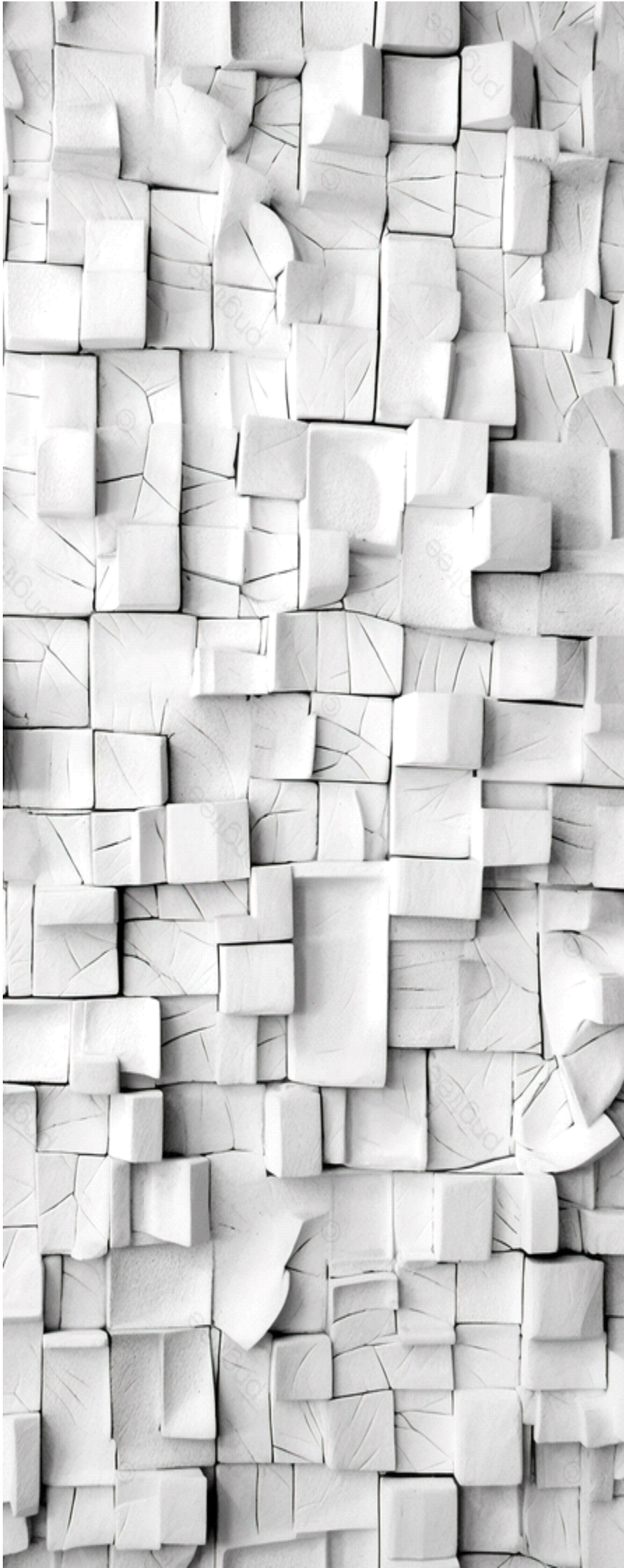


“유일하게 부족한 것은 노력뿐!”

2025년 6도 보충프린트

ver. 미적분



6월 모의고사 보충프린트 ver. 미적분

■ 실시일: 2025년 6월 8일 (일)

001 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

26. 함수 $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.
 $g'(a) = \frac{1}{8}$ 이 되도록 하는 실수 a 에 대하여 $a + f'(g(a))$ 의
 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[정답률 : 68%]

002 2025년 고3 5월 교육청 미적분

--	--	--	--	--

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를
 갖고, 모든 실수 x 에 대하여

$$e^{2f(x)} - e^{f(2x)} - 2e^{3x} = 0$$

 을 만족시킨다. $g'(f(0))$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

003 2026학년도 규토 5월 모의평가 미적분

--	--	--	--	--

27. 상수 a ($a > 0$)에 대하여 정의역이 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}\pi < x < \frac{a}{2}\pi\right\}$ 인
 함수 $f(x) = 3\tan\frac{x}{a}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.
 $g'(3) = \frac{2}{3}$ 일 때, $g'(6)$ 의 값은? [3점]

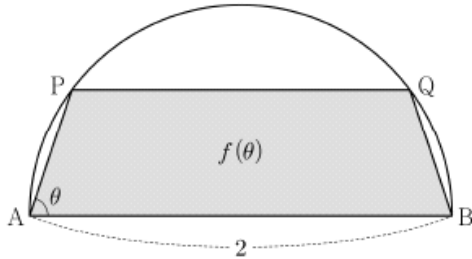
- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

Comment : 전형적인 역함수 미분법 문제이다.
 틀리면 때때때때

004 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP = \theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하고, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 이 되도록 하는 θ 의 값을 a 라 할 때, $f'(a)$ 의 값은? [3점]



- ① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$
 ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

[정답률 : 58.4%]

Comment : 음함수 미분법인 줄?

물론 음함수 미분법으로도 풀린다.
 원 나오면 기본태도 6가지 중 4번째!
 지름 -> 직각삼각형

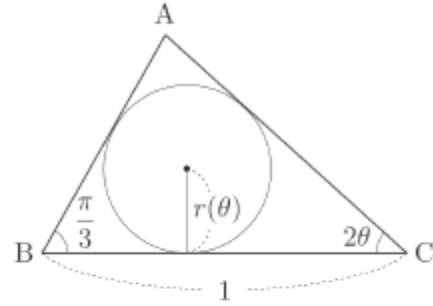
005

--	--	--	--	--

074 2017년 고3 10월 교육청 가형

--	--	--	--	--

- 그림과 같이 $\overline{BC} = 1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB = 2\theta$ 인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자. $h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$ 일 때, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$) [3점]



- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

006

--	--	--	--	--	--

094

2024년 고3 10월 교육청 미적분

--	--	--	--	--	--

점 $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선 l 과
곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1$ ($a > 0$)이 있다. 직선 l 이 x 축의
양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 직선 l 이
곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1$ ($a > 0$)과 제1사분면에서 만나는 점의
 x 좌표를 $f(\theta)$ 라 하자. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$ 일 때,
 $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = pe + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.
(단, a 는 상수이고 p, q 는 정수이다.) [4점]

007

--	--	--	--	--	--

091

2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--	--

$t > 2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$ 이
 $x = k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는
미분가능한 함수이다. $g(\alpha) = e^2$ 인 실수 α 에 대하여
 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

008 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와
두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$ 의 값은?

[4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0, f'(2) > 0$

- ① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

[정답률 : 9%]

Comment : 항상 문제가 안 풀리면 이문제는 어떤 개념을 물어보는 문제일까?를 역으로 생각하라고 했었다.
이계도함수를 갖는다?
일단 최소 미분 2번은 해야겠군!
(나) 조건의 첫 번째,,, 왜 줬을까? 생각해보자.

009

--	--	--	--	--

113 2024학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

두 상수 $a(a > 0), b$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서
연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,
 $a \times b$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^2 + 2f(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$$

이다.

(나) $f(0) = f(2) + 1$

- ① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$
④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

010 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

29. 두 정수 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \alpha \times \sin \frac{n}{2} \pi + \beta \times \cos \frac{n}{2} \pi$$

이고, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1 > 0$ 인 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6$$

일 때, $b_1 \times b_3 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답률 : 14.3%]

Comment : 문제 길이를 보고 풀었을 가능성이 있다.

정수조건 똥글방이~!

정수조건에서 제일 많이 나오는 것은

두 정수 m, n 에 대하여 $mn=3$ 과 같은

곱형태이다. 결국은 case분류겠군!

011

--	--	--	--	--

079 2024학년도 수능 미적분

--	--	--	--	--

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각

수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right), \quad 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$ 일 때, $120S$ 의 값을

구하시오. [4점]

012 2026학년도 고3 6월 평가원 미적분

--	--	--	--	--

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $g(0)>0$ 이다.

(나) $g'(\ln 3) < 0$, $|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답률 : 5.3%]

Comment : 다항함수와 초월함수의 합성함수의 극대, 극소나 미분가능성은 역대 최대 빈출 소재이기도 하다.

$h(x) = f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$ 라고 치환해서 접근해보자.

new함수 테크닉~!

주어진 조건을 차근차근 활용하여 case분류해보자.

013

--	--	--	--	--

124

2019학년도 고3 9월 평가원 가형

□□□□□

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$ 와

함수 $g(x) = 2x^4e^{-x}$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.

(다) 방정식 $h(x) = 8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$) [4점]

014

--	--	--	--	--

120

--	--	--	--	--

상수 a 와 두 함수 $f(x) = x^3 + ax$, $g(x) = |2\cos\pi x + 1|$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $0 < x < n$ 에서 방정식 $h(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 22가 되도록 하는 자연수 n 의 값을 구하시오.

<답>

1. ②
2. ④
3. ④
4. ③
5. ②
6. 5
7. 17
8. ①
9. ②
10. 109
11. 162
12. 25
13. 30
14. 15

<해설>

1. ②

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} \text{이므로}$$

$$g'(a) = \frac{1}{8}$$

에서

$$f'(g(a)) = 8$$

이때

$$f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x$$

에서

$$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x$$

이고

$$g(a) = b$$

라 하면

$$\begin{aligned} f'(g(a)) &= f'(b) \\ &= 3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b \end{aligned}$$

이고

$$f'(g(a)) = 8$$

이므로

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b = 8$$

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b - 8 = 0$$

$$(e^b - 2)(3e^{2b} + 4) = 0$$

$$e^b > 0 \text{이므로 } e^b = 2$$

$$\text{즉, } b = \ln 2$$

$$g(a) = b$$

에서

$$a = f(b)$$

이므로

$$\begin{aligned} a &= f(\ln 2) \\ &= e^{3\ln 2} - 3e^{2\ln 2} + 4e^{\ln 2} \\ &= e^{\ln 8} - 3e^{\ln 4} + 4e^{\ln 2} \\ &= 8 - 3 \times 4 + 4 \times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

따라서

$$a + f'(g(a)) = 4 + 8 = 12$$

정답 ②

2. ④

27. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하

$e^{2f(x)} - e^{f(2x)} - 2e^{3x} = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f'(x)e^{2f(x)} - 2f'(2x)e^{f(2x)} - 6e^{3x} = 0$$

$x=0$ 을 대입하면

$$2f'(0)e^{2f(0)} - 2f'(0)e^{f(0)} - 6 = 0$$

$$f'(0)(e^{2f(0)} - e^{f(0)}) = 3 \dots \textcircled{1}$$

$e^{2f(x)} - e^{f(2x)} - 2e^{3x} = 0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$e^{2f(0)} - e^{f(0)} - 2 = 0$$

$$e^{2f(0)} - e^{f(0)} = 2$$

$$\text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{3}$$

3. ④

27. 상수 a ($a > 0$)에 대하여 정의역이 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}\pi < x < \frac{a}{2}\pi\right\}$ 인

함수 $f(x) = 3 \tan \frac{x}{a}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$g'(3) = \frac{2}{3}$ 일 때, $g'(6)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$$f(g(x)) = x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(k)} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = 3 \tan \frac{x}{a}$$

$$f'(k) = \frac{3}{a} \sec^2 \frac{k}{a} = \frac{3}{2}$$

$$g(3) = k \Rightarrow f(k) = 3$$

$$3 \tan \frac{k}{a} = 3 \Rightarrow \tan \frac{k}{a} = 1$$

$$\tan \frac{k}{a} = 1 \Rightarrow \sec^2 \frac{k}{a} = 2$$

$$1 + \tan^2 \frac{k}{a} = \sec^2 \frac{k}{a}$$

$$1 + 1 = 2$$

$$(a=4)$$

$$f(x) = 3 \tan \frac{x}{4}$$

$$g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))} = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{\frac{3}{4} \sec^2 \frac{p}{4}} = \frac{4}{15}$$

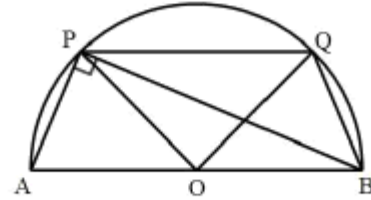
$$f(p) = 6$$

$$3 \tan \frac{p}{4} = 6 \Rightarrow \tan \frac{p}{4} = 2 \Rightarrow 1 + 4 = \sec^2 \frac{p}{4} = 5$$

4. ③

27. 출제의도 : 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OPA는

$$\overline{OP} = \overline{OA} = 1, \angle AOP = \pi - 2\theta$$

인 이등변삼각형이다. 사각형 ABQP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQP = \pi - \theta$ 이고, 선분 AB와 선분 PQ가 평행하므로 $\angle OBQ = \theta$ 이다.

따라서 삼각형 OBQ는

$$\overline{OQ} = \overline{OB} = 1, \angle BOQ = \pi - 2\theta$$

인 이등변삼각형이다.

또, 삼각형 OPQ는

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = 1,$$

$$\angle POQ = \pi - 2(\pi - 2\theta) = 4\theta - \pi$$

인 이등변삼각형이다.

이때, 사각형 ABQP의 넓이는

$$f(\theta) = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(4\theta - \pi)$$

$$= \sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \sin(4\theta - \pi)$$

$$= \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

이므로

$$f'(\theta) = 2\cos 2\theta - 2\cos 4\theta$$

이다.

한편, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 일 때 삼각형 ABP는

$$\angle BAP = a, \angle APB = \frac{\pi}{2}$$

인 직각삼각형이므로

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

이다. 이때,

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos(a+a) \\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{10} - 1 \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

이고, 마찬가지로 방법으로

$$\begin{aligned} \cos 4a &= \cos(2a+2a) \\ &= 2\cos^2 2a - 1 \\ &= 2 \times \frac{16}{25} - 1 \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2\cos 2a - 2\cos 4a \\ &= 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) - 2 \times \frac{7}{25} \\ &= -\frac{54}{25} \end{aligned}$$

정답 ③

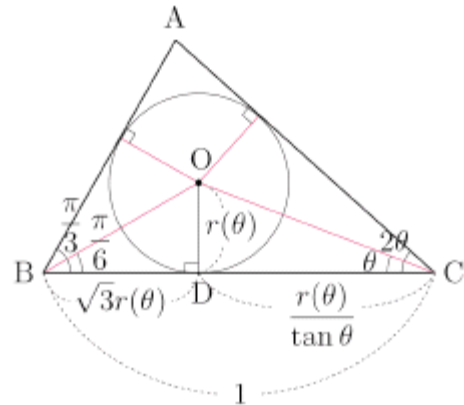
5. ②

074

내접원의 중심을 O라 할 때, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$$\overline{BD} = \frac{r(\theta)}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} r(\theta)$$

$$\overline{DC} = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$



$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = \sqrt{3} r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 1$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\tan \theta}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{3} \tan \theta + 1}$$

$$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{3} \tan \theta + 1}$$

$$h'(\theta) = -\frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta + 1)^2}$$

따라서

$$h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3} \times \frac{4}{3}}{\left(\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2} = -\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.

답 ②

6. 5

094

직선 l 의 기울기는 $\tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)이므로

직선 l 의 방정식은 $y = (\tan \theta)(x-0)+1 \Rightarrow y = (\tan \theta)x+1$

직선 $y = (\tan \theta)x+1$ 이 곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1$ 과 만나는
점의 x 좌표가 $f(\theta)$ 이므로

$$\tan \theta \times f(\theta) + 1 = e^{\frac{f(\theta)}{a}} - 1 \quad \cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$1 \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = e^{\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a}} - 1 \Rightarrow a+1 = e-1$$

$$\Rightarrow a = e-2$$

㉠의 양변을 θ 에 대해 미분하면

$$\sec^2 \theta \times f'(\theta) + \tan \theta \times f'(\theta) = \frac{f'(\theta)}{a} e^{\frac{f(\theta)}{a}} \text{ 이고,}$$

양변에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$\sec^2 \frac{\pi}{4} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan \frac{\pi}{4} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a} e^{\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a}}$$

$$\Rightarrow 2(e-2) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{e-2} \times e$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{2}{e-2} = 2(e-2)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (e-2)^2 \Rightarrow \sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e-2$$

$$\therefore p=1, q=-2$$

따라서 $p^2+q^2=5$ 이다.

답 5

7. 17

091

$$f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$$

$$f'(x) = \frac{2t \ln x}{x} - 2x = 2\left(\frac{t \ln x - x^2}{x}\right)$$

함수 $f(x)$ 이 $x=g(t)$ 에서 극대이므로

$$f'(g(t)) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{t \ln \{g(t)\} - \{g(t)\}^2}{g(t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow t \ln \{g(t)\} - \{g(t)\}^2 = 0$$

$$t \ln \{g(t)\} - \{g(t)\}^2 = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 α 를 대입하면

$$\alpha \ln \{g(\alpha)\} - \{g(\alpha)\}^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha - e^4 = 0 \quad (\because g(\alpha) = e^2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{e^4}{2}$$

㉠의 양변을 t 에 대해 미분하면

$$\ln \{g(t)\} + \frac{t g'(t)}{g(t)} - 2g(t)g'(t) = 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡의 양변에 α 를 대입하면

$$\ln \{g(\alpha)\} + \frac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)} - 2g(\alpha)g'(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{e^2 g'(\alpha)}{2} - 2e^2 g'(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{3e^2}{2} g'(\alpha)$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = \frac{4}{3e^2}$$

$$\text{이므로 } \alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{e^4}{2} \times \frac{16}{9e^4} = \frac{8}{9} \text{ 이다.}$$

따라서 $p+q=17$ 이다.

답 17

8. ①

28. 출제의도 : 사잇값의 정리와 합성함수의 미분법 및 이계도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $f(-3)f(3) < 0$ 이므로

사잇값의 정리에 의하여

$$f(\alpha) = 0 \quad (-3 < \alpha < 3)$$

을 만족시키는 α 가 존재한다.

또한, 조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x) + a \\ = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

다시 ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 20(f(x))^3 \times (f'(x))^2 + 5(f(x))^4 \times f''(x) \\ + 6f(x) \times (f'(x))^2 + 3(f(x))^2 \times f''(x) \\ = \frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20(f(x))^3 \times (f'(x))^2 + 5(f(x))^4 \times f''(x) \\ + 6f(x) \times (f'(x))^2 + 3(f(x))^2 \times f''(x) \\ = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} \quad \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

①은 x 에 대한 항등식이므로 $x=\alpha$ 를 대입하면

$$0 = \frac{-2(\alpha+2)(\alpha-1)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}$$

따라서

$$\alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 1$$

(i) $\alpha = -2$ 일 때

①에 $x=\alpha=-2$ 를 대입하면

$$a = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}} = \frac{-3}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{3}$$

이때 ①에서

$$5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x)$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}$$

이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} 5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ = \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 2 + \frac{5}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{64}{51} \end{aligned}$$

즉

$$5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2)$$

$$= \frac{64}{51}$$

이고, 이것은 조건 (나)의 $f'(2) > 0$ 을 만족시킨다.

또, 조건 (가)에 $x=\alpha=-2$ 를 대입하면

$$-\frac{2}{3} \times (-2) + b = \ln \left\{ (-2)^2 + (-2) + \frac{5}{2} \right\}$$

$$\frac{4}{3} + b = \ln \frac{9}{2}$$

$$b = -\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}$$

(ii) $\alpha = 1$ 일 때

①에 $x=\alpha=1$ 을 대입하면

$$a = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 1 + \frac{5}{2}} = \frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{3}$$

이때 ①에서

$$\begin{aligned} 5(f(x))^4 \times f'(x) + 3(f(x))^2 \times f'(x) \\ = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} 5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ = \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 2 + \frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$5(f(2))^4 \times f'(2) + 3(f(2))^2 \times f'(2) \\ = -\frac{4}{51}$$

그런데 조건 (나)에서 $f'(2) > 0$ 이므로 (좌변) ≥ 0 , (우변) < 0

따라서 모순이다.

(i), (ii)에 의하여

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = -\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} a \times e^b &= -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{4}{3} + \ln \frac{9}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} \times e^{-\frac{4}{3}} \times e^{\ln \frac{9}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} \times e^{-\frac{4}{3}} \\ &= -3e^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

정답 ①

9. ②

113

(나) 조건에서 $f(0)$, $f(2)$ 가 있으니

$\{f(x)\}^2 + 2f(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$ 의 양변에 $x=0$ 와 $x=2$ 를 대입하면

$$\{f(0)\}^2 + 2f(0) = a + b, \quad \{f(2)\}^2 + 2f(2) = a + b$$

이고, 두 식을 빼서 정리하면

$$\{f(0)\}^2 - \{f(2)\}^2 + 2f(0) - 2f(2) = 0$$

$$\Rightarrow \{f(0) - f(2)\} \{f(0) + f(2) + 2\} = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = f(2) \text{ or } f(0) + f(2) = -2$$

만약 $f(0) = f(2)$ 이면 (나) 조건에 모순이므로

$f(0) + f(2) = -2$ 이고, $f(0) = f(2) + 1$ 와 연립하면

$$f(0) = -\frac{1}{2}, \quad f(2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{3}{4} \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고, $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = -\frac{3}{2}$

이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(k) = -1$ 을 만족시키는

k 가 열린구간 $(0, 2)$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

(가)의 좌변에서 $f(x) = X$ 라 하면 $X^2 + 2X$ 는

$X = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는데

이때, $f(k) = -1$ ($0 < k < 2$) 이므로 $f(x) = -1$ 이 되도록 하는 x 가 존재한다.

즉, 좌변은 최솟값 -1 을 갖는다.

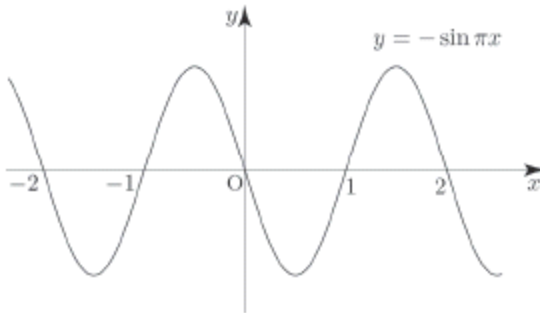
$\{f(x)\}^2 + 2f(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$ 는 항등식이므로

우변 역시 최솟값 -1 을 가져야 한다.

이때, $g(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b$ 라 하면 정의역의 범위가 실수 전체의 집합이므로 $g(x)$ 가 $x=p$ 에서 최솟값 -1 을 가지면 $x=p$ 에서 극솟값 -1 을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3a(-\pi \sin \pi x) \cos^2 \pi x e^{\sin^2 \pi x} \\ &\quad + a \cos^3 \pi x (2\pi \sin \pi x \cos \pi x) e^{\sin^2 \pi x} \\ &= a \pi \cos^2 \pi x (-\sin \pi x) (3 - 2 \cos^2 \pi x) e^{\sin^2 \pi x} \end{aligned}$$

$a > 0$, $\cos^2 \pi x \geq 0$, $3 - 2 \cos^2 \pi x > 0$, $e^{\sin^2 \pi x} > 0$ 이므로 $\text{semi } g'(x) = -\sin \pi x$ 이다.



$g(x)$ 가 극솟값을 가지려면 $g'(x)$ 의 부호가 $- \rightarrow +$ 로 바뀌어야 하므로
 $x = \dots, -1, 1, 3, \dots = 2n-1$ (n 은 정수)
 이어야 한다.

$$\begin{aligned} g(2n-1) &= -a + b \\ \text{극솟값이 모두 } -a + b \text{로 동일하므로} \\ -a + b &= -1 \quad \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하면 } a = \frac{1}{8}, b = -\frac{7}{8}$$

따라서 $a \times b = -\frac{7}{64}$ 이다.

답 ㉡

10. 109

29. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$$a_1 = \alpha \times \sin \frac{\pi}{2} + \beta \times \cos \frac{\pi}{2} = \alpha$$

$$a_2 = \alpha \times \sin \pi + \beta \times \cos \pi = -\beta$$

$$a_3 = \alpha \times \sin \frac{3}{2}\pi + \beta \times \cos \frac{3}{2}\pi = -\alpha$$

$$a_4 = \alpha \times \sin 2\pi + \beta \times \cos 2\pi = \beta$$

$$a_5 = \alpha$$

⋮

이므로

수열 $\{a_n\}$ 은

$$\alpha, -\beta, -\alpha, \beta, \alpha, \dots$$

이다.

따라서

$$a_{4n-2} = -\beta, a_{4n-3} = \alpha$$

이고

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = \alpha^2 \beta^2 = 4$$

에서

$$\alpha\beta = -2 \text{ 또는 } \alpha\beta = 2$$

그런데 α, β ($\alpha > \beta$)는 정수이므로

$$\alpha = 2, \beta = 1 \text{ 또는 } \alpha = -1, \beta = -2 \text{ 또는}$$

$$\alpha = 2, \beta = -1 \text{ 또는 } \alpha = 1, \beta = -2$$

이다.

이때, 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6$$

$$-\beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 6 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이고 ㉢을 만족시키기 위해서는

$$-1 < r < 1$$

이어야 한다.

따라서

$$-\beta \times \frac{b_1}{1-r} = \alpha \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

(i) $\alpha=2, \beta=1$ 일 때

$$-\frac{b_1}{1-r} = 6$$

에서 $1-r > 0$ 이므로

$$b_1 < 0$$

이것은 $b_1 > 0$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1, \beta=-2$ 일 때

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = -\frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$2 = \frac{-r}{1+r}, \quad 2+2r = -r$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

따라서

$$\frac{2b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2b_1}{\frac{5}{3}} = \frac{6b_1}{5} = 6$$

에서

$$b_1 = 5$$

이므로

$$b_3 = b_1 r^2 = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

(iii) $\alpha=2, \beta=-1$ 일 때

$$\frac{b_1}{1-r} = 2 \times \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$1 = \frac{2r}{1+r}, \quad 1+r = 2r, \quad r = 1$$

이것은 $-1 < r < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(iv) $\alpha=1, \beta=-2$ 일 때

$$2 \times \frac{b_1}{1-r} = \frac{b_1 r}{1-r^2} = 6$$

이므로

$$2 = \frac{r}{1+r}, \quad 2+2r = r, \quad r = -2$$

이것은 $-1 < r < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에서

$$b_1 = 5, \quad b_3 = \frac{20}{9}$$

이므로

$$b_1 \times b_3 = 5 \times \frac{20}{9} = \frac{100}{9}$$

따라서 $p=9, q=100$ 이므로

$$p+q=109$$

정답 109

079

a_n 의 초항을 a , b_n 의 초항을 b 라 하고,
 a_n 의 공비를 r , b_n 의 공비를 R 라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하므로

$$-1 < r < 1, \quad -1 < R < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{1-rR} = \left(\frac{a}{1-r} \right) \left(\frac{b}{1-R} \right)$$

$$\Rightarrow 1-rR = 1-r-R+rR$$

$$\Rightarrow r+R=2rR$$

$$|a_{2n}| = |ar^{2n-1}| = \left| \frac{a}{r} \right| |r^{2n}| = \left| \frac{a}{r} \right| r^{2n}$$

$$|a_{3n}| = |ar^{3n-1}| = \left| \frac{a}{r} \right| |r^{3n}| = \left| \frac{a}{r} \right| |r^3|^n$$

$$-1 < r < 1 \Rightarrow -1 < r^2 < 1, \quad -1 < |r^3| < 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$ 은 각각 수렴한다.

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

$$\Rightarrow 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a}{r} \right| r^{2n} = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a}{r} \right| |r^3|^n$$

$$\Rightarrow 3 \left| \frac{a}{r} \right| \times \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7 \left| \frac{a}{r} \right| \times \sum_{n=1}^{\infty} |r^3|^n$$

$$\Rightarrow 3 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7 \sum_{n=1}^{\infty} |r^3|^n$$

r 의 부호에 따라 case분류하면

$$\textcircled{1} \quad 0 < r < 1$$

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7 \sum_{n=1}^{\infty} r^{3n}$$

$$\Rightarrow \frac{3r^2}{1-r^2} = \frac{7r^3}{1-r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1+r} = \frac{7r}{1+r+r^2}$$

$$\Rightarrow 7r+7r^2 = 3+3r+3r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2+4r-3=0$$

$$\Rightarrow (2r-1)(2r+3)=0$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < r < 1)$$

이때, $r = \frac{1}{2}$ 이면

$$r+R=2rR \Rightarrow \frac{1}{2}+R=R \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \text{이므로 모순이다.}$$

$$\textcircled{2} \quad -1 < r < 0$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} (-r^3)^n$$

$$\Rightarrow \frac{3r^2}{1-r^2} = \frac{-7r^3}{1-(-r^3)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1-r} = \frac{-7r}{1-r+r^2}$$

$$\Rightarrow -7r+7r^2 = 3-3r+3r^2$$

$$\Rightarrow 4r^2-4r-3=0$$

$$\Rightarrow (2r+1)(2r-3)=0$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2} \quad (\because -1 < r < 0)$$

이때, $r = -\frac{1}{2}$ 이면

$$r+R=2rR \Rightarrow -\frac{1}{2}+R=-R \Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{에 의해서 } R=\frac{1}{4} \text{이므로 } b_n = b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} &= \frac{b\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+b\left(\frac{1}{4}\right)^{3n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^{2n+1} \right\} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = \frac{27}{20} = S\end{aligned}$$

따라서 $120S = 120 \times \frac{27}{20} = 162$ 이다.

답 162

12. 25

30. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$h(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = 0$$

이고,

$$h'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$$

이므로

$$0 < h(x) < 2$$

이다.

$f(h(x)) > 0$ 일 때, $g(x) = f(h(x))$ 이므로

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

이고,

$f(h(x)) < 0$ 일 때, $g(x) = -f(h(x))$ 이므로

$$g'(x) = -f'(h(x))h'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고 조건 (가)에 의하여 $x=0$ 에서 극소이므로

$$g'(0) = 0$$

이때, $g(0) > 0$ 이므로

$$f(h(0)) > 0 \text{ 또는 } f(h(0)) < 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

그러므로

$$g'(0) = f'(h(0))h'(0) = \frac{1}{2}f'(1)$$

또는

$$g'(0) = -f'(h(0))h'(0) = -\frac{1}{2}f'(1)$$

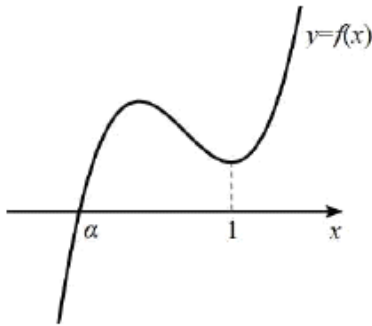
이므로 $g'(0) = 0$ 이려면 $f'(1) = 0$ 이어야 한다.

또, $g'(x) = f'(h(x))h'(x)$ 또는

$g'(x) = -f'(h(x))h'(x)$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) > 0$ 이고, 함수 $g'(x)$ 의 부호가 $x=0$ 의 좌우에서 바뀌므로 $f'(x)$ 의 부호가 $x=h(0)=1$ 의 좌우에서 바뀐다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가져야 하고 ㉠에서 $f(1) > 0$ 또는 $f(1) < 0$ 이다.

만일 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이면 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이고, 함수 $|f(h(x))|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1) > 0$ 이어야 한다.



또, $f(\alpha) = 0$ 이고 $h(x) = \alpha$ 인 x 가 존재하면 함수 $g(x)$ 가 $h(x) = \alpha$ 인 x 에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $0 < h(x) < 2$ 에서 $f(h(x)) > 0$ 이므로 $g(x) = f(h(x))$

이고,

$$g'(x) = f'(h(x))h'(x) = f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \times \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

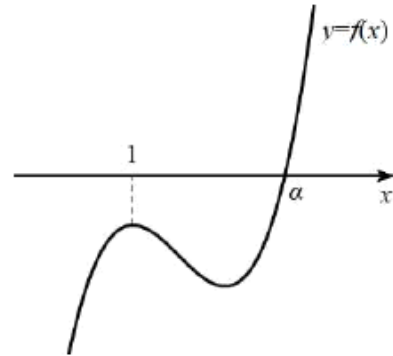
이 경우

$$g'(\ln 3) = f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right) \times \frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{8}$$

에서 $f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ 이므로 $g'(\ln 3) > 0$ 이다.

이것은 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, 이 경우 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이고 함수 $|f(h(x))|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1) < 0$ 이어야 한다.



마찬가지로 $f(\alpha) = 0$ 이고 $h(x) = \alpha$ 인 x 가 존재하면 함수 $g(x)$ 가 $h(x) = \alpha$ 인 x 에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha \geq 2$ 이어야 한다.

이때 $0 < h(x) < 2$ 에서 $f(h(x)) < 0$ 이므로 $g(x) = -f(h(x))$

이고,

$$g'(x) = -f'(h(x))h'(x) = -f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \times \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$g'(\ln 3) = -f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right) \times \frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = -f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ 이면 조건 (나)의

$g'(\ln 3) < 0$ 을 만족시킨다.

또, 조건 (나)에서

$$|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$$

이고 $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \left\{ -f\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\text{즉, } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$$

한편, $f'(1) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f'(x) = 3(x-1)(x-a) \quad (a \text{는 } 1 \text{보다 큰 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x) = x^3 - \frac{3(a+1)}{2}x^2 + 3ax + C$$

(C 는 적분상수)

라 하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3(a+1)}{8} + \frac{3a}{2} + C$$

$$= \frac{9}{8}a - \frac{1}{4} + C,$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3(a+1)}{2} + 3a = \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}$$

이므로

$$\frac{3}{2}a - \frac{3}{4} = -\frac{9}{8}a + \frac{1}{4} - C$$

$$\text{즉, } C = -\frac{21}{8}a + 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3(a+1)}{2}x^2 + 3ax - \frac{21}{8}a + 1$$

그러므로

$$g(0) = -f(1) = \frac{9}{8}a - \frac{1}{2}$$

이때 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로

$$3 - \frac{21}{8}a \leq 0$$

$$\text{즉, } a \geq \frac{8}{7} \text{ 이고}$$

$$g(0) \geq \frac{9}{8} \times \frac{8}{7} - \frac{1}{2} = \frac{11}{14}$$

이므로 $g(0)$ 의 최솟값은 $\frac{11}{14}$ 이다.

따라서 $p+q = 14+11 = 25$

정답 25

124

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$

$$g(x) = 2x^4 e^{-x}$$

$$g'(x) = 8x^3 e^{-x} - 2x^4 e^{-x} = 2x^3(4-x)e^{-x}$$

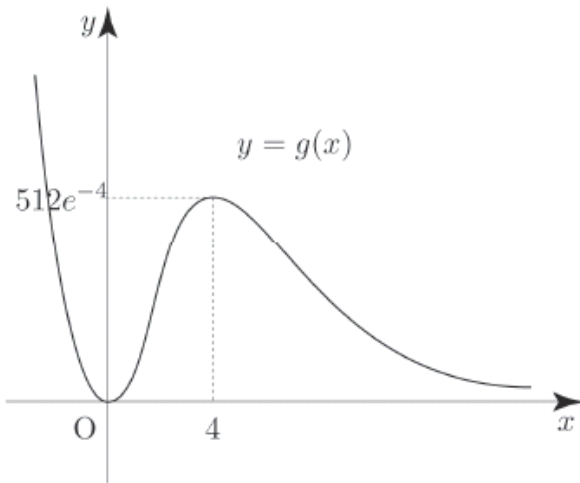
Semi 도함수 $g'(x) = x^3(4-x)$

$$g'(0)=g'(4)=0, \quad g(0)=0, \quad g(4)=512e^{-4}$$

$\Rightarrow x=0$ 에서 극소, $x=4$ 에서 극대

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

이를 바탕으로 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



(가) 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$f(x)$ 의 최솟값이 0이므로 가능한 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이다.

만약 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이고 이때의 실근을 α 라 하면

$$h(x)=0 \Rightarrow f(g(x))=0 \Rightarrow g(x)=\alpha$$

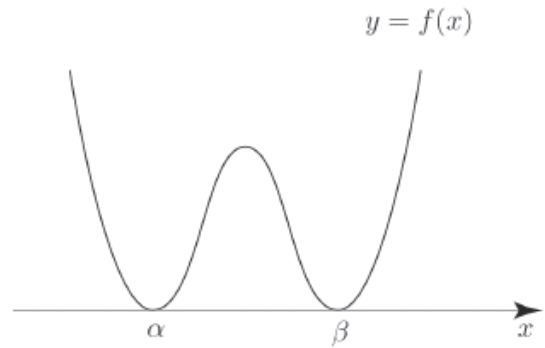
방정식 $g(x)=\alpha$ 의 서로 다른 실근의 개수는 최대 3

이므로 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이어야 한다.

이때의 서로 다른 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하자.

(사차함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이므로 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$ 에서 접해야 한다.)

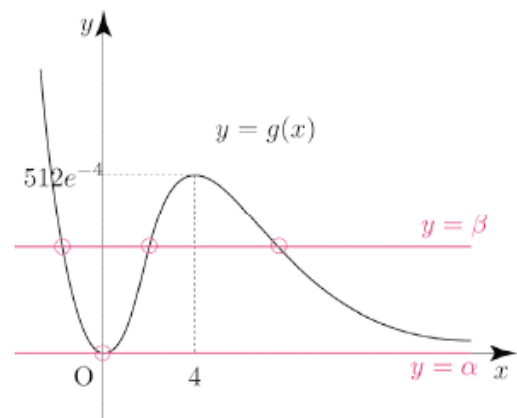


$$f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

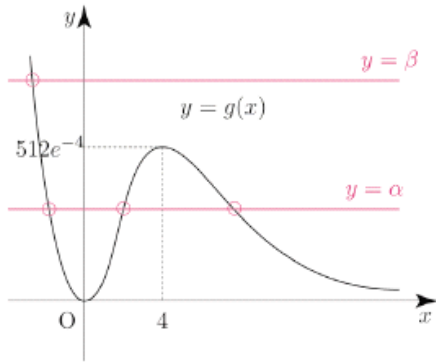
$$h(x)=0 \Rightarrow f(g(x))=0 \Rightarrow g(x)=\alpha \text{ or } g(x)=\beta$$

(가) 조건을 만족시키려면 다음과 같은 두 가지 경우가 가능하다.

① $\alpha=0, 0 < \beta < 512e^{-4}$



② $0 < \alpha < 512e^{-4} < \beta$



(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)^2 + (x-\alpha)(x-\beta)^2 \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta) \\ g'(x) &= 2x^3(4-x)e^{-x} \end{aligned}$$

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소를 가지려면
 $x=0$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 $- +$ 로 변해야 한다.

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

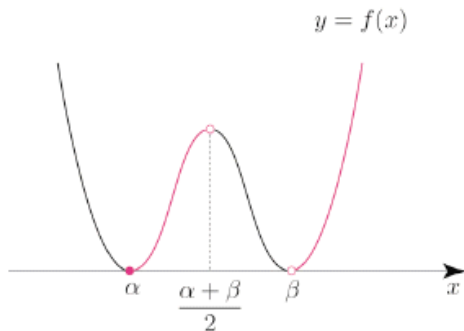
$x=0$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 $- +$ 로 변하므로

$x=0$ 의 좌우에서 $f'(g(x))$ 의 부호는 모두 $+$ 이어야 한다.

$g(x) = t$ 라 하면
 $x=0$ 의 좌우에서 t 부호가 $++$ 이고,
 $x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0+$ 이므로
 $t=0$ 의 오른쪽에서 $f'(t)$ 의 부호가 $+$ 이어야 한다.
이를 만족시키려면

$$\alpha \leq 0 < \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ or } \beta < 0$$

점 $(0, f(0))$ 이 가능한 위치를 색칠하면 아래 그림과 같다.



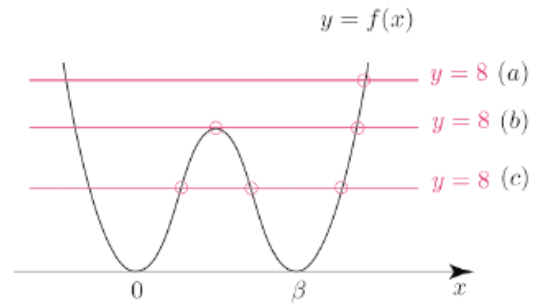
이때 (가) 조건을 만족시키는 α, β 의 범위를 고려하여
 $x=0$ 의 위치를 구하면 $\alpha=0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$$

(다) 방정식 $h(x) = 8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6 이다.

$\alpha=0$ 이므로 (가) 조건을 만족시키려면
 $0 < \beta < 512e^{-4}$ 이어야 한다.

방정식 $h(x) = 8$ 의 서로 다른 실근을 조사하기 위해서는
먼저 방정식 $f(x) = 8$ 의 서로 다른 실근을 조사해야 한다.
 $y=8$ 이 될 수 있는 경우를 case분류하면 다음과 같다.



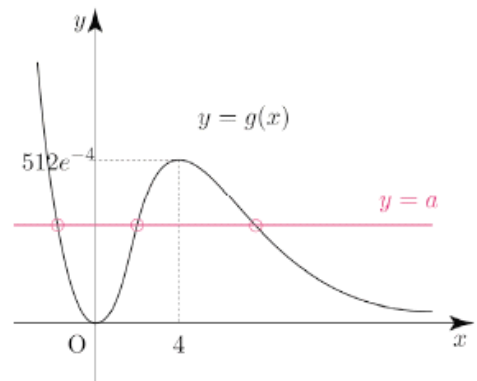
(a) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 작은 경우

방정식 $f(x) = 8$ 이 하나의 양근을 갖는다.
($g(x)$ 의 치역이 0 이상이므로 방정식 $f(x) = 8$ 의 음근은
고려하지 않아도 된다.)
이때의 양근을 a 라 하면 방정식 $g(x) = a$ 의 서로 다른
실근의 개수는 최대 3 이므로 (다) 조건을 만족시키지 않는다.

(b) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8인 경우

방정식 $f(x) = 8$ 은 서로 다른 두 개의 양근을 갖는다.
이때의 서로 다른 두 양근을 a, b ($0 < a < \beta < b$) 라 하자.

$0 < \beta < 512e^{-4} \Rightarrow 0 < a < \beta < 512e^{-4}$ 이므로
방정식 $g(x) = a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3 이다.



(다) 조건을 만족시키려면 방정식 $g(x) = b$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.

$b < 512e^{-4}$ 이면 조건을 만족시킨다.

(c) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 큰 경우

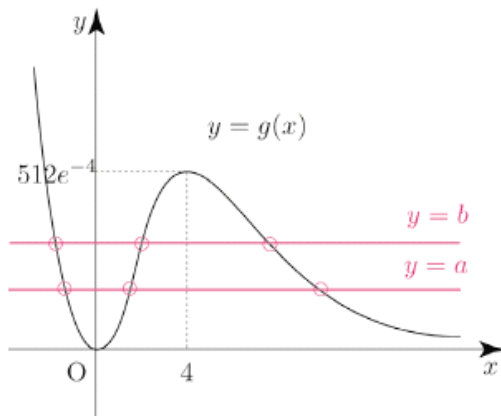
방정식 $f(x) = 8$ 은 서로 다른 세 개의 양근을 갖는다.

이때의 서로 다른 세 양근을 a, b, c ($0 < a < b < c$)라 하자.

$0 < \beta < 512e^{-4} \Rightarrow 0 < a < b < \beta < 512e^{-4}$ 이므로

방정식 $g(x) = a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이고,

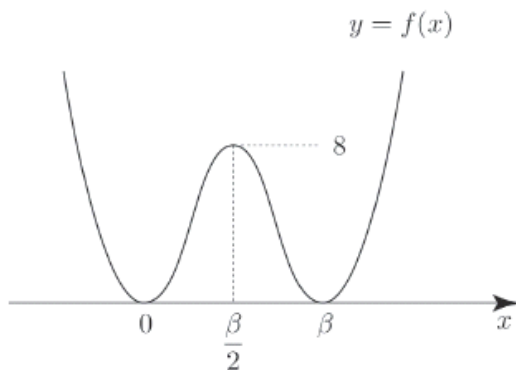
방정식 $g(x) = b$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



방정식 $g(x) = c$ 의 실근이 적어도 하나 존재하므로

(다) 조건을 만족시키지 않는다.

(a), (b), (c)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 8이다.



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$$

$f(x)$ 는 $x = \frac{\beta}{2}$ 에서 극댓값 8을 가지므로

$$f\left(\frac{\beta}{2}\right) = 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\beta^2}{4} \times \frac{\beta^2}{4} = \frac{\beta^4}{32} = 8$$

$$\Rightarrow \beta^4 = 256 \Rightarrow \beta = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-4)^2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = x(x-4)^2 + x^2(x-4) = 2x(x-2)(x-4)$$

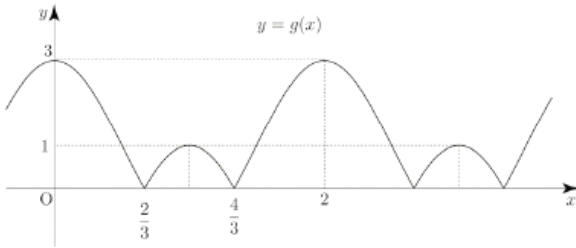
따라서 $f'(5) = 2 \times 5 \times 3 \times 1 = 30$ 이다.

답 30

14. 15

120

$$f(x) = x^3 + ax, g(x) = |2\cos\pi x + 1|$$



$$h(x) = f(g(x))$$

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$g(x)$ 는 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 x 값에서 미분가능하지 않다.

즉, $h(x)$ 의 미분가능여부를 조사할 때, $g(x) = 0$ 을 만족시키는 x 값에서만 미분가능여부를 조사하면 된다.

방정식 $g(x) = 0$ 의 실근을 $x = p$ 라 하면

$h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow p+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow p-} h'(x) \text{ 이어야 한다.}$$

(절댓값을 풀어서 그 경계로 나뉘었을 때 두 함수 모두 도함수가 연속이기에 위와 같은 식이 성립한다.)

만약 위 부분이 이해가 되지 않는다면

2026 규토 라이트 N제 수2 도함수의 활용 Master step

229번 해설 tip을 참고하도록 하자.)

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

$$2\cos\pi x + 1 < 0 \text{ 일 때, } g'(x) = 2\pi\sin\pi x$$

$$2\cos\pi x + 1 \geq 0 \text{ 일 때, } g'(x) = -2\pi\sin\pi x$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow p+} g'(x) = -\lim_{x \rightarrow p-} g'(x) \text{ 이다.}$$

$$(p \text{의 값에 따라 } \lim_{x \rightarrow p+} g'(x) = 2\pi\sin\pi p \text{ 일 수도}$$

$$\lim_{x \rightarrow p+} g'(x) = -2\pi\sin\pi p \text{ 일 수도 있지만 두 경우 모두}$$

$$\lim_{x \rightarrow p+} g'(x) = -\lim_{x \rightarrow p-} g'(x) \text{ 가 성립한다.)}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow p+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow p-} h'(x) \text{ 이 성립하려면 } g'(x) \text{의 부호가}$$

$$\text{반대이므로 } \lim_{x \rightarrow p+} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow p-} f'(g(x)) = f'(0) = 0$$

이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + ax$$

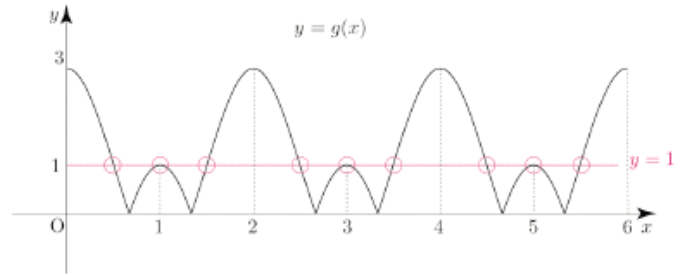
$$f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3$$

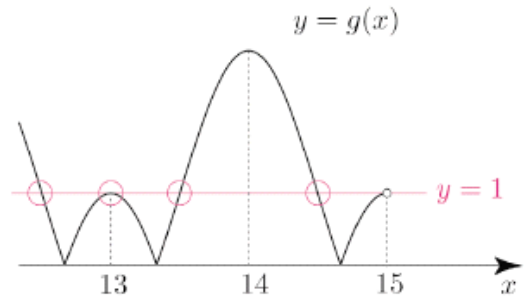
$$f(x) = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{방정식 } h(x) = 1 \Rightarrow f(g(x)) = 1 \Rightarrow g(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$0 < x < n$ 에서 방정식 $g(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 22가 되도록 하는 자연수 n 의 값을 구하면 된다.



한 주기 내에 두 그래프 $y = g(x)$, $y = 1$ 의 교점이 3개 존재하므로 교점이 21개 존재하려면 $n = 14$ 이어야 하고, 교점이 22개 존재하려면 $n = 15$ 이어야 한다.



따라서 자연수 n 의 값은 15이다.

답 15