우일신 又日新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 6월호

공통/수학2

적분 30제

정답 및 해설지

우일신又日新

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

파본형 월간 N제

25년 6월호

공통/수학2

적분 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌 넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ 16회 정답

01 (9번)	02 (10번)	03 (11번)	04 (12번)	05 (13번)	06 (14번)	07 (15번)	08 (20번)	09 (21번)	10 (22번)
②	④	①	⑤	①	②	①	36	520	165

▶ 17회 정답

11 (9번)	12 (10번)	13 (11번)	14 (12번)	15 (13번)	16 (14번)	17 (15번)	18 (20번)	19 (21번)	20 (22번)
①	②	①	④	⑤	③	②	40	8	17

▶ 18회 정답

21 (9번)	22 (10번)	23 (11번)	24 (12번)	25 (13번)	26 (14번)	27 (15번)	28 (20번)	29 (21번)	30 (22번)
②	④	①	③	①	④	⑤	110	848	224

01

정답 ②

함수

$$f(x)=|x-1|+\int_0^2 tf(t)\,dt$$

에 대하여 $\int_0^2 tf(t)\,dt=a$로 두면 $f(x)$는

$f(x)=|x-1|+a$이다. 이를 다시 대입하여 적분 계산을 하면

$$\begin{aligned}\int_0^2 tf(t)\,dt &= \int_0^2 t\{|t-1|+a\}\,dt \\ &= \int_0^1 t(-t+1+a)\,dt+\int_1^2 t(t-1+a)\,dt \\ &\quad \text{↓ 적분 계산 생략} \\ &= 2a+1\end{aligned}$$

즉, $2a+1=a$에서 $a=-1$이므로 $f(x)$는

$$f(x)=|x-1|-1$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 -x\,dx+\underline{\int_1^3 (x-2)\,dx} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

점 $(2,\,0)$ 대칭이므로 적분하면 0이다!

$$\therefore\ -\frac{1}{2}$$

02

정답 ④

함수 $g(x)$를 $\underbrace{g(x)=\int_0^x f(t)\,dt}_{g(x)\text{는 삼차함수}}$로 두면

$$g(0)=0,\quad g'(x)=f(x)$$

이다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=(x-1)g(x)$로 두면 $h(x)$는 사차함수이고, 조건 (가)에 의해 모든 실수 x에 대하여

$$h(x) \geq 0 \qquad \cdots \ ㉠$$

이어야 한다. 이때 $h(0)=h(1)=0$ 이므로 ㉠을 만족시키려면

$$h(x)=mx^2(x-1)^2 \ \rightarrow \ g(x)=mx^2(x-1)$$

이다. 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\,dt &= \int_0^2 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \\ &= g(2)-g(1) \quad \leftarrow \ g(2)=4m,\ g(1)=0 \\ &= 4m\end{aligned}$$

이므로 $4m=8$ 에서 $m=2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(t)\,dt &= \int_0^3 f(t)\,dt - \int_0^2 f(t)\,dt \\ &= g(3)-g(2) \\ &= 14m\end{aligned}$$

이므로 $\int_2^3 f(t)\,dt = 28$ 이다.

$\therefore\ 28$

03

정답 ①

Step 1 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ f(x-1) & (1 \leq x < 2)\end{cases}$$

: 구간별로 정의된 함수!

이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x+2)=g(x)$$: 주기가 2인 주기함수!

를 만족시키므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

① 경계인 $x=1$ 에서 연속성 판단
② 주기의 경계가 되는 $x=0$, $x=2$ 에서 연속성 판단

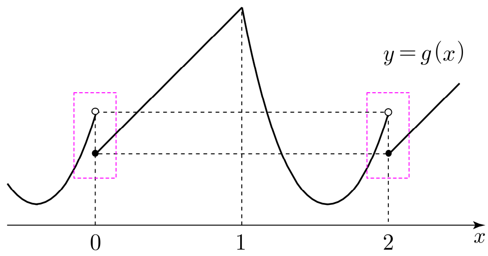
이 필요하다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ f(x-1) & (1 \leq x < 2)\end{cases}$$

가 $x=1$ 에서 연속이려면 $f(0)=2$ 이면 된다.
또한, $g(x)$ 의 주기는 2이므로 주기의 경계에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 2-} g(x) \ \rightarrow \ f(1)=1$$

(그림 참고!)



주기의 경계에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 2-} g(x)$

즉, $f(0)=2$ $f(1)=1$ 이므로

$$f(x)=ax(x-1)-x+2$$

: $f(x)-(-x+2)=ax(x-1)$ 로 식을 세울 수 있다!
[참고] 직선 $y=-x+2$ 는 두 점 $(0,\,2)$, $(1,\,1)$ 을 지나는 직선!

Step 2 구간별로 정의된 주기함수의 적분 계산

함수 $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_0^4 g(x)\,dx = 4 \ \rightarrow \ \int_0^2 g(x)\,dx = 2$$

두 주기를 적분한 값이 4이므로 한 주기만 적분하면 2이다!

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)\,dx &= \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x+1)\,dx + \int_1^2 f(x-1)\,dx \\ &= \frac{3}{2} + \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= 2\end{aligned}$$

에서 $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ a=6$

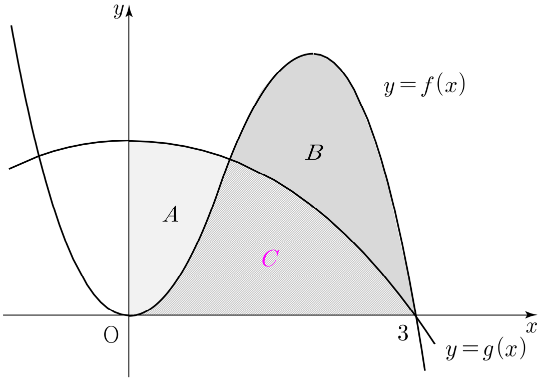
따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=6x(x-1)-x+2$ 이므로 $f(2)=12$ 이다.

$\therefore\ 12$

04

정답 ⑤

A 와 B 의 넓이의 적분 계산을 용이하게 만들어주기 위해 다음 그림과 같이 영역 C 를 정의하자.



즉,

$$\begin{aligned} &(B \text{ 의 넓이}) - (A \text{ 의 넓이}) = 6 \\ \Leftrightarrow\ &(B + C \text{ 의 넓이}) - (A + C \text{ 의 넓이}) = 6 \\ \Leftrightarrow\ &\int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx = 6 \\ \Leftrightarrow\ &\int_0^3 \{f(x) - g(x)\}dx = 6 \end{aligned}$$

이다. 두 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2$, $g(x) = a(x+3)(x-3)$ 을 대입하여 적분 계산을 하면

$$\begin{aligned} \int_0^3 \{f(x) - g(x)\}\,dx &= \int_0^3 \left(-x^3 + (3-a)x^2 + 9a\right)dx \\ &= 18a + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

따라서 $18a + \dfrac{27}{4} = 6$ 에서 $a = -\dfrac{1}{24}$ 이다.

$\therefore\ -\dfrac{1}{24}$

* Remark (넓이 공식 활용!)

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx = 6$에서 각각의 값을 넓이 공식을 활용하여 바로 구해줄 수도 있다.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{12} \times 3^4 \quad \rightarrow \quad \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{27}{4}$$

$$\int_0^3 g(x)\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{|a|}{6} \times 6^3 \quad \rightarrow \quad \int_0^3 g(x)\,dx = -18a$$

이므로 $18a + \dfrac{27}{4} = 6$ 에서 $a = -\dfrac{1}{24}$ 이다.

05

정답 ①

Step 1 함수 $g(x)$ 의 식 세우기

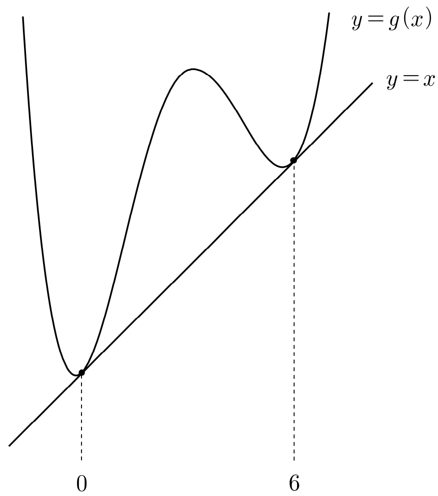
함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{: 정적분으로 정의된 함수!}$$

에 $x = 0$ 을 대입하면 $g(0) = 0$ 이고, 양변을 x 에 대하여 미분하면 $g'(x) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} &g(0) = 0, \quad g'(0) = 1 \quad (\because\ f(0) = 1) \\ &g(6) = 6, \quad g'(6) = 1 \quad (\because\ f(6) = 1) \end{aligned}$$

이때 함수 $y = g(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $(0, 0)$, $(6, 6)$ 을 지나는 직선의 기울기가 1 이고, $g'(0) = g'(6) = 1$ 이므로 직선 $y = x$ 는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 $x = 0$, 6 에서 모두 접한다.



즉, 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = mx^2(x-6)^2 + x$ 로 두자.

: 직선 $y = x$ 와 $x = 0$, 6 에서 모두 접한다!를 활용

* Remark

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수임을 가정하고 그린 그래프이다. 음수는 안될까? 후술하는 조건 (나)를 활용하여 종합해보면 최고차항의 계수가 음수인 케이스는 가능하지 않지만 이를 발견하는 것은 그리 어렵지 않으므로 해설에 따로 언급하진 않겠다. (스스로 고민해보기)

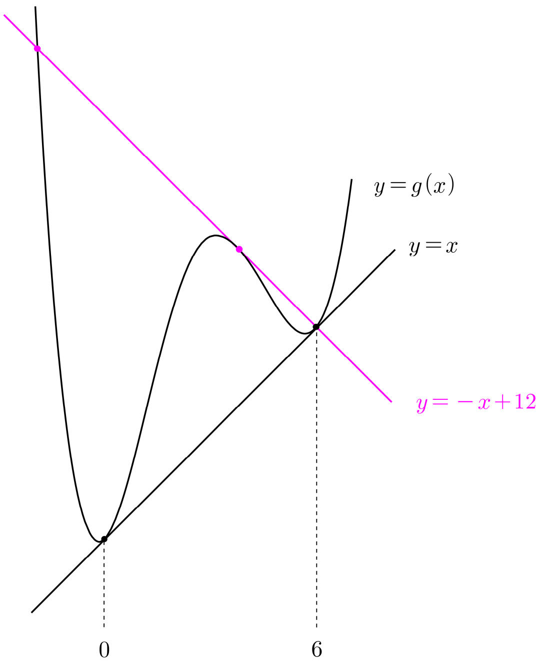
Step 2 방정식 $g(x)=-x+12$ 의 실근의 개수는 3 이다.

조건 (나)에서 방정식

$$g(x)=-x+12 \quad : y=g(x) \text{ 와 } y=-x+12 \text{ 의 교점!}$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+12$ 가 만나는 점의 개수가 3 이어야 한다. 이때 직선 $y=-x+12$ 는 점 $(6,6)$ 을 지나므로 상황을 그려보면 다음과 같다.

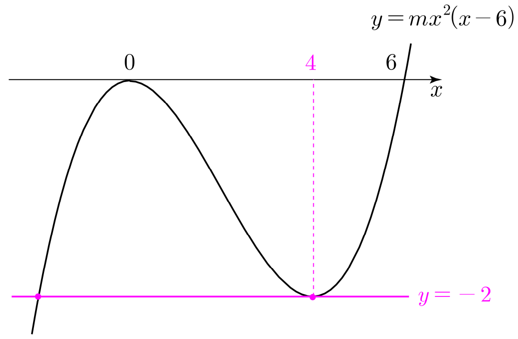
함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점!



즉, $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+12$ 가 접해야 한다.

$$\begin{aligned} & g(x)=-x+12 \\ \Leftrightarrow\ & mx^2(x-6)^2+x=-x+12 \\ \Leftrightarrow\ & mx^2(x-6)^2=-2(x-6) \leftarrow (x-6) \text{ 나누기!} \\ \Leftrightarrow\ & mx^2(x-6)=-2 \leftarrow \text{서로 다른 두 실근을 가져야 함!} \end{aligned}$$

이므로 곡선 $y=mx^2(x-6)$ 과 직선 $y=-2$ 도 접해야 한다!



함수 $y=mx^2(x-6)$ 는 $x=4$ 에서 극소이므로

$$m\times 4^2\times(-2)=-2 \rightarrow m=\frac{1}{16}$$

따라서 $g(x)=\frac{1}{16}x^2(x-6)^2+x$ 이므로 $g(8)=24$ 이다.

$\therefore\ 24$

06

정답 ②

Step 1 조건 (가)에 제시된 부등식 해석

$0<x_1<x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt > f(x_2)-f(x_1) \\ \Leftrightarrow\ & \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt > \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,dt \\ \Leftrightarrow\ & \int_{x_1}^{x_2} \{f(t)-f'(t)\}\,dt > 0 \end{aligned}$$

이므로 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 로 두면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이고, $0<x_1<x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\int_{x_1}^{x_2} g(t)\,dt > 0$$

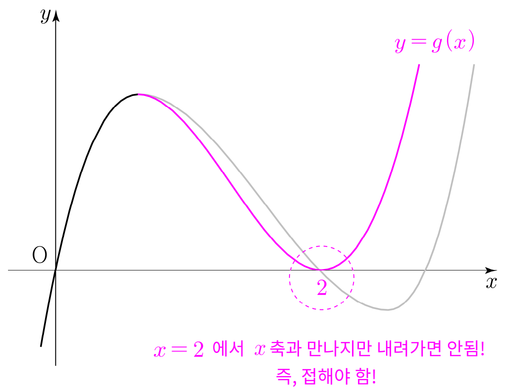
를 만족시켜야 한다. 즉, $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 $g(x)\geq 0$ 이어야 한다.

Step 2 $f(0)=f'(0)$, $f(2)=f'(2)$ **활용**

$f(0)=f'(0)$, $f(2)=f'(2)$ 이므로 $g(0)=g(2)=0$ 이다.
이때 $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서

$$g(x)\geq 0$$

을 만족시키기 위해선 $g'(2)=0$ 이어야 한다. (그림 참고!)



즉, 함수 $g(x)$ 는 $g(x)=x(x-2)^2$ 이다.

따라서

$$\int_0^2 f(x)\,dx-\{f(2)-f(0)\}=\int_0^2\{f(x)-f'(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 g(x)\,dx$$

⤸ 넓이 공식에 의해 $\frac{1}{12}\times(2-0)^4$

$$=\frac{4}{3}$$

이다.

$$\therefore\ \frac{4}{3}$$

다른 풀이! - 부등식을 다르게 해석하는 방법

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 $0<x_1<x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt>f(x_2)-f(x_1)$$

을 만족시킨다. 이때 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-f(x)$$

로 두면

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt>f(x_2)-f(x_1)$$
$$\Leftrightarrow\ \int_0^{x_2} f(t)\,dt-f(x_2)>\int_0^{x_1} f(t)\,dt-f(x_1)$$
$$\Leftrightarrow\ h(x_2)>h(x_1)$$

이어야 한다. 즉, $h(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 증가해야하므로
$h'(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-f'(x)\geq 0$
(이후 풀이는 동일!)

07

정답 ①

Step 1 **함수** $y=f(x)$ **의 그래프의 특징**

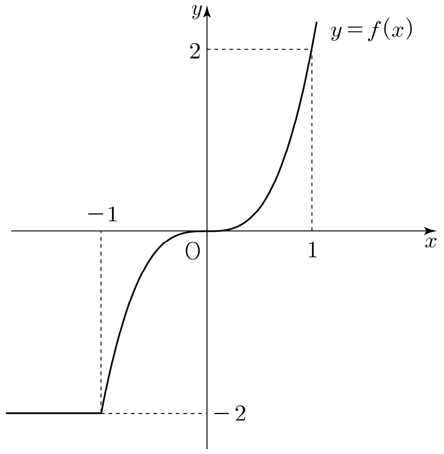
함수

$$f(x)=x^3-1+\left|x^3+1\right|$$: 절댓값을 벗기려면 부호 판단!

의 식을 정리하기 위해 $x=-1$ 을 기준으로 범위를 나누면

$$f(x)=x^3-1+|x^3+1|$$
$$=\begin{cases} x^3-1+(x^3+1) & (x\geq -1) \\ x^3-1-(x^3+1) & (x<-1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} 2x^3 & (x\geq -1) \\ -2 & (x<-1)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 치역을 x 의 값의 범위에 따라 확인해보면

$-1 \le x \le 1$ 일 때, $-2 \le f(x) \le 2$ 이고, $f(x) = -f(-x)$
$x > 1$ 일 때, $f(x) > 2$
$x < -1$ 일 때, $f(x) = -2$

Step 2 조건 (가)와 (나)를 통해 $y = g(x)$ 의 그래프 추론

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $g(f(x)) = g(f(-x))$ 이다.

[Step 1]에서 x 의 값에 따라 $f(x)$ 의 범위를 확인했으므로
모든 실수 x 에 대하여 $g(f(x)) = g(f(-x))$ 가 성립함을 활용하기 위해서 x 의 값의 범위를 나눠보자.

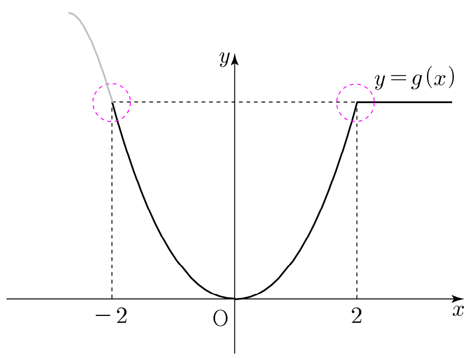
$-1 \le x \le 1$ 인 실수 x 에 대하여 $-2 \le f(x) \le 2$ 이므로
$f(x) = t$ 로 치환하면

$-2 \le t \le 2$ 일 때, $g(t) = g(-t)$ ··· ㉠
: y 축 대칭 함수!

$x > 1$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x) > 2$ 이고,
$x < -1$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x) = -2$ 이므로 ($f(x) = t$ 로 치환!)

$t > 2$ 일 때, $g(t) = g(-2)$ ··· ㉡
: 상수함수!

㉠, ㉡을 통해 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형을 (대략적으로) 상상해보면 다음과 같다.



경계에서 미분가능해야 함!

(2) $x \le 0$ 일 때, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수이다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로
경계인 (1)에서 살펴본 그래프의 경계에서 미분가능해야 한다.
$g(x)$ 는 삼차함수이므로 $x = -2$ 에서의 미분가능성은 따로 고려할 필요가 없으며, $x = 2$ 에서 미분가능하려면
$g'(2) = g'(-2) = 0$ 이어야 한다. (상수함수를 미분하면 0 이므로!)

또한, $g(x)$ 가 미분가능하면서 y 축에 대하여 대칭이려면
$g'(0) = 0$ 이어야 한다. 즉, $x \le 0$ 일 때, $g(x)$ 의 식을 작성하면

$$g'(-2) = 0,\ g'(0) = 0 \ \rightarrow \ g'(x) = -3x(x+2)$$
$$\rightarrow \ g(x) = -x^3 - 3x^2 + C$$

(단, C 는 적분상수)

$\int_0^3 g(x)\,dx = 16$ 이므로 적분 값을 계산하기 위해 구간에 따라 나눠서 계산하면

$$\begin{aligned}\int_0^3 g(x)\,dx &= \int_0^2 g(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^0 g(x)\,dx + \int_2^3 g(-2)\,dx \\ &= \int_{-2}^0 (-x^3 - 3x^2 + C)\,dx + g(-2) \\ &= 3C - 8\end{aligned}$$

$3C - 8 = 16$ 이므로 $C = 8$ 이다. 따라서 $x \le 0$ 일 때, $g(x)$ 는
$g(x) = -x^3 - 3x^2 + 8$ 이므로 $g(1) = 6$ $(= g(-1))$ 이다.

$\therefore\ 6$

08

정답 36

함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ 32 - f(-x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

: $y = 32 - f(-x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를
점 $(0,\ 16)$ 에 대하여 대칭시킨 그래프!

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(0) = 32 - f(0) \ \rightarrow \ f(0) = 16$$

이다. 이때 함수 $y = 32 - f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의

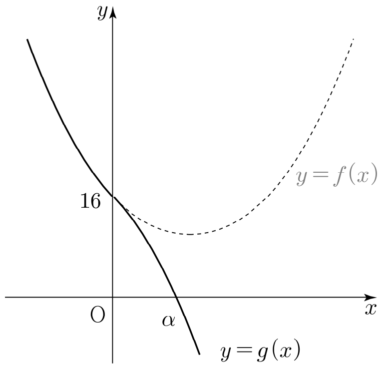
그래프를 점 $(0,\,16)$ 에 대하여 대칭시킨 그래프라는 사실을 활용해 $y=g(x)$ 의 그래프 개형을 추론할 수 있다.

함수 $h(x)$ 를 $h(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x} g(t)\,dt$ 로 두면

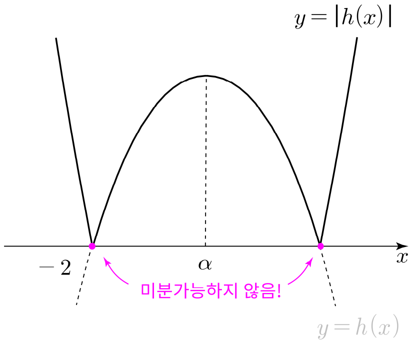
$h'(x)=g(x),\quad h(-2)=0$: x 축의 위치 결정!

함수 $|h(x)|$ 가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않을 상황을 찾기 위해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 개형에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 양수인 경우

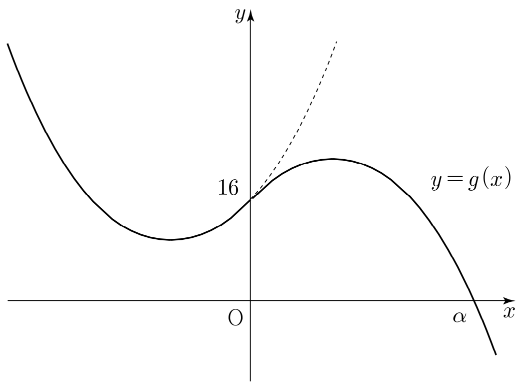


함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 도함수 $y=h'(x)$ 의 그래프와 같으므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 바탕으로 함수 $y=|h(x)|$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

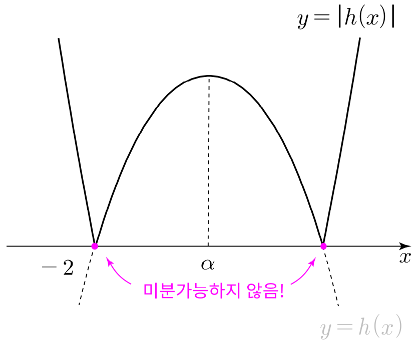


이때 함수 $|h(x)|$ 는 두 점에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 음수이고, 최솟값이 양수인 경우

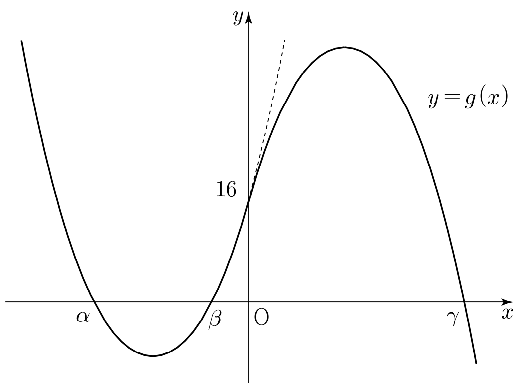


함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 도함수 $y=h'(x)$ 의 그래프와 같으므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 바탕으로 함수 $y=|h(x)|$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

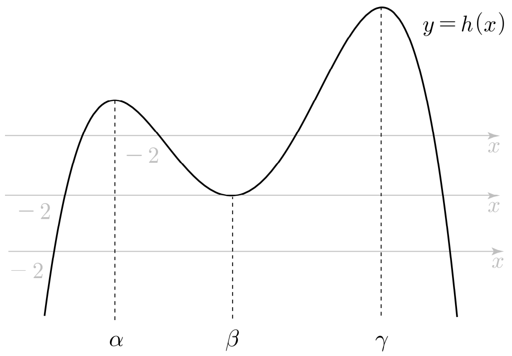


이때 함수 $|h(x)|$ 는 두 점에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 음수이고, 최솟값이 음수인 경우



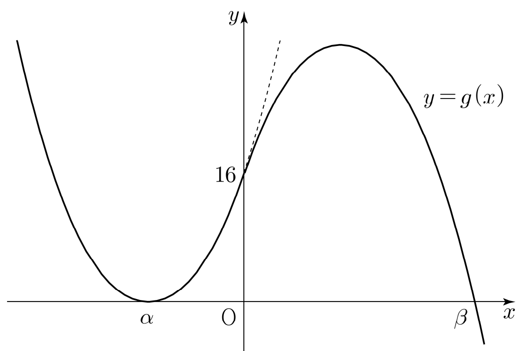
함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 도함수 $y=h'(x)$ 의 그래프와 같으므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



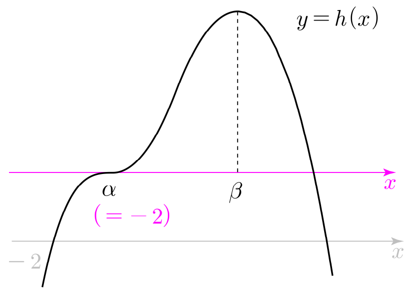
: x 축의 위치 결정 불가능!

이때 함수 $y=h(x)$ 의 그래프에서 $x=-2$ 의 위치를 알 수 없으므로 x 축의 위치를 특정할 수 없지만 어느 경우에도 $|h(x)|$ 가 오직 한 점에서 미분가능하지 않은 상황은 존재하지 않는다.

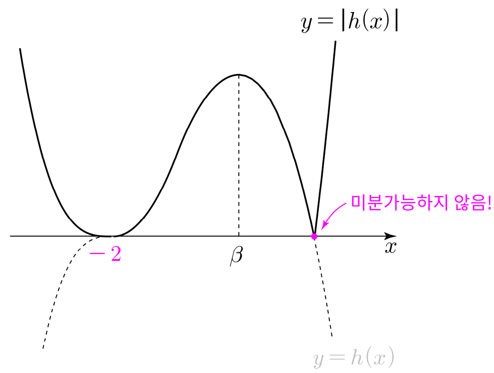
(4) $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 음수이고, 최솟값이 0 인 경우 (정답상황!)



함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 도함수 $y=h'(x)$ 의 그래프와 같으므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이때 함수 $|h(x)|$ 가 오직 한 점에서 미분가능하지 않으려면 $\alpha=-2$ 이어야 한다.



: 함수 $y=|h(x)|$ 의 그래프!

(1), (2), (3), (4)에 의해 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟값 0 을 가지므로 $f(x)=a(x+2)^2$ 로 두자. $f(0)=16$ 이므로

$$f(0)=16 \quad \rightarrow \quad a=4$$

따라서 $g(-1)+g(2)=36$ $(=f(-1)+(32-f(-2)))$ 이다.

$\therefore\ 36$

09

정답 520

Step 1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 정보 및 관계 파악

함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=x(x-p-4)(x-2p)$$

이므로 $f(0)=f(p+4)=f(2p)=0$ 이다.

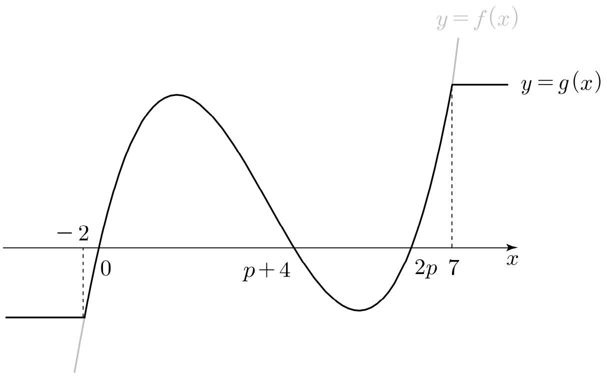
x 축과 만나는 점이 존재함! 다만, p 의 값을 모르므로
서로 다른 세 점에서 만난다는 보장은 없음! (중근일 수도..)

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(-2) & (x \le -2) \\ f(x) & (-2<x\le 7) \\ f(7) & (x>7) \end{cases}$$

: 연속성 보장!

이므로 $-2<x\le 7$ 일 땐, $g(x)=f(x)$ 이고 그 외의 구간에선 연속이 보장되는 상수함수임을 알 수 있다. 즉, $y=f(x)$ 의 그래프를 아무렇게나 상상했을 때, $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



Step 2 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖는다.

함수 $h(x)$ 는

$$h(x)=\int_a^x g(t)\,dt \quad \rightarrow \quad h'(x)=g(x), \quad h(a)=0$$

이다. 이때 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 역함수를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여

$$h'(x)\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\ge 0$$

또는

$$h'(x)\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\le 0$$

이어야 한다. 이때 $f(0)=0$ 이므로 $-2<x\le 7$ 일 때, $g(0)=0$ 이지만 $h(x)$ 가 역함수를 가지려면 $g(x)$ 는 $x=0$ 일 때, x 축을 뚫고 지나가면 안된다. 즉, $g(x)$ 는 $g(0)=g'(0)=0$ 이어야 하므로

$$2p=0 \quad \text{또는} \quad p+4=0$$

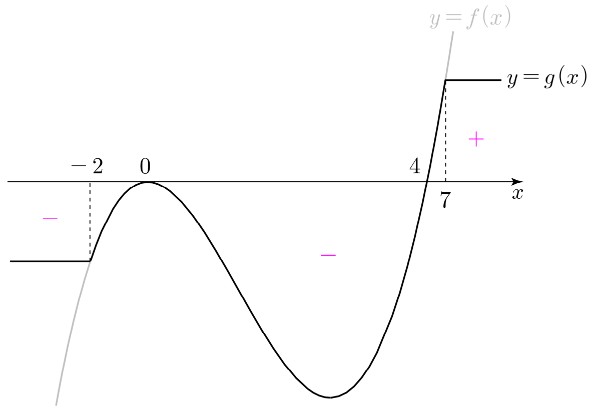
이어야 한다.

(1) $p=0$ 인 경우 ($\Leftrightarrow$ $2p=0$ 인 경우)

$p=0$ 이면 $f(x)$ 는

$$f(x)=x^2(x-4)$$

이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



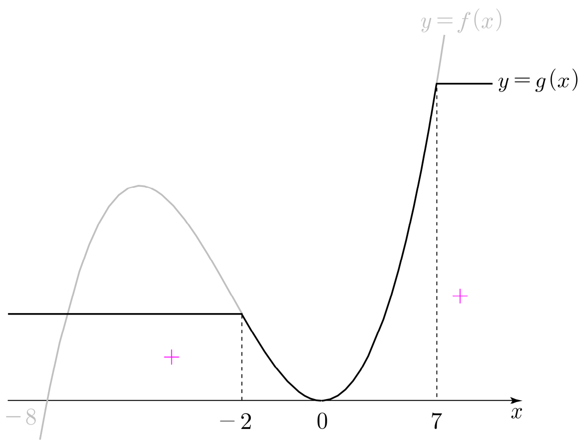
이때 $g(4)=0$ 이고, $x=4$ 를 기준으로 좌/우에서 부호 변화가 발생하므로 $g(x)$ 를 도함수로 갖는 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖지 않는다.

(2) $p=-4$ 인 경우 ($\Leftrightarrow$ $p+4=0$ 인 경우) (정답상황!)

$p=-4$ 이면 $f(x)$ 는

$$f(x)=x^2(x+8)$$

이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge 0$ 이므로 $g(x)$ 를 도함수로 갖는 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖는다.

(1), (2)에 의해 $p=-4$ 이고, $f(x)$ 는 $f(x)=x^2(x+8)$ 이다.

함수 $h(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(0,\ -2)$ 를 지나므로 $h(-2)=0$ 이다. 이때 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이므로 (역함수를 가지므로!) $h(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값은 $a=-2$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} h(0) &= \int_{-2}^{0} g(x)\,dx \quad \leftarrow\ -2 \le x \le 0 \text{일 때, } g(x)=f(x) \\ &= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx \quad \leftarrow\ f(x)=x^2(x+8) \\ &= \frac{52}{3} \end{aligned}$$

이므로 $30 \times h(0)=520$ 이다.

$\therefore\ 520$

10

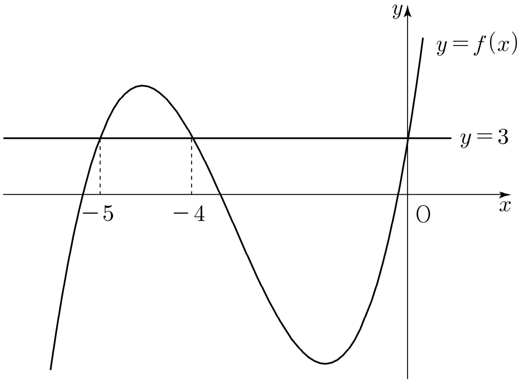
정답 165

Step 1 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 개형

함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=x^3+9x^2+20x+3$$

의 식을 정확하게 알고 있으므로 그래프를 그릴 수 있다.
(미분하여 $f'(x)=3x^2+18x+20$ 을 통해 그래프를 그려도 되지만 $f(x)=x(x+4)(x+5)+3$ 으로 보고도 그래프 개형 추론 가능!)



함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-5}^{x} f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle -\int_{0}^{x} f(t)\,dt + a & (x \ge 0) \end{cases}$$

이므로 $x=0$ 을 기준으로 좌/우에서의 함수의 그래프 개형에 대해 생각해보자.

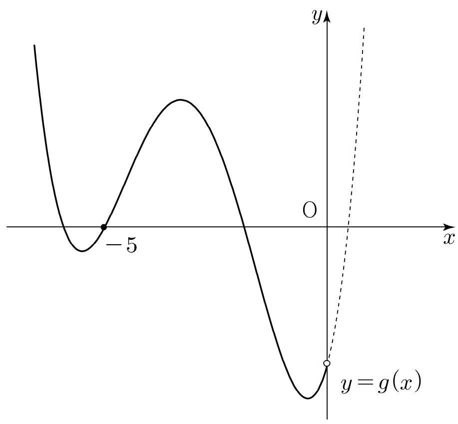
(1) $x<0$ 에서 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면?

$x<0$ 일 때, $g(x)$ 는

$$g(x)=\int_{-5}^{x} f(t)\,dt \quad : \text{ 정적분으로 정의된 함수!}$$

$$\rightarrow\quad g'(x)=f(x),\quad g(-5)=0$$

이므로 $f(x)$ 를 도함수로 갖는다는 사실을 통해 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



: $x<0$ 인 부분만 그리기!

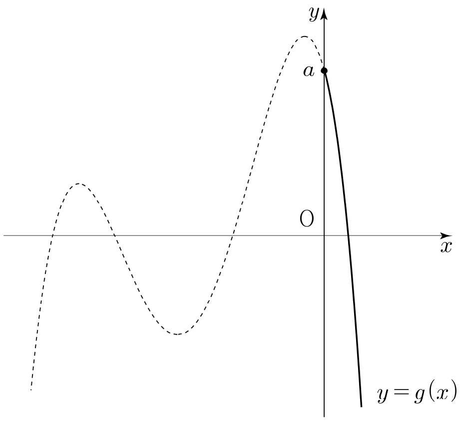
(2) $x \geq 0$ 에서 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면?

$x \geq 0$ 일 때, $g(x)$ 는

$$g(x) = -\int_0^x f(t)\,dt + a$$: 정적분으로 정의된 함수!

$$\rightarrow \quad g'(x) = -f(x), \quad g(0) = a$$

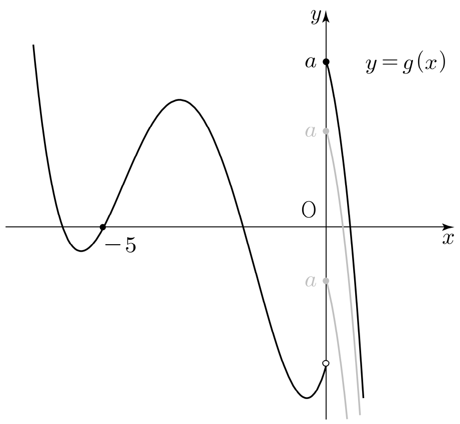
이므로 $-f(x)$ 를 도함수로 갖는다는 사실을 통해 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



a 의 값에 따라 그래프가 위아래로 움직인다!

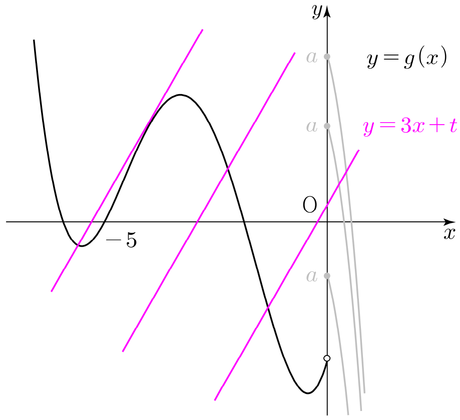
: $x \geq 0$ 인 부분만 그리기!

즉, (1), (2)에 의해 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Step 2 $\left|\lim\limits_{t\to k+} h(t) - b\right| = |h(k) - b|$ **이 항상 성립한다.**

방정식 $g(x) = 3x + t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 관찰하기 위해 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x+t$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 관찰하자.



이때 위의 그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 기울기가 3 인 직선 $y=3x+t$ 과 만나는 점의 개수를 살펴보면 그 개수가 일정하지 않고 변하게 된다. 즉, 함수 $h(t)$ 는 반드시 불연속이 되는 순간이 발생할 것이다.

지금부터 우리가 $g(x)$ 의 그래프 개형을 추론하기 위해 해야할 일은 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 k 에 대하여

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - b\right| = |h(k) - b|$$

를 만족시키는 상수 b 가 존재한다는 조건을 해석하는 것이다.

(1) $\lim\limits_{t\to k+} h(t) = h(k)$ 라면?

$\lim\limits_{t\to k+} h(t) = h(k)$ 이면 b 의 값에 관계없이

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - b\right| = |h(k) - b|$$

가 항상 성립함을 알 수 있다.

(2) $\lim\limits_{t\to k+} h(t) \neq h(k)$ 이라면?

$\lim\limits_{t\to k+} h(t) \neq h(k)$ 임에도 불구하고 해당 등식이 성립하려면

$$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - b\right| = |h(k) - b|$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to k+} h(t) + h(k) = 2b \qquad \cdots ㉠$$

: 합이 항상 $2b$ 로 일정하다!

를 만족시키는 상수 b 가 존재해야 한다. 즉, 지금부터 함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 순간에 주목하여 ㉠을 만족시키는 상황을 찾아보자.

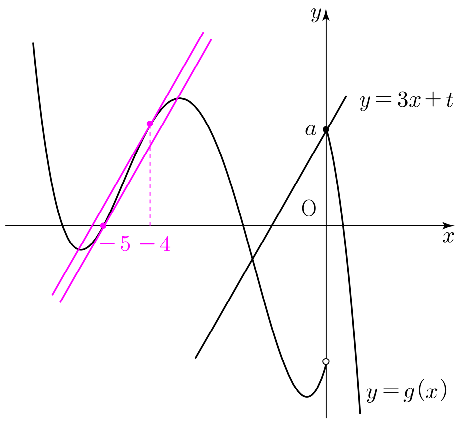
Step 3 **$h(t)$ 가 불연속이 되는 순간에 대한 조사**

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x+t$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수인 $h(t)$ 가 불연속이 되는 순간은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기가 3 이 되는 순간이다.
그러므로 방정식 $g'(x)=3$ 을 풀어보면

$$g'(x)=3 \ \rightarrow \ f(x)=3$$
$$\rightarrow \ x=-5,\ -4$$ ($x=0$ 은 정의역에서 제외!)

이므로 기울기가 3 인 직선은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $(-5,\ g(-5))$, $(-4,\ g(-4))$ 에서 접한다.

두 점 $(-5,\ g(-5))$, $(-4,\ g(-4))$ 에서의 접선의 y 절편을 각각 α, β 로 두자. ($h(t)$ 는 $t=\alpha,\ \beta$ 에서 불연속!)



위의 그림과 같이 만약 a 가 특수하게 잡히지 않고

$$a<\alpha$$

를 만족시키는 아무런 양수 하나로 가정해보자. 이때 ㉠이 성립하는지 판단하기 위해 $t=\alpha$, β 근방에서 $h(t)$ 의 값을 관찰하면

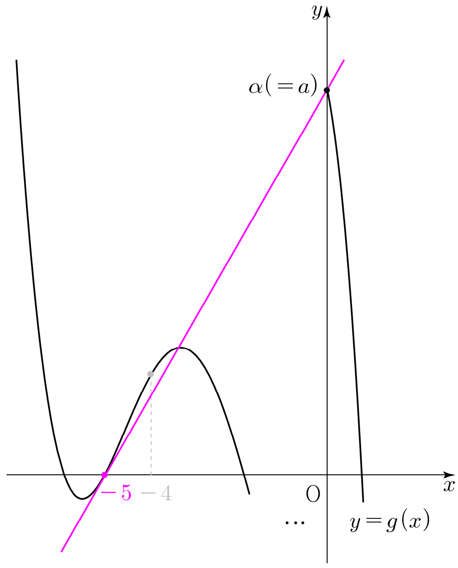
$$\lim_{t\to\alpha+} h(t)=3,\quad h(\alpha)=2,$$
$$\lim_{t\to\beta+} h(t)=1,\quad h(\beta)=2$$

이므로

$$\lim_{t\to\alpha+} h(t)+h(\alpha)=2b\ (=5)$$
$$\lim_{t\to\beta+} h(t)+h(\beta)=2b\ (=3)$$

를 만족시키는 상수 b 의 값은 존재하지 않는다. 즉, a 의 값은 매우 특수하게 설정되어야 함을 알 수 있기에 $a=\alpha$ 인 순간과 $a=\beta$ 인 순간이 유력한 후보가 된다.

(1) $a=\alpha$ 가 된다면? (정답상황!)



$t=\alpha$, β 근방에서 $h(t)$ 의 값을 관찰하면

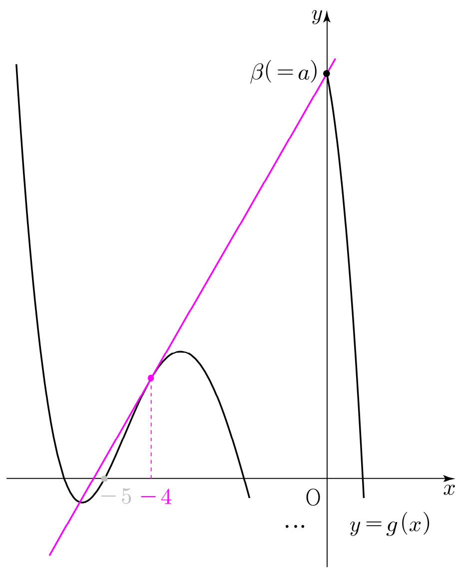
$$\lim_{t\to\alpha+} h(t)=3,\quad h(\alpha)=3 \ \leftarrow \ \lim_{t\to\alpha+} h(t)=h(\alpha)$$
$$\lim_{t\to\beta+} h(t)=1,\quad h(\beta)=2$$

이므로

$$\lim_{t\to\beta+} h(t)+h(\beta)=2b \ \rightarrow \ b=\frac{3}{2}$$

가 되면 조건을 만족시킨다.

(2) $a=\beta$ 가 된다면?



$t=\alpha$, β 근방에서 $h(t)$ 의 값을 관찰하면

$$\lim_{t\to\alpha+} h(t)=4,\quad h(\alpha)=3$$
$$\lim_{t\to\beta+} h(t)=1,\quad h(\beta)=3$$

이므로

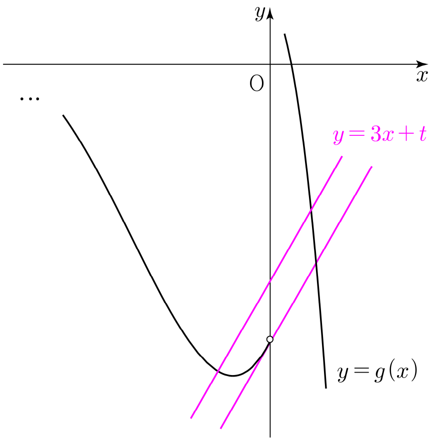
$$\lim_{t\to\alpha+} h(t)+h(\alpha)=2b\ (=7)$$

$$\lim_{t\to\beta+} h(t)+h(\beta)=2b\ (=4)$$

를 만족시키는 상수 b의 값은 존재하지 않는다.

* Remark ($y=3x+t$가 점 $\left(0,\ \int_{-5}^{0} f(t)\,dt\right)$를 지나는 순간!)

직선 $y=3x+t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프의 $x=0$에서의 경계를 정확하게 지나는 순간에도 $h(t)$는 불연속이 된다.



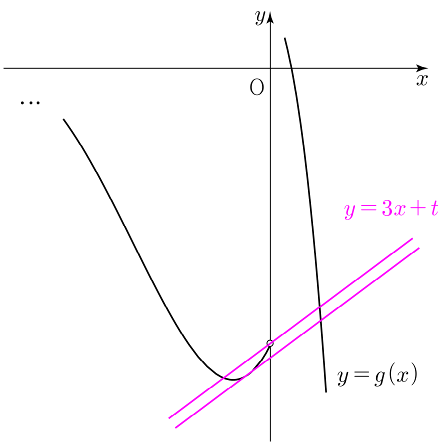
이 순간의 t의 값을 $t=t_1$으로 두면

$$\lim_{t\to t_1+} h(t)=2,\quad h(t_1)=1$$

이므로 $\lim_{t\to k+} h(t)+h(k)=3$이 되어 (1)에서 구한 $b=\frac{3}{2}$이 조건을 모두 만족시킨다는 사실을 알 수 있다. 또한,

$$f(0)=3\ (=g(x)\text{ 의 } x=0\text{에서의 좌미분계수})$$

이므로 다음과 같은 상황은 발생하지 않는다.



$-4<x<0$에서 접선의 기울기가 3이 되는 점은 발생 X

(1), (2)에 의해 $a=\alpha$이고, $b=\frac{3}{2}$인 순간이 조건을 만족시키는 상황이다. α의 값을 찾기 위해 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(-5,\ g(-5))$에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y=g'(-5)(x+5)+g(-5)\ \rightarrow\ y=3x+15$$

이므로 $a=15$이다. 따라서 $a=15,\ b=\frac{3}{2}$이므로

$10(a+b)=165$이다.

$\therefore\ 165$

* Remark (상수함수와의 교점으로 비교하는 방법)

함수 $p(x)$를 $p(x)=g(x)-3x$로 두고 함수 $y=p(x)$의 그래프와 상수함수 $y=t$와의 교점을 비교할 수도 있다! (함수 식을 잘 관찰하는 학생들은 이 풀이가 훨씬 더 간단하다고 느낄지도?)

11

정답 ①

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_a^x f(t)\,dt+x^4-12x^2\quad\cdots\ ㉠$$

를 만족시키므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$$f(a)=a^4-12a^2\quad\cdots\ ㉡$$

또한, ㉠을 만족시키려면 $f(x)$는 삼차함수이어야 한다. (우변)인

$$\int_a^x f(t)\,dt+x^4-12x^2$$

이 삼차함수이려면 $f(x)=-4x^3+\cdots$ 이다.

$$\int_a^x f(t)\,dt=-x^4-4x^3+px^2+qx+r$$

⤸ 양변 미분!

$$\rightarrow\ f(x)=-4x^3-12x^2+2px+q$$

이므로 ㉠에 대입하여 양변의 계수를 비교하면

$$-12=(p-12),\quad 2p=q,\quad q=r \quad\rightarrow\quad p=q=r=0$$

즉, $f(x)$는 $f(x)=-4x^3-12x^2$ 이므로

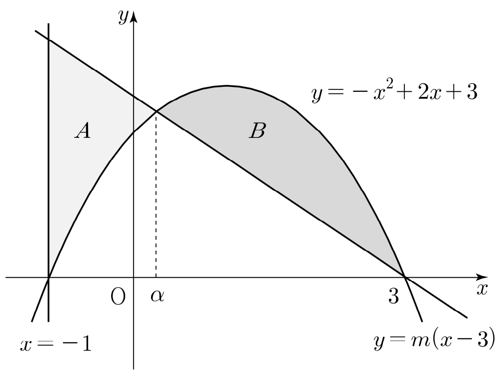
$$f(a)=-4a^3-12a^2 \qquad \cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 계산하면 $a=-4$ $(\because\ a\neq 0)$
따라서 $f(a-1)=200$ $(=f(-5))$ 이다.

$\therefore\ 200$

12

정답 ②



그림과 같이 곡선 $y=-x^2+2x+3$ 과 직선 $y=m(x-3)$ 이 만나는 점의 x 좌표를 α 로 두면

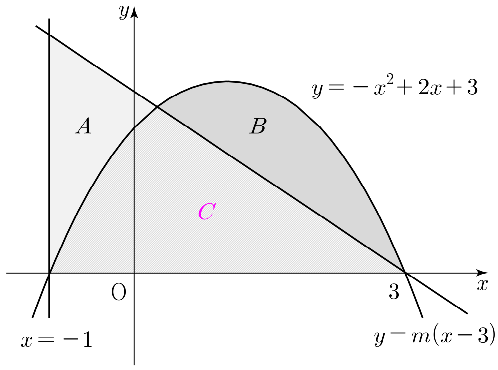
$$A=\int_{-1}^{\alpha}\{m(x-3)-(-x^2+2x+3)\}\,dx,$$
$$B=\int_{\alpha}^{3}\{(-x^2+2x+3)-m(x-3)\}\,dx$$

이때 $A=B$ 이므로

$$A-B=0 \iff \int_{-1}^{3}\{m(x-3)-(-x^2+2x+3)\}\,dx=0$$
$$\iff m=-\frac{4}{3} \quad \text{(계산 생략)}$$

$\therefore\ -\dfrac{4}{3}$

* Remark (공통으로 포함될 수 있는 영역 추가하기)
다음 그림과 같이 영역 C를 새롭게 정의하자.



$$A+C=\frac{1}{2}\times 4\times(-4m) \quad \text{: 삼각형 넓이!}$$
$$B+C=\frac{1}{6}\times(3-(-1))^3 \quad \text{: 이차함수 넓이 공식!}$$

이므로 $A=B \rightarrow m=-\dfrac{4}{3}$임을 구할 수도 있다!

13

정답 ①

최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여

$$x\int_{1}^{x} g(t)\,dt=|f(x)| \qquad \cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$
$x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

이때 ㉠에서

$$\underbrace{x}_{\text{미가!}}\times\underbrace{\int_{1}^{x} g(t)\,dt}_{\text{미가!}}=|f(x)|$$

이므로 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
즉, $f(x)=-x^2(x-1)^2$ $(\because\ f(0)=f(1)=0)$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\int_1^x g(t)\,dt = x(x-1)^2$$

⤸ 양변을 미분!

$$\rightarrow \quad g(x)=(3x-1)(x-1)$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{6}\times 3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$ ← 이차함수 넓이 공식!

이다.

$$\therefore \ \frac{4}{27}$$

14

정답 ④

Step 1 함수 $\{g(x)\}^2$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 는 일차함수이므로 $|f'(x)|$ 는 미분가능하지 않은 점이 반드시 하나 존재한다. 함수

$$g(x) \ = \ \underbrace{|f'(x)|}_{\text{미불!}} \ - \ \underbrace{\int_1^x f(t)\,dt}_{\text{미가!}}$$

에 대하여 $\{g(x)\}^2$ 은

$$\{g(x)\}^2 = \{f'(x)\}^2 + \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)^2 -2|f'(x)|\int_1^x f(t)\,dt$$

이므로 함수 $\{g(x)\}^2$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$y=-2\times \underbrace{|f'(x)|}_{\text{미불!}} \times \underbrace{\int_1^x f(t)\,dt}_{\text{미가!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 된다.

Step 2 곱함수 미분가능성에 대한 판단

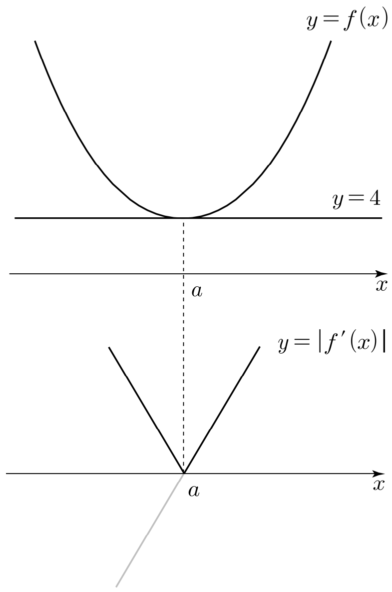
함수 $h(x)$ 를 $h(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ 로 두면

$$h'(x)=f(x), \quad h(1)=0$$

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값이 4 이므로

$$f(x)=(x-a)^2+4 \quad \rightarrow \quad f'(x)=2(x-a)$$

로 두면 함수 $|f'(x)|$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.



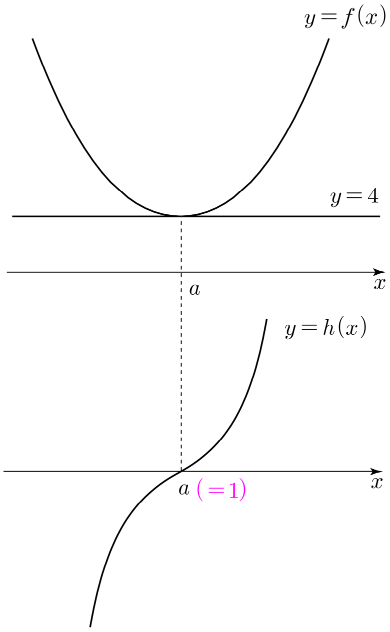
함수

$$y=-2\times \underbrace{|f'(x)|}_{\text{미불!}} \times \underbrace{h(x)}_{\text{미가!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곱함수 미분가능성에 의해 $h(a)=0$ 이어야 한다. 이때 함수 $h(x)$ 는 $f(x)$ 를 도함수로 갖기에 모든 실수 x 에 대하여

$$h'(x)=f(x)>0 \quad \rightarrow \quad h(x) \text{는 증가함수!}$$

이어야 한다. 즉, $h(1)=h(a)=0$ 에서 $a=1$ 일 수 밖에 없다.



따라서 함수 $h(x)$는 $h(x)=\frac{1}{3}(x-1)^3+4x-4$이므로

$$\int_1^4 f(x)\,dx=21\ (=h(4))$$

이다.

$\therefore\ 21$

15

정답 ⑤

부등식의 형태를 변형하면

$$\int_0^x f(t)\,dt \ge \int_x^k f(t)\,dt$$
$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt-\int_x^k f(t)\,dt \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt+\int_k^x f(t)\,dt \ge 0 \qquad \cdots ㉠$$

함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_k^x f(t)\,dt \qquad \cdots ㉡$$

로 두면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 사차함수이고,

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$을 만족시켜야 한다.
(x축을 기준으로 항상 위쪽에만 있어야 함!)

㉡의 양변을 미분하면 $g'(x)=2f(x)$이고,
㉠의 양변에 $x=0$, $x=k$를 각각 대입하면

$x=0$ 대입 : $\int_k^0 f(t)\,dt \ge 0 \ \rightarrow\ \int_0^k f(t)\,dt \le 0$

$x=k$ 대입 : $\int_0^k f(t)\,dt \ge 0$

이므로 $\int_0^k f(t)\,dt=0$이다. 즉, $g(0)=g(k)=0$

이때 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 사차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$을 만족시키고, $g(0)=g(k)=0$이므로

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2(x-k)^2 \ \rightarrow\ f(x)=x\left(x-\frac{k}{2}\right)(x-k)$$

: $x=0$, k에서 x축과 접해야 함!　　: $g'(x)=2f(x)$로 식 세우기!

이때 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$이므로 $f(x)$는 점 $(2,\ f(2))$에 대하여 점대칭이므로 $\frac{k}{2}=2$에서 $k=4$이다.

따라서 $f(x)$는 $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로
$f(2k)=192\ (=f(8))$이다.

$\therefore\ 192$

16

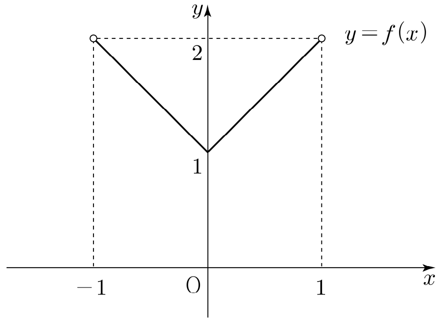
정답 ③

Step 1 **함수 $y=f(x)$의 그래프 및 a의 값의 부호 판단**

함수

$$f(x)=\begin{cases} |x|+1 & (|x|<1) \\ a|x|-a+2 & (|x|\ge 1) \end{cases}$$

의 그래프를 그리기 위해서 구간에 따라 범위를 나누어 생각하자.
$|x|<1$일 때, $f(x)=|x|+1$이므로 이 구간에서의 그래프는 쉽게 그릴 수 있다.

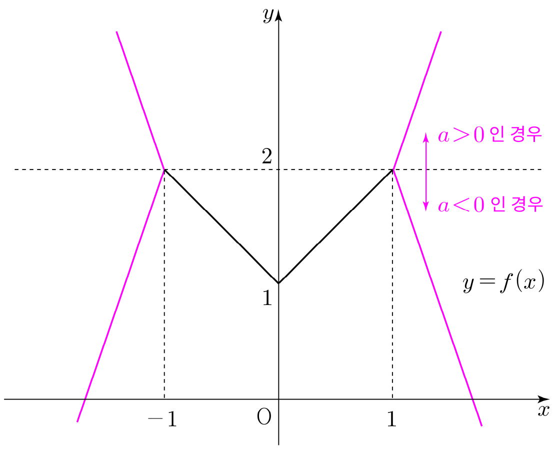


$|x| \geq 1$일 때,

$$f(x) = a|x| - a + 2$$
$$= a(|x| - 1) + 2$$

: a의 값에 관계없이 $f(1) = 2$이므로 연속성은 보장!

이므로 $|x| \geq 1$에서의 함수 $y = f(x)$의 그래프는 a의 값의 부호에 따라 달라진다. ($a = 0$인 경우는 조건이 성립하지 않음을 어렵지 않게 발견할 수 있으므로 해설에서 따로 다루진 않는다.)

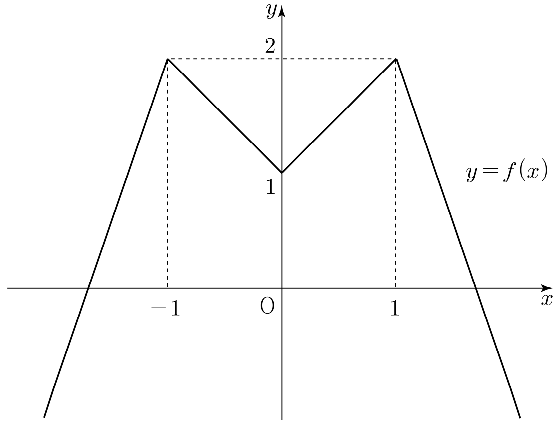


이때 함수

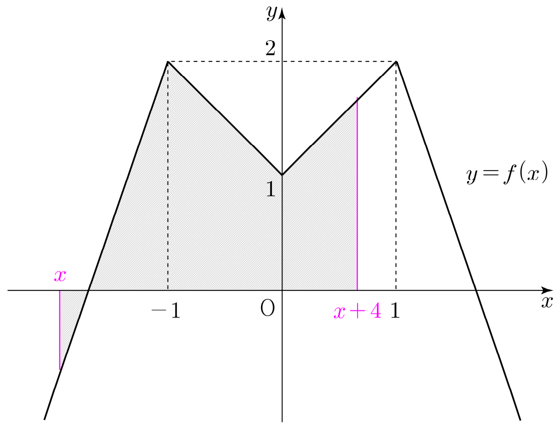
$$g(x) = \int_x^{x+4} f(t)\,dt$$

: 길이가 4인 구간을 움직여가며 f 적분 값 관찰!

에 대하여 $g(x_1) \times g(x_2) \leq 0$을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재해야 하므로 $g(x)$의 함숫값이 음수인 구간이 존재해야 한다. 즉, $\int_x^{x+4} f(t)\,dt < 0$인 순간이 존재해야 하므로 a의 값은 $a < 0$이어야 한다. ($a > 0$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로 항상 $\int_x^{x+4} f(t)\,dt > 0$이 성립함!)



Step 2 $g(x_1) \times g(x_2) \leq 0$**인** x_1**,** x_2**가 존재한다.**



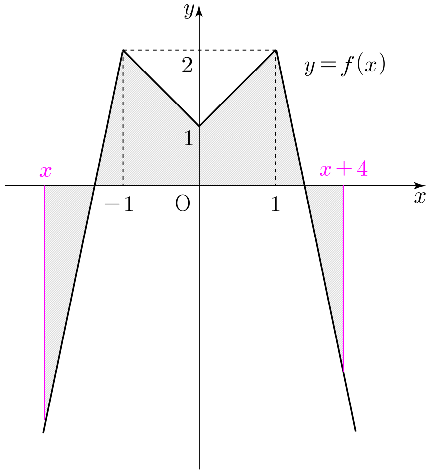
$g(x_1) \times g(x_2) \leq 0$을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재하기 위한 조건에 대하여 살펴보자.

[Step 1]에서 $a < 0$이므로 $g(x) = \int_x^{x+4} f(t)\,dt$의 값이 음수인 구간은 반드시 존재한다. 하지만, $g(x)$의 함숫값이 음수인 구간이 존재한다고 해서

$$g(x_1) \times g(x_2) \leq 0$$: 곱해서 음수일려면?
하나는 양수! 하나는 음수!

을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 항상 존재한다고 볼 수 있을까? 그렇지 않다. 당연한 이야기겠지만, $g(x)$의 함숫값이 양수인 구간도 존재해야 한다.

$f(x) > 0$인 구간이 있으므로 $g(x)$의 함숫값이 양수인 구간이 항상 존재한다고 착각하지 말자. $f(x) > 0$인 부분을 다 포함하여 적분하더라도 $f(x) < 0$인 부분의 영향으로 $g(x)$의 함숫값이 음수가 나올 수도 있다.



: $f(x)<0$ 인 부분의 넓이가 $f(x)>0$ 인 부분의 넓이보다 크면
$g(x)$ 는 음수!

즉,

$f(x)<0$ 인 부분의 넓이를 최소로 잡아주고,
$f(x)>0$ 인 부분의 넓이를 최대로 잡아준 상황에서

$g(x)\geq 0$ ($\Leftrightarrow$ $g(x)<0$ 이면 안됨!)이 성립해야 한다. 이러한 상황은 $f(x)$ 를 -2 부터 2 까지 적분하는 상황이므로

$$g(-2)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \geq 0$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} + \int_{1}^{2}(ax-a+2)\,dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\geq -7$$

따라서 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는 $-7\leq a<0$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개다.

$\therefore\ 7$

17

정답 ②

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

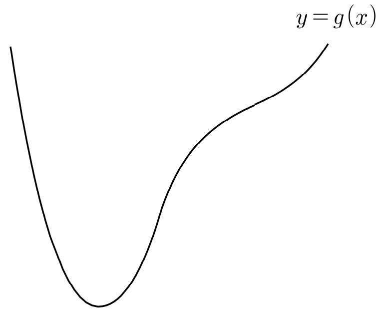
$$g(x)=\int_{k}^{x} f(t)\,dt$$: 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 사차함수!

로 두면 $g'(x)=f(x)$, $g(k)=0$ 임을 알 수 있다.

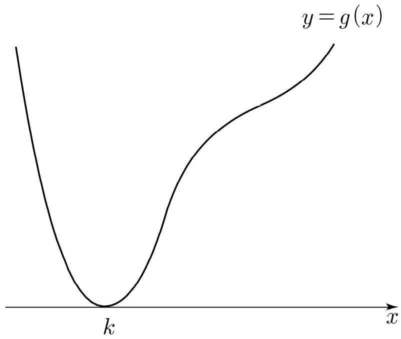
$x\neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 을 만족시키는 k 가 존재하지 않는 상황을 찾기 위해 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 개형에 따라 케이스를 분류해보자.

Step 1 **케이스 분류를 통한 그래프 개형 관찰**

(1) $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖는 경우

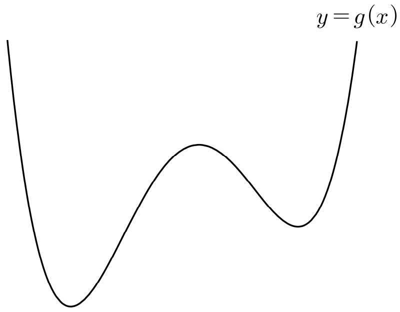


함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖는다면
$x\neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 을 만족시키는
k 가 존재하게 된다.

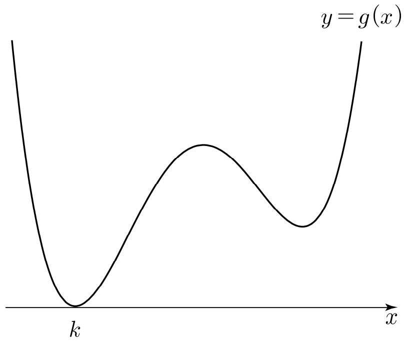


$x=k$ 에서 최솟값을 가지면 $x\neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 임!

(2) $g(x)$ 가 서로 다른 세 극값을 갖는 경우

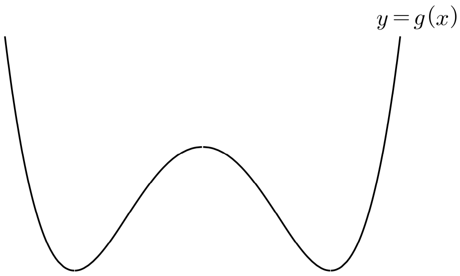


함수 $g(x)$ 가 서로 다른 세 극값을 갖는다면 (1)과 마찬가지로, $x \neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 을 만족시키는 k 가 존재하게 된다.

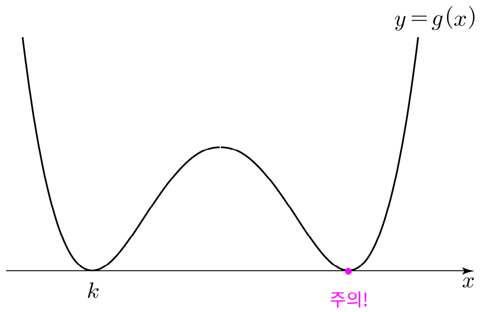


$x=k$ 에서 최솟값을 가지면 $x \neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 임!

(3) $g(x)$ 가 동일한 극솟값을 갖는 경우



함수 $g(x)$ 가 동일한 극솟값을 갖는다면 $x \neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 을 만족시키는 k 가 존재하지 않는다. (그림 참고!)



$x=k$ 에서 최솟값을 가져도 $x \neq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 이 성립하지 않음. (또 다른 점에서 동일한 최솟값을 가지므로)

Step 2 100 이하의 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수

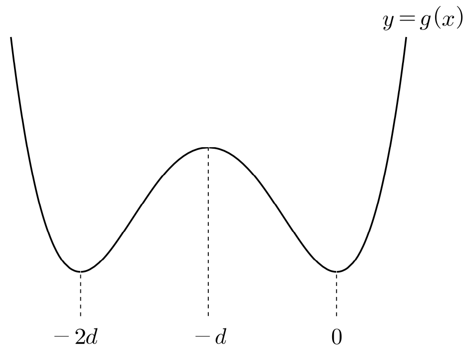
도함수 $g'(x)$ 를 관찰하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) \\ &= x(x^2+ax+b) \end{aligned}$$

이므로 $g'(x)=0$ 은 $x=0$ 을 근으로 갖고, 방정식

$$x^2+ax+b=0$$

도 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이때 a, b 가 모두 자연수이므로 두 근은 모두 음수이고, 사차함수의 대칭성을 활용하여 두 근을 각각 $-d$, $-2d$ $(d>0)$ 으로 두자.



근과 계수와의 관계에 의해 $a=3d$, $b=2d^2$
100 이하의 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍은

$$(a, b) = \underset{d=1}{\underline{(3, 2)}},\ \underset{d=2}{\underline{(6, 8)}},\ \cdots,\ \underset{d=7}{\underline{(21, 98)}}$$

이므로 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 7 개다.

$\therefore\ 7$

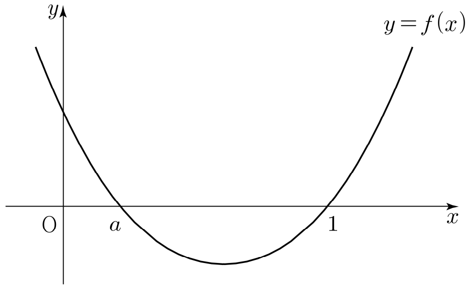
18

정답 40

함수 $f(x)$ 는

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-(a+1)x+a \\ &= (x-a)(x-1) \end{aligned}$$

이고, $0<a<1$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = kx + \int_0^x (xt - t^2) f(t)\, dt$ 가 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖는다를 활용하기 위해 이 함수를 미분하면

$$y = kx + x\int_0^x tf(t)\, dt - \int_0^x t^2 f(t)\, dt \qquad \cdots \text{㉠}$$

⤸ 미분하기 전에 $\int_0^x$ 안의 식 전개 후, 미분!

$$\to \ y' = k + \int_0^x tf(t)\, dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$$

$$\to \ y' = k + \int_0^x tf(t)\, dt$$

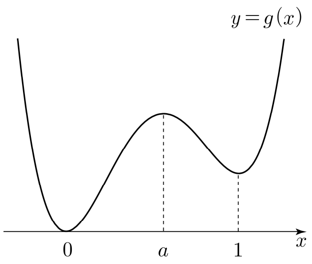
함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_0^x tf(t)\, dt$ 로 두면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 사차함수이고, ㉠이 역함수를 갖기 위해선 모든 실수 x 에 대하여

$$k + \int_0^x tf(t)\, dt \ge 0 \ \Leftrightarrow \ g(x) + k \ge 0$$

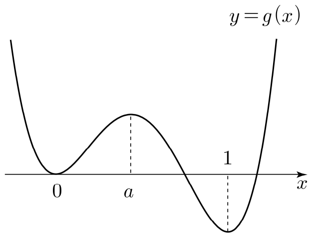
$g(x)$ 를 미분하면

$$g'(x) = xf(x) \ \to \ g'(x) = x(x-a)(x-1)$$

이고, $g(0) = 0$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



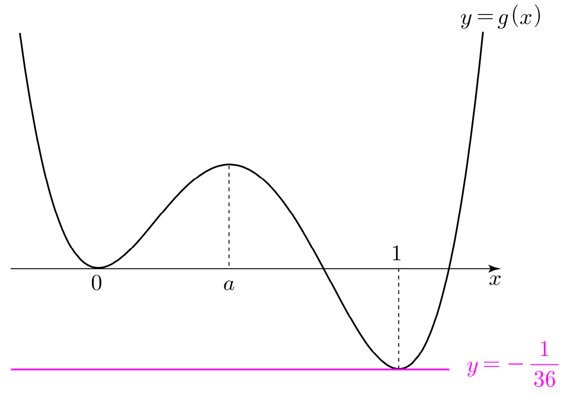
$x = 0$ 에서 최솟값을 갖는 경우



$x = 1$ 에서 최솟값을 갖는 경우

이때 부등식 $g(x) + k \ge 0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 $\frac{1}{36}$ 이려면 $g(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{36}$ 이어야 한다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{36}$ 을 갖는다.



$$g(1) = -\frac{1}{36} \ \to \ \int_0^1 xf(x)\, dx = -\frac{1}{36}$$

을 계산하면 $a = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는

$f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$ 이므로 $f(7) = 40$ 이다.

$\therefore \ 40$

19

정답 8

Step 1 **방정식 $\int_x^{x+1} f(t)\, dt = \int_{x+1}^x |f(t)|\, dt$ 변형**

주어진 방정식의 형태를 변형하면

$$\int_x^{x+1} f(t)\, dt = \int_{x+1}^x |f(t)|\, dt$$

$$\Leftrightarrow \ \int_x^{x+1} f(t)\, dt - \int_{x+1}^x |f(t)|\, dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \int_x^{x+1} f(t)\, dt + \int_x^{x+1} |f(t)|\, dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \int_x^{x+1} \{f(t) + |f(t)|\}\, dt = 0$$

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) + |f(x)|$ 로 두면 방정식

$$\int_x^{x+1} g(t)\, dt = 0$$

의 음이 아닌 실근이 $x = 0,\ 3$ 뿐이라는 조건으로 해석할 수 있다.

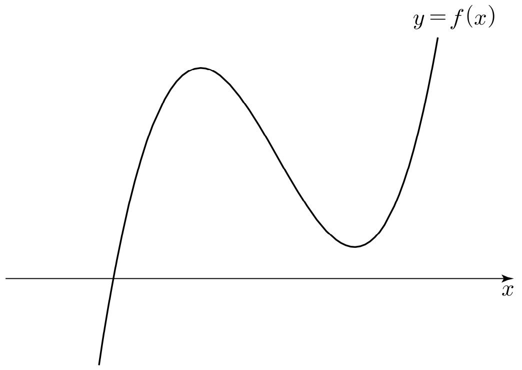
Step 2 **함수 $y=g(x)$ 의 그래프 개형 추론**

함수 $g(x)$ 는

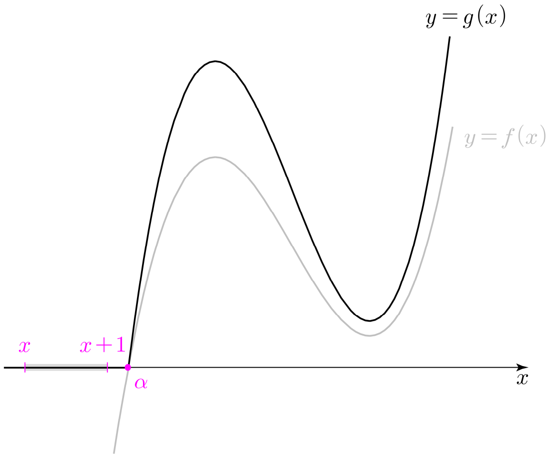
$$g(x)=f(x)+|f(x)|$$
$$=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\geq 0$ 이다. 즉, 방정식 $\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)\,dt=0$ 의 실근은 $g(x)=0$ 인 구간 안에서 발생한다는 사실을 알 수 있다. 지금부터는 $y=f(x)$ 의 그래프 개형에 따라 케이스를 분류하여 판단해보자.

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만난다면?

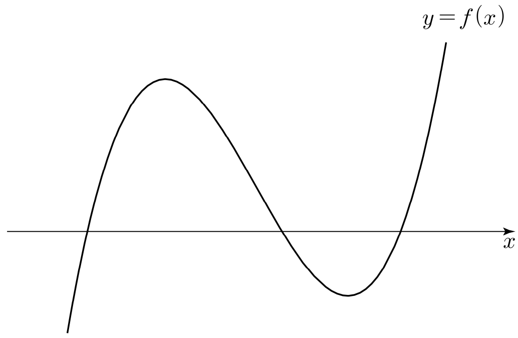


위의 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 양수라면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

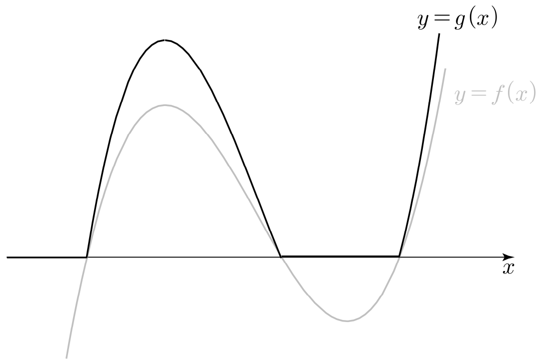


방정식 $f(x)=0$ 의 실근을 α 로 두면 방정식 $\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)\,dt=0$ 의 실근은 $x\leq\alpha-1$ 이므로 α 의 값이 어떻게 설정된다고 하더라도 음이 아닌 실근이 $x=0,\ 3$ 뿐일 수 없다. (극댓값이 음수이면서 x 축과 한 점에서 만나는 경우를 따져봐도 성립하지 않음을 알 수 있음!)

(2) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점에서 만난다면?



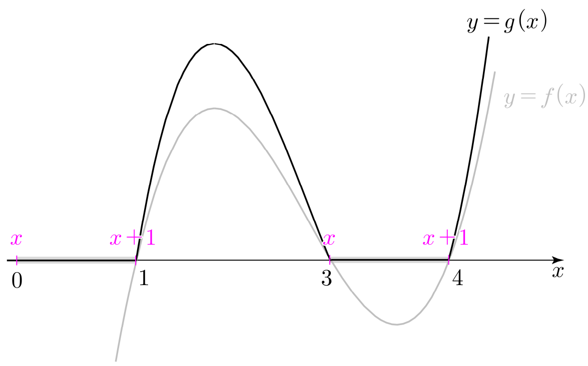
위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만난다면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이 경우에서 방정식 $\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)\,dt=0$ 의 음이 아닌 실근이 $x=0,$ 3 뿐이기 위한 상황을 알아보자.

$x=0$ 은 실근이지만, 충분히 작은 임의의 양수(0 의 우극한 느낌으로 이해해도 좋다!)는 방정식의 실근일 수 없고,

$x=3$ 은 실근이지만, 3 보다 아주 살짝 크거나 작은 임의의 양수는 방정식의 실근일 수 없으므로 가능한 상황은 다음과 같이 추려진다.



따라서 $f(x)$ 는 $f(x)=(x-1)(x-3)(x-4)$ 이므로 $f(5)=8$ 이다.

$\therefore\ 8$

20

정답 17

Step 1 함수 $h(x)=\int_0^x \{f(s)-f(x)\}ds$ 관찰

함수 $h(x)$를 $h(x)=\int_0^x \{f(s)-f(x)\}ds$로 두면

$$\int_0^x \{f(s)-f(x)\}ds=2x+t \quad \Leftrightarrow \quad h(x)=2x+t$$

이므로 방정식 $\int_0^x \{f(s)-f(x)\}ds=2x+t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=2x+t$와 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

함수 $y=h(x)$의 그래프 개형을 추론하기 위해

$$h(x)=\int_0^x \{f(s)-f(x)\}ds$$

⤸ 미분하기 전에 $\int_0^x$ 안의 식 분리 및 정리!

$$=\int_0^x f(s)\,ds-xf(x)$$

를 미분하면 $h'(x)=-xf'(x)$이다.

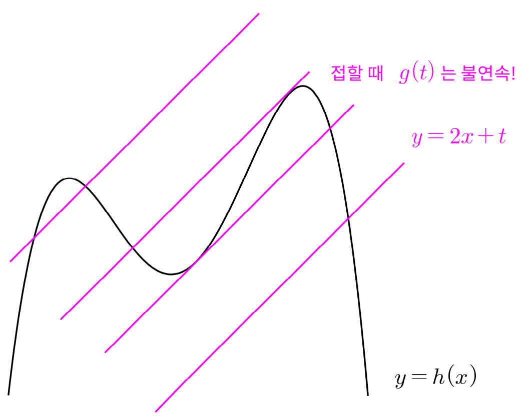
이때 $f(x)$가 최고차항의 계수가 $\frac{4}{3}$인 삼차함수이므로 $h(x)$의 최고차항의 차수 및 계수를 판단해보면

$$h'(x)=-4x^3+\cdots \quad \rightarrow \quad h(x)=-x^4+\cdots$$

임을 알 수 있다.

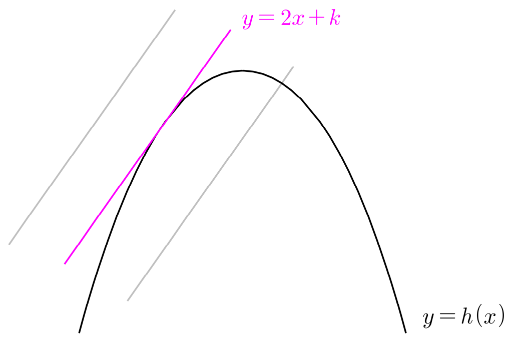
Step 2 $g(t)$는 $t=k$에서만 불연속이다.

방정식 $h(x)=2x+t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$에 대하여 $g(t)$가 $t=k$에서만 불연속인 상황에 대해 살펴보자.



위의 그림과 같이 함수 $h(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다면 $g(t)$의 불연속점의 개수는 1이 될 수 없으므로 $h(x)$는 극댓값만 가져야 한다.

(1) $h(x)$가 극댓값만 가지면서 기울기가 2인 직선과 한 점에서만 접하는 경우



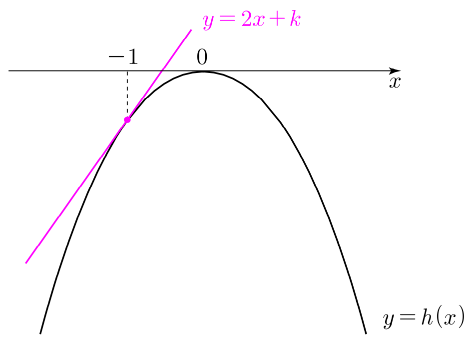
위의 그림과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프가 기울기가 2인 직선과 한 점에서만 접하면 이 순간에서 불연속이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=2x+k$와 접한다.

이때 함수 $h(x)$는

$$h(0)=0, \quad h'(0)=0$$

$$(\because\ h(x)=\int_0^x f(s)dx-xf(x),\ h'(x)=-xf'(x))$$

이고, $f'(-1)=2$에서 $h'(-1)=2\ (=f'(-1))$이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0을 갖고, 직선 $y=2x+k$와 접하는 점의 x좌표는 -1이다.



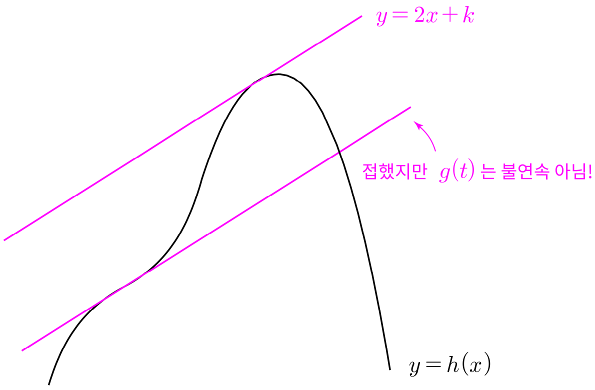
추가로 제시된 $f'\left(-\frac{2}{3}\right)>3$ 조건을 활용해보자.

$f'\left(-\frac{2}{3}\right)>3$이므로 $h'\left(-\frac{2}{3}\right)\left(=\frac{2}{3}f'\left(-\frac{2}{3}\right)\right)>2$임을 알 수 있지만, 열린구간 $-1<x<0$에서 $h'(x)$는 감소하므로

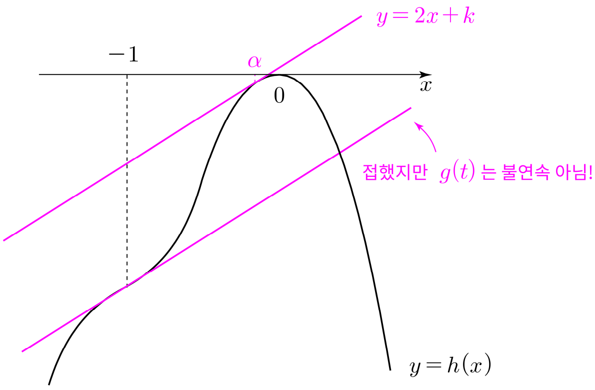
$$h'(-1)>h'\left(-\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad h'\left(-\frac{2}{3}\right)<2$$

이므로 모순!

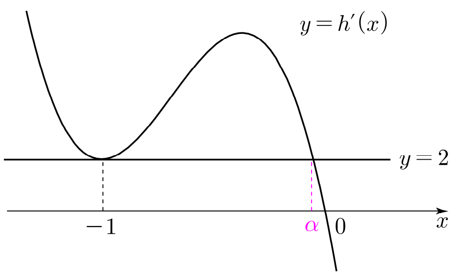
(2) $h(x)$ 가 극댓값만 가지면서
기울기가 2 인 직선과 두 점에서 접하는 경우 (정답상황!)



$h'(-1)=2$, $h'\left(-\dfrac{2}{3}\right)>2$ 이므로 접하는 두 직선 중 접점의 x 좌표가 더 작은 점의 x 좌표가 -1 이어야 한다.



접점의 x 좌표 중 -1 이 아닌 값을 α 로 두면
함수 $y=h'(x)$ $(=-xf'(x))$ 의 그래프는 다음과 같다.



즉, 함수 $h'(x)$ 를

$$h'(x)=-4(x+1)^2(x-\alpha)+2$$

로 두면 $h'(0)=0$ 이므로 대입해서 계산하면 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

(1), (2)에 의해

$$h'(x)=-4(x+1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)+2$$

$$\rightarrow\ h(x)=-x^4-\frac{10}{3}x^3-4x^2$$

k 의 값을 구하기 위해 $y=h(x)$ 의 그래프 위의
점 $\left(-\dfrac{1}{2},\ h\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)+h\left(-\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\ y=2x+\frac{17}{48}\ (=k)$$

이므로 $k=\dfrac{17}{48}$ 이다. 따라서 $48k=17$ 이다.

$\therefore\ 17$

21

정답 ②

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)+f(-x)=x^2+4$$

를 만족시킨다. 이때 함수 $f(-x)$ 는

$f(-x)$: $f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭시킨 것!

이므로 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx&=\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{1}(x^2+4)\,dx\\&=\frac{26}{3}\end{aligned}$$

이므로 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{13}{3}$ 이다. $\left(\because \displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(-x)\,dx\right)$

$\therefore\ \dfrac{13}{3}$

22

정답 ④

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_0^x f(t)\,dt = f(0)$$

의 값이 수렴하려면 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ … ㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 1}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x-1}$$

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}$$

$$=g'(1)$$

이때 $g'(1)=f(1)$ 이므로 $(\because\ g'(x)=f(x))$ $f(1)=f(0)$ … ㉡

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x}$$

$$h(x)=\int_0^x tf(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}$$

$$=h'(0)$$

이때 $h'(0)=0$ 이므로 $(\because\ h'(x)=xf(x))$ $f(1)=0$ … ㉢

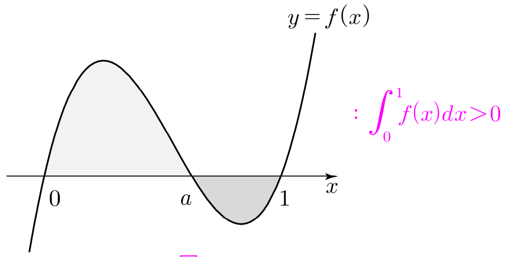
㉡, ㉢에 의해 $f(x)$ 를 $f(x)=x(x-1)(x-a)$ 로 두자.

㉠에 의해

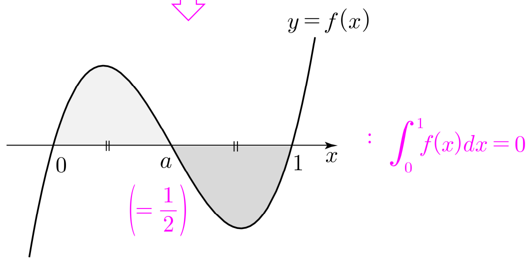
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \ \rightarrow\ \int_0^1 x(x-1)(x-a)\,dx = 0$$

$$\rightarrow\ a=\frac{1}{2}$$

직접 적분해서 구해도 되지만, 대칭성으로 구해줄 수도 있다!
(그림 참고)



$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ 의 값이 0 이려면 대칭!



따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$f(3)=15$ 이다.

$\therefore\ 15$

23

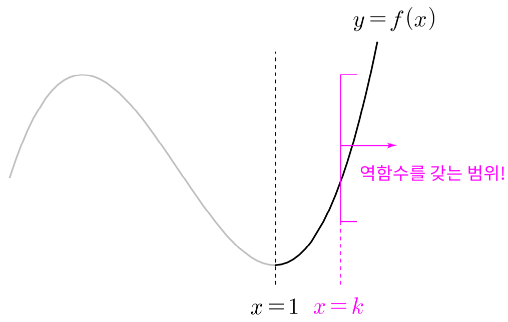
정답 ①

$\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = b$ 로 두면 함수

$$f(x)=4x^3-3x^2\int_0^a f(t)\,dt+1$$

$$=4x^3-3bx^2+1$$

가 구간 $[k,\infty)$ 에서 역함수를 갖도록 하는 실수 k 의 최솟값이 1 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.



즉, $f'(1)=0$ 이므로 대입해서 계산하면

$$f'(1)=0 \quad \rightarrow \quad b=2$$

이때 함수 $f(x)$는 $f(x)=4x^3-6x^2+1$ 이고,

$$\int_0^a f(t)\,dt = 2\,(=b)$$

를 만족시키는 a의 값을 구하기 위해 정적분을 계산하면

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,dt &= \left[x^4-2x^3+x\right]_0^a \\ &= a^4-2a^3+a\end{aligned}$$

이므로 $a^4-2a^3+a=2 \quad \rightarrow \quad (a-2)(a^3+1)=0$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 $a=-1,\ 2$ 이므로
모든 a의 값의 합은 1 이다.

$\therefore\ 1$

24

정답 ③

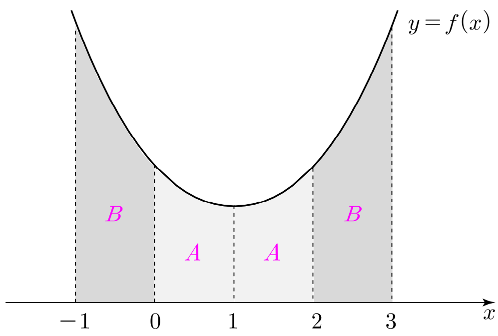
이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(1+x)=f(1-x)\ \text{ : } x=1\text{에 대하여 선대칭!}$$

를 만족시키므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx = A$$
$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx = B$$

로 두자.



조건 (나)에서 제시된 각각의 정적분을 A, B로 표현해보면

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A\,,$$
$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = B\,,$$
$$\int_0^3 f(x)\,dx = 2A+B$$

이므로

$$A\,,\ \ B\,,\ \ 2A+B$$

가 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
등비중항 성질에 의해 $B^2=A(2A+B)$ 이고,

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 1 \quad \rightarrow \quad A=1$$

이므로

$$\begin{aligned}B^2=A(2A+B) \quad &\rightarrow \quad B^2=B+2 \\ &\rightarrow \quad B=-1,\ 2\end{aligned}$$

이때 $B=-1$ 이면

$$A\,,\ \ B\,,\ \ 2A+B \quad \rightarrow \quad 1,\ \ -1,\ \ 1$$

이므로 공비가 음수(-1)인 등비수열을 이루게 되어 모순!

즉, $B=2$ 이므로 $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = 2$ 이다.

함수 $f(x)$를

$$f(x)=a(x-1)^2+b\ \text{ : } x=1\text{에 대하여 선대칭!}$$

으로 두면

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 1 \;\rightarrow\; \frac{a}{3}+b=1 \qquad \cdots ㉠$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 2 \;\rightarrow\; \frac{7}{3}a+b=2 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{6}$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{6}$ 이므로 $f(3)=\frac{17}{6}$ 이다.

$\therefore\ \frac{17}{6}$

25

정답 ①

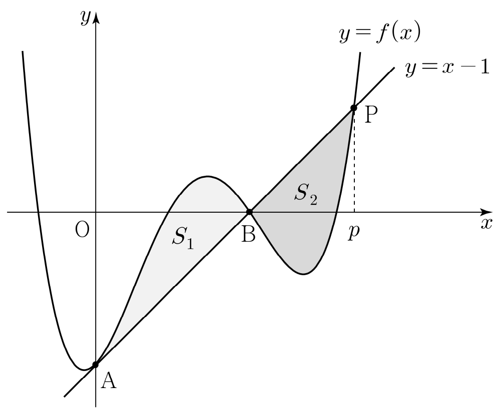
함수 $f(x)$에 대하여

$f(0)=-1,\ \ f(1)=0,\ \ f'(0)=1$

두 점을 지나는 직선의 기울기가 1 !

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선이 점 $(1, f(1))$를 지난다는 사실을 알 수 있다.

두 점 $A(0, -1)$, $B(1, 0)$에 대하여 직선 AB는 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점 A, B, P에서 만나고, 점 P의 x좌표가 1보다 크므로 상황을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



점 P의 좌표를 $P(p, f(p))$로 두면

$$f(x)-(x-1)=x^2(x-1)(x-p)$$

: 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$는 $x=0$에서 접하고, $x=1$, p를 지나감!

S_1, S_2를 구해보면

$$S_1=\int_0^1 \{f(x)-(x-1)\}\,dx$$

$$S_2=\int_1^p \{(x-1)-f(x)\}\,dx$$

이므로

$$S_1=S_2 \;\rightarrow\; \int_0^p \{f(x)-(x-1)\}\,dx=0$$

$$\rightarrow\; \int_0^p x^2(x-1)(x-p)\,dx=0$$

$$\rightarrow\; p=\frac{5}{3}$$ (적분 계산 생략!)

따라서 $f(x)$는 $f(x)=x^2(x-1)\left(x-\frac{5}{3}\right)+(x-1)$이므로 $f(3)=26$이다.

$\therefore\ 26$

26

정답 ④

함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_4^x \{f(t)+1\}\,dt+\int_x^2 |f(t)|\,dt+7$$

로 두면 $g(x)$는 $g(x)=|h(x)|$이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$h(x)=0$인 모든 점에서 $h'(x)=0$

이 성립해야 한다.

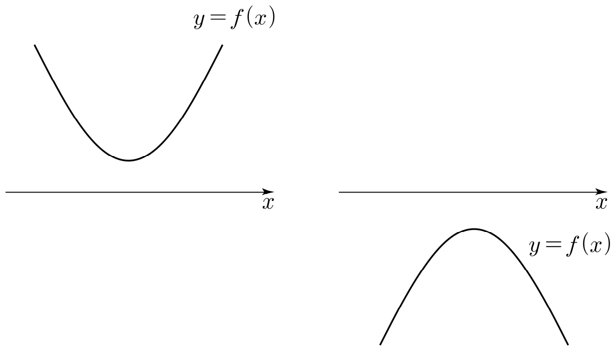
Step 1 도함수 $h'(x)$의 그래프 개형 관찰

함수 $h(x)$의 그래프 개형을 판단해보기 위해 $h(x)$를 미분하면

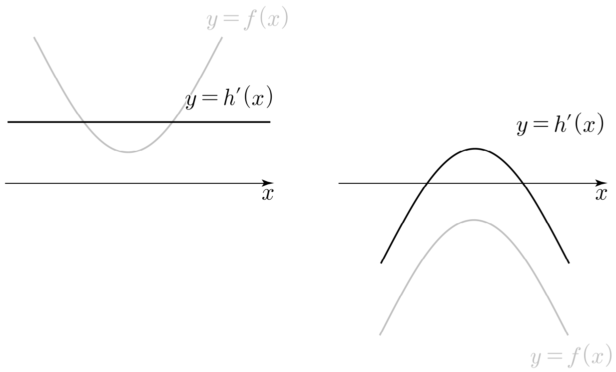
$$h'(x)=f(x)+1-|f(x)| = \begin{cases} 1 & (f(x)\ge 0) \\ 2f(x)+1 & (f(x)<0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$의 그래프 개형에 따라 케이스를 분류해보자.

(1) $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는다면?



$f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 각각의 상황에서 $y=h'(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

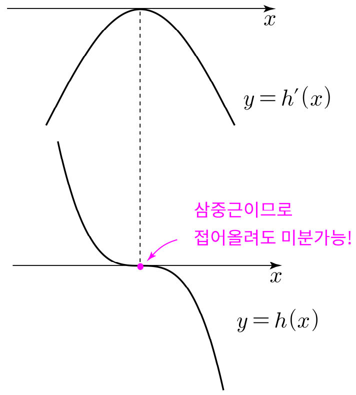


만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수라면, 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x)>0$ 이므로 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 그러므로 $h(x)=0$ 의 실근은 반드시 존재하지만, $h(x)=0$ 인 점에서 $h'(x)=0$ 를 만족시킬 수 없으므로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이고, $y=h'(x)$ 의 그래프의 그래프가 위와 같이 x 축과 두 점에서 만난다면 $h(x)$ 는 극대, 극소를 모두 가지므로 $y=h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

이때 x 축과의 위치 관계를 고려해보면 x 축이 어떻게 위치해도 $g(x)=|h(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이고, $g(x)=|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $y=h'(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 x 축과 접해야 한다.



이때 $h'(x)$ 가 x 축과 접하려면 $h'(x)=2f(x)+1$ 의 최댓값이 0 이어야 하므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$ 이어야 한다. 이때 $f(2)=-\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 를

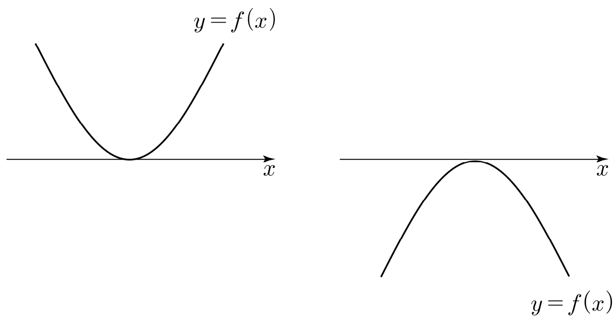
$$f(x)=a(x-2)^2-\frac{1}{2}$$

로 두자. 또한, $g(x)=|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

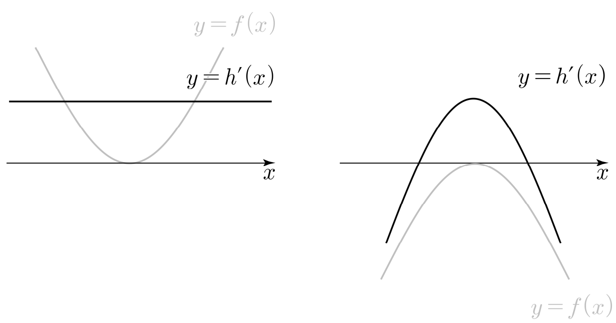
$$g(2)=0 \quad \rightarrow \quad \int_4^2 \{f(t)+1\}\,dt=-7$$

이어야 한다. (계산은 나중에!)

(2) $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만난다면?



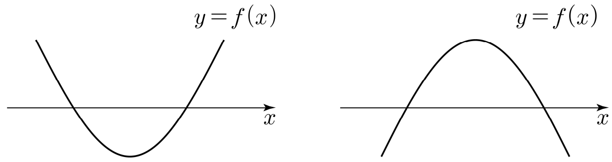
$f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나는 각각의 상황에서 $y=h'(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



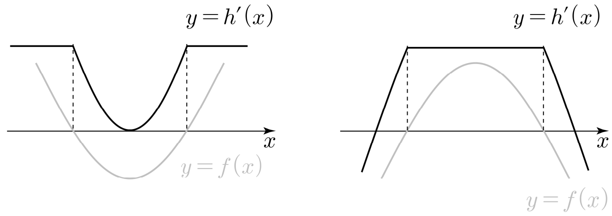
만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수라면, (1)에서와 동일한 논리로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면, $h(x)$ 는 극대, 극소를 모두 가지므로 (1)에서와 동일한 논리로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다.

(3) $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만난다면?

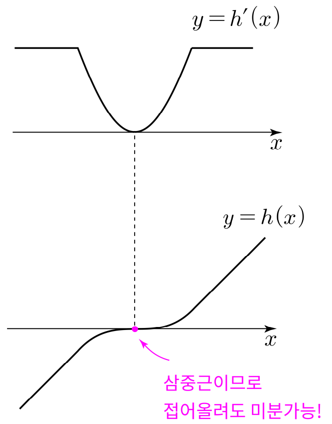


$f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나는 각각의 상황에서 $y=h'(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이고, $g(x)=|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $y=h'(x)$ 의 그래프는 위와 같이 x 축과 접해야 한다.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면, $h(x)$ 는 극대, 극소를 모두 가지므로 (1)에서와 동일한 논리로 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다.



이때 $h'(x)$ 가 x 축과 접하려면 $h'(x)=2f(x)+1$ 의 최솟값이 0 이어야 하므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이어야 한다. 이때 $f(2)=-\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 를

$$f(x)=a(x-2)^2-\frac{1}{2}$$

로 두자. 또한, $g(x)=|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$g(2)=0 \quad \rightarrow \quad \int_4^2 \{f(t)+1\}\,dt=-7$$

이어야 한다. (계산은 나중에!)

Step 2 식 계산을 통한 $f(x)$ 결정

[Step 1]의 (1), (2), (3)에 의해 조건을 만족시키는 $f(x)$ 는

$$f(x)=a(x-2)^2-\frac{1}{2} \quad \leftarrow \; a<0 \text{ 이면 (1) 케이스!}$$

$$a>0 \text{ 이면 (3) 케이스!}$$

이면서 $\int_4^2 \{f(t)+1\}\,dt=-7$을 만족시켜야 한다.

대입해서 계산해보면

$$\int_4^2 \{f(t)+1\}\,dt=-7 \quad \rightarrow \quad \int_2^4 \left\{a(x-2)^2+\frac{1}{2}\right\}dt=7$$

$$\rightarrow \quad \left[\frac{a}{3}(x-2)^3+\frac{1}{2}x\right]_2^4=7$$

$$\rightarrow \quad a=\frac{9}{4}$$

따라서 $f(x)$ 는 $f(x)=\frac{9}{4}(x-2)^2-\frac{1}{2}$ 이므로 $f(1)=\frac{7}{4}$ 이다.

$\therefore \; \frac{7}{4}$

27

정답 ⑤

최고차항의 계수가 4 인 삼차함수 $f(x)$ 와 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\int_k^x f(t)\,dt \times \int_0^k f(t)\,dt \le 0$$

이 성립하기 위한 조건에 대해 살펴보자.

$\int_k^x f(t)\,dt$: 최고차항의 계수가 1 인 사차함수!

$\int_0^k f(t)\,dt$: 상수!

이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$\underbrace{\int_k^x f(t)\,dt}_{\text{사차함수!}} \times \underbrace{\int_0^k f(t)\,dt}_{\text{어떤 상수 값!}} \le 0$$

이려면

$$\int_0^k f(t)\,dt \le 0\,,\quad \int_k^x f(t)\,dt \ge 0$$

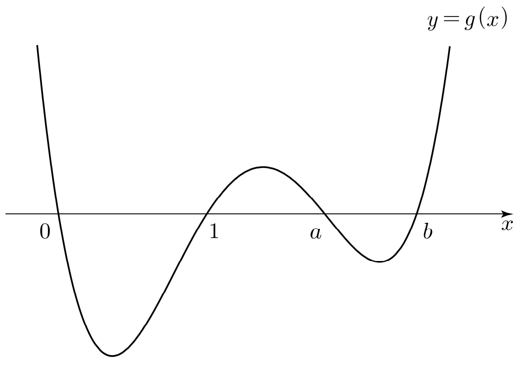
인 상황이어야 한다. 또한, 만약 $\int_0^k f(t)\,dt = 0$ 이면 부등식이 항상 성립한다는 사실도 알 수 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_k^x f(t)\,dt \;\leftarrow\; g(k) = 0$$

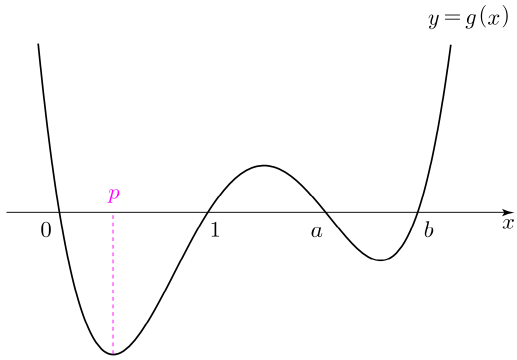
로 두고, $g(x)$ 의 그래프 개형에 따라 케이스를 분류하자.

$\left(\int_0^k f(t)\,dt = -g(0)\right)$

(1) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 네 점에서 만난다면?



위의 그림과 같이 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 네 점에서 만나면 $g(k) = 0$ 이므로 만나는 점의 x 좌표가 k 의 후보가 된다. 즉, $g(x)$ 는 $x = 0,\ 1,\ a,\ b$ 에서 x 축과 만난다.



이때 $g(x)$ 가 최솟값을 갖는 x 좌표를 p 로 두면 $k = p$ 일 때,

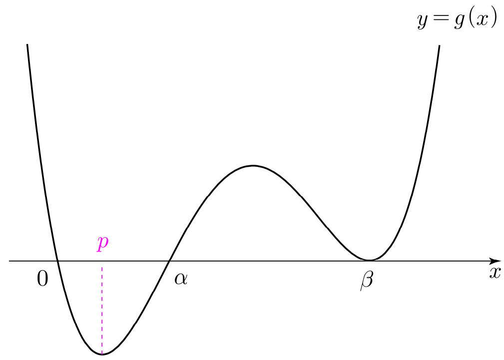
$$\int_p^x f(t)\,dt \times \int_0^p f(t)\,dt \le 0$$

$$\int_0^p f(t)\,dt < 0$$

$$\Leftrightarrow\ \int_p^x f(t)\,dt \ge 0$$

이므로 부등식을 만족시킨다. 그러므로 가능한 k 의 값이 5 개가 될 수 있으므로 모순!

(2) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점에서 만난다면?

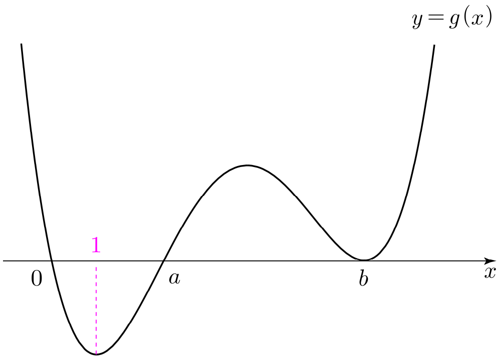


위의 그림과 같이 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점에서 만나면 $g(k) = 0$ 이므로 만나는 점의 x 좌표가 k 의 후보가 된다.

또한, $g(x)$ 가 최솟값을 갖는 x 좌표를 p 로 두면 $k = p$ 일 때도, 부등식이 성립함을 확인했으므로 가능한 k 의 값은 총 4 개가 된다. 이때 k 의 값을 정리해보면

$$k = 0,\ \ 1,\ \ a,\ \ b\quad (1 < a < b)$$

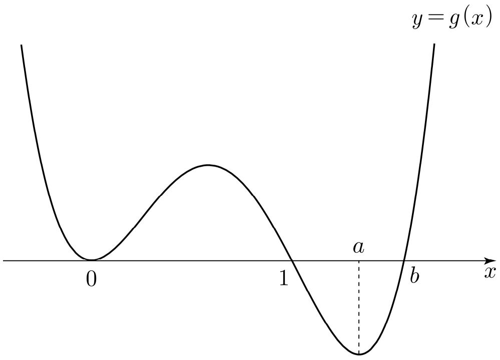
이므로 대소 관계에 의해 $p = 1$ 임을 알 수 있다.



하지만, $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 최솟값을 가지면

$$g'(1)=0 \;\rightarrow\; f(1)=0$$

이므로 $f(1)=-5$ 이라는 조건에 모순!
즉, 최솟값을 갖는 x 좌표가 1 일 수 없으므로 가능한 그래프는 다음과 같다.



$g(x)$ 의 식을 작성하면

$$g(x) = x^2(x-1)(x-b)$$

미분!

$$\rightarrow\; f(x) = 2x(x-1)(x-b)+x^2(x-b)+x^2(x-1)$$

이므로 $f(1)=-5$ 에서 $b=6$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{-1} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx \\ &= -g(-1)+g(2) \\ &= -30\end{aligned}$$

이다.

$\therefore\; -30$

28

정답 110

Step 1 상수 k 의 값 구하기

함수

$$g(x)=x\int_0^x f(t)\,dt - k\int_0^x tf(t)\,dt$$

를 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t)\,dt + (1-k)xf(x)$$

: $\int_0^x f(t)\,dt$ 는 사차함수, $(1-k)xf(x)$ 도 사차함수!

이때 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값이 6 뿐이므로 $g'(x)$ 는 사차함수일 수 없다.

* Remark ($g'(x)$ 가 왜 사차함수일 수 없나요?)
$g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값이 6 뿐이므로 $g'(x)$ 는 $(x-6)$ 인수를 1, 3, 5 개 등 홀수 개수만큼 갖고 있어야 한다. 또한 6 이 아닌 실수 a 에 대하여 $(x-a)$ 인수는 0 개, 2 개, 4 개 등 짝수 개수만큼 갖고 있어야 하는데,

$(x-6)$: 홀수 개 & $(x-a)$ 인수 : 짝수 개

를 갖는 사차함수는 존재할 수 없다. (합쳐서 인수가 4 개여야 함!)
(또는 사차함수가 안되는 상황을 그래프로 판단해봐도 좋다!)

$g'(x)$ 에서

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{4}x^4 + \cdots\,,$$
$$(1-k)xf(x) = (1-k)x^4 + \cdots$$

이므로 $g'(x)$ 가 삼차함수이려면 (사차함수가 아니기에!)

$$\frac{1}{4}+(1-k)=0 \;\rightarrow\; k=\frac{5}{4}$$

이다.

Step 2 계수 비교를 통한 $f(x)$ 식 세우기

함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 로 두면

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{4}xf(x) \\ &= \frac{1}{12}ax^3+\frac{1}{4}bx^2+\frac{3}{4}cx \qquad \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

이다. 이때 $g'(0)=0$ 이고, $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의

값이 6 뿐이므로

$$g'(x)=\frac{1}{12}ax^2(x-6) \qquad \cdots ㉡$$

: $g'(0)=0$인데, $g(x)$가 $x=0$에서 극값을 안갖기 위해선 중근!

㉠, ㉡의 계수를 비교하면 $b=-2a$, $c=0$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2-2ax$$

㉡을 부정적분하면

$$g(x)=\frac{1}{48}ax^4-\frac{1}{6}ax^3 \leftarrow$$ $g(0)=0$이므로 적분 상수 삭제!

이므로 $g(6)=9$를 대입하여 계산하면 $a=-1$
따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x$이므로
$f(4k)=110$ $(=f(5))$ 이다.

$\therefore$ 110

29

정답 848

Step 1 함수 $y=f(x)$의 그래프

조건 (가)에서

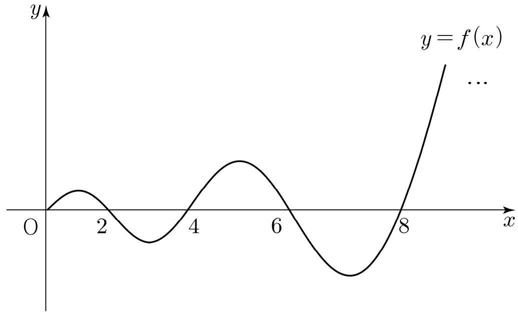
$$0\le x<2 \text{일 때, } f(x)=-3x^2+6x$$: 그래프 확정!

이고, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+2)=-2f(x)$$

: $[0,2)$에서의 그래프 그리면,
$[2,4)\rightarrow[4,6)\rightarrow[6,8)\rightarrow\cdots$ 로 계속 확장 가능!

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



구간의 길이가 2만큼 늘어날 때마다 함숫값을 (-2)배!
$x<0$인 구간은 필요하지 않아서 굳이 그리지 않음!

각각의 구간마다 함숫값이 $\times(-2)$가 된 것이므로

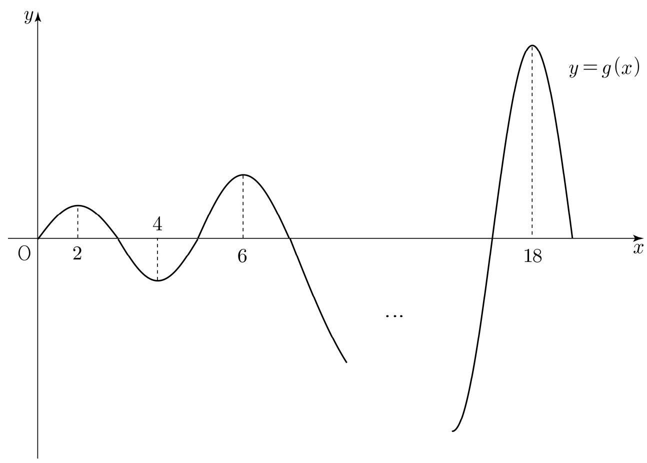
$$\int_0^2 f(x)\,dx=S \leftarrow \frac{3}{6}\times2^3=4\text{임!}$$
$$\rightarrow \int_2^4 f(x)\,dx=-2S$$
$$\rightarrow \int_4^6 f(x)\,dx=4S$$
$$\rightarrow \int_6^8 f(x)\,dx=-8S$$
$$\vdots$$

Step 2 방정식 $\int_0^x f(t)\,dt=k$의 서로 다른 실근 개수가 5

함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$로 두면

$$g'(x)=f(x),\quad g(0)=0$$

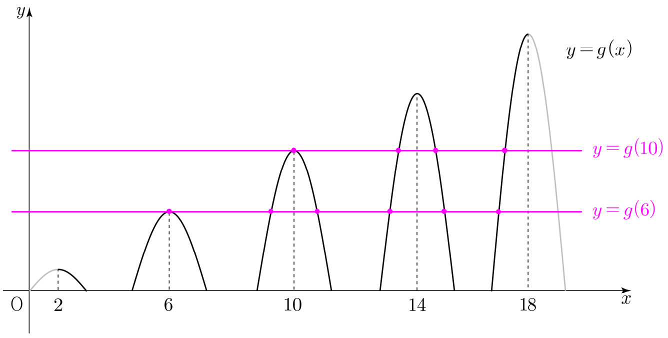
즉, 함수 $g(x)$의 도함수는 $f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 토대로 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.



방정식 $\int_0^x f(t)\,dt=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

$2<x<18$ 일 때, 직선 $y=k$ 와의 교점의 개수가 5 가 되는 상황을 살펴보자.

(1) $k>0$ 인 경우



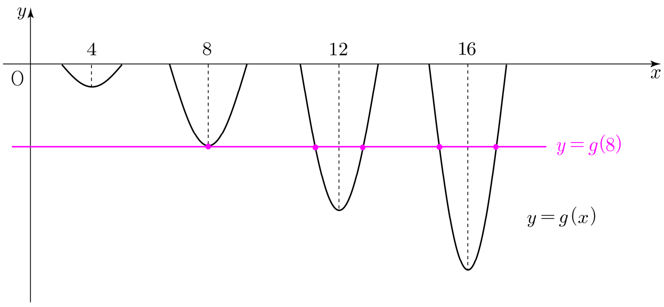
직선 $y=k$ 를 움직여가며 교점의 개수를 관찰해보면

$y=g(6)$ 일 때 : 교점 개수 6 개!
$y=g(10)$ 일 때 : 교점 개수 4 개!

이므로 교점의 개수가 5 가 되도록 하는 k 의 값의 범위는

$$g(6)<k<g(10) \;\rightarrow\; \int_0^6 f(x)\,dx < k < \int_0^{10} f(x)\,dx$$
$$\rightarrow\; 3S<k<11S$$
$$S=4$$
$$\rightarrow\; 12<k<44$$

(2) $k<0$ 인 경우



직선 $y=k$ 를 움직여가며 교점의 개수를 관찰해보면 교점의 개수가 5 가 되도록 하는 k 은

$$k=g(8) \;\rightarrow\; k=-20\,(=-5S)$$

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값은

$$\underbrace{k=13,\ 14,\ \cdots,\ 42,\ 43}_{\text{등차수열 합으로 계산!}},\ -20$$

이므로 그 합은 $\dfrac{31\times56}{2}-20=848$ 이다.

$\therefore\ 848$

30

정답 224

함수

$$g(x)=\begin{cases}\left|\displaystyle\int_a^x tf(t)\,dt\right| & (x<a)\\[2ex] \left|\displaystyle\int_{-2}^x f(t)\,dt\right| & (x\ge a)\end{cases}$$

: 구간별로 정의된 함수!

의 미분가능성을 판단할 때 다음의 3가지 사항을 모두 고려해야 한다.

① 경계인 $x=a$ 에서의 미분가능성
② $x>a$ 일 때, 절댓값 함수의 미분가능성
③ $x<a$ 일 때, 절댓값 함수의 미분가능성

먼저 경계인 $x=a$ 에서 미분가능하려면 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\left|\int_a^a tf(t)\,dt\right|=\left|\int_{-2}^a f(t)\,dt\right| \;\rightarrow\; \int_{-2}^a f(t)\,dt=0$$

또한, $x=a$ 에서 미분가능하려면 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하는데 $x=a$ 의 좌/우가 모두 절댓값 함수이므로 $x=a$ 에서의 좌/우미분계수는 0 으로 같을 수 밖에 없다.
즉, $f(a)=0$ 이어야 한다.

(좌미계) $=af(a)$, (우미계) $=f(a)$ 이므로! ($\because\ a>0$)

이제 두 함수 $p(x)$, $q(x)$ 를 각각

$$p(x)=\int_{-2}^x f(t)\,dt,\quad q(x)=\int_a^x tf(t)\,dt$$

로 두고

$x>a$ 일 때, $|p(x)|$ 의 미분가능성
$x<a$ 일 때, $|q(x)|$ 의 미분가능성

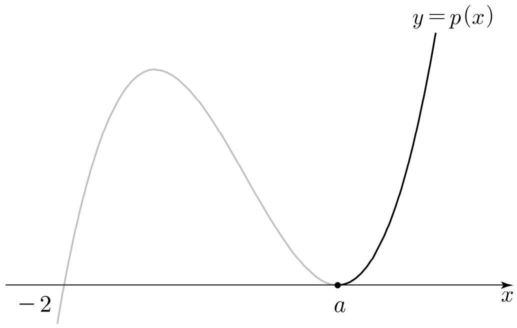
에 대해 판단해보자.

Step 1 $x>a$ 에서 함수 $|p(x)|$ 는 미분가능하다.

함수 $p(x)=\displaystyle\int_{-2}^x f(t)\,dt$ 는 삼차함수이고,

$$p(-2)=p(a)=0,\quad p'(a)=0$$

이므로 $p(x)$ 를 $p(x)=m(x+2)(x-a)^2$ 으로 두자.
이때 $a>0$ 이고, 일반성을 잃지 않기 위해 $m>0$ 인 상황에서 $y=p(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



이때 $x>a$ 에서 $g(x)=|p(x)|$ 의 미분가능성은 보장된다는 사실을 알 수 있다.

Step 2 **$x<a$ 에서 함수 $|q(x)|$ 는 미분가능하다.**

함수 $q(x)=\int_a^x tf(t)\,dt$ 는 사차함수이고,

$$q(a)=0,\quad q'(a)=q'(0)=0$$

임을 알 수 있다. 이때 주어진 조건에 의해

$$g(b)=0$$

을 만족시키는 a 가 아닌 실수 b 가 존재하는데, [Step 1]에서 이미 살펴보았듯이 $p(b)=0$ 인 $b\,(\neq a)$ 는 존재할 수 없으므로 $q(b)=0$ 이어야 한다.

이때 $x<a$ 에서 $g(x)=|q(x)|$ 가 미분가능하려면 $q(b)=q'(b)=0$ 이어야 한다. 방정식

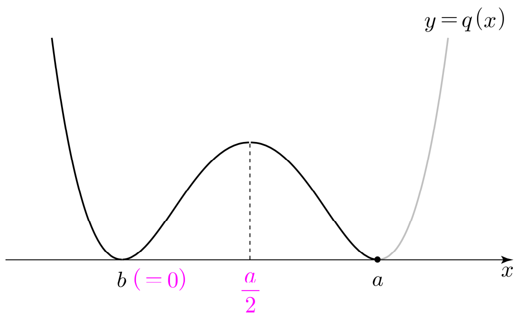
$$q'(x)=0 \quad\to\quad xf(x)=0$$

의 실근이 $x=b$ 이므로 $q'(b)=0$ 을 만족시키는 b 가

$$b=0 \quad \text{또는} \quad f(b)=0$$

둘 중 어느 경우인지 판단하기 위해 케이스를 분류해보자.

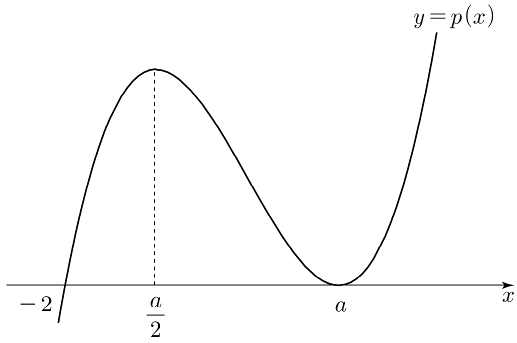
(1) $b=0$ 이라면?



$b=0$ 이면 대칭성에 의해 $q(x)$ 는 $x=\frac{a}{2}$ 에서 극대이므로 방정식 $q'(x)=0$ 의 실근은

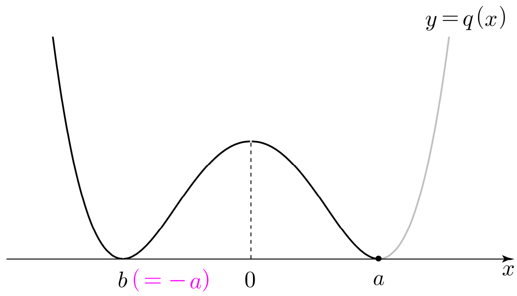
$$xf(x)=0 \quad\to\quad x=0,\ \frac{a}{2},\ a$$

이 된다. 즉, $f(x)=3m\left(x-\frac{a}{2}\right)(x-a)$ 이 되므로 [Step 1]에서 살펴본 $p(x)=m(x+2)(x-a)^2$ 는 $x=\frac{a}{2}$ 에서 극대이다.



삼차함수 비율관계를 통해 a 의 값을 계산하면 $\frac{a}{4}=-2$ 에서 $a=-8$ 이므로 모순! (a 는 양수이어야 함!)

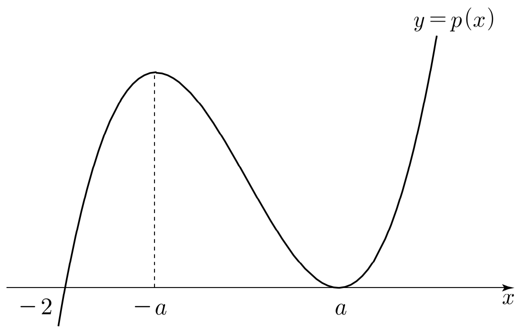
(2) $b\neq 0$ 이라면? ($\Leftrightarrow$ $f(b)=0$ 이라면?)



$b\neq 0$ 이면 대칭성에 의해 $b=-a$ 이고, $q(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이다. 방정식 $q'(x)=0$ 의 실근은

$$xf(x)=0 \quad\to\quad x=0,\ -a,\ a$$

이 된다. 즉, $f(x)=3m(x+a)(x-a)$ 이 되므로 [Step 1]에서 살펴본 $p(x)=m(x+2)(x-a)^2$ 는 $x=-a$ 에서 극대이다.



삼차함수 비율관계를 통해 a 의 값을 계산하면 $a=1$ 이고, $b=-1$ 이다.

Step 3 $f(a-b)=18$ **을 통해** $f(x)$ **식 결정 후 적분 계산**

$f(x)$ 는 $f(x)=3m(x+1)(x-1)$ 이므로

$$f(a-b)=18 \quad \rightarrow \quad f(2)=18$$
$$\rightarrow \quad 9m=18$$

에서 $m=2$ 이다. 따라서

$$g(5)=|p(5)| \quad \leftarrow \ p(x)=2(x+2)(x-1)^2$$
$$=224$$

이다.

$\therefore\ 224$