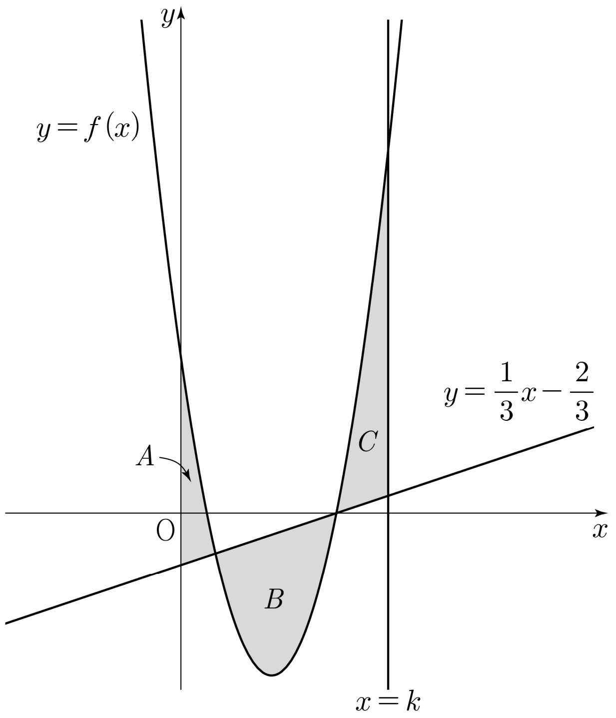
13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]



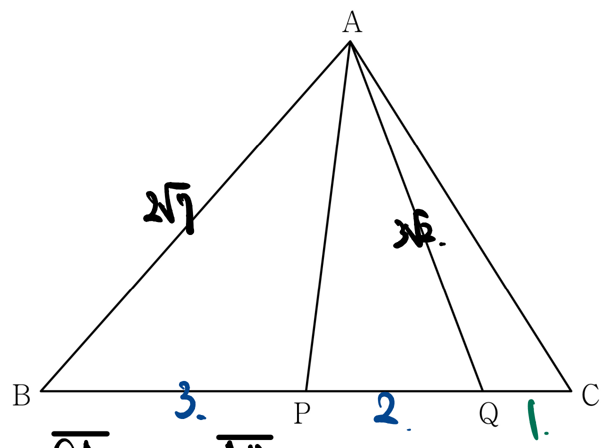
① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

14. $\overline{AB}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{AQ}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R\ldots$$

$\triangle APQ.$ $\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin(\angle APQ)}$

$\overline{PQ}=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=2$

$\cos B=\frac{28+25-16}{2\cdot 2\sqrt{7}\cdot 5}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ V

$\therefore \pi R^2=\frac{\overline{CA}^2}{4\sin^2 B}\pi$

$\overline{CA}^2=28+36-\cancel{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}}=22.$

$=\frac{22}{4\cdot\left(1-\frac{7}{16}\right)}\pi=\frac{88}{9}\pi.$

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

$\forall a \in \mathbb{R}.$

$\lim_{x\to a+} g(x)=g(a).$ $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\le 0.$

($\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$ 인지는 모름 ... 아.)

$x<-1.$ $f'(x)\le 0.$ $f'(-1)=0.$

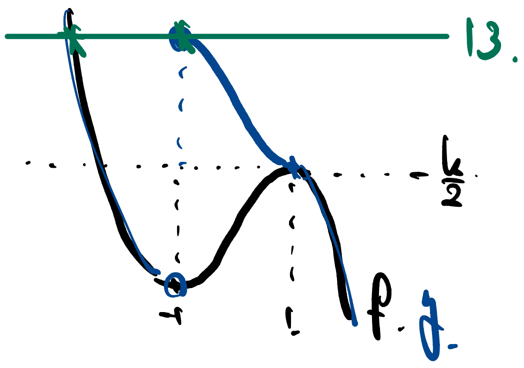
$-1\le x<1.$ $-f'(x)\le 0.$

$x=1.$ $f(1)+k=-f(1).$ $f(1)=-\frac{k}{2}.$

$f'(1)\le 0.$ $f'(1)=0.$

$x>1.$ 큰 두개 찾았으니까...

$f'(x)=3a(x^2-1).$ $f'(0)=6.$ $\therefore a=-2.$



$f(x)=-2(x-1)^2(x+2)-\frac{k}{2}.$ $-f(-1)=13.$

$=2\cdot 4\cdot 1+\frac{k}{2}.$ $k=10.$

$\therefore k+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{k}{2}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}.$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

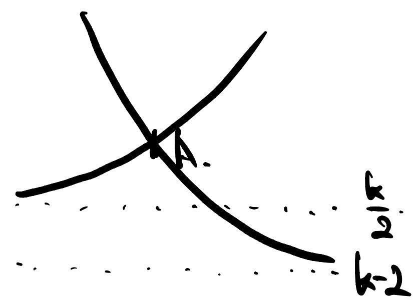
22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 38.



…잉?

$2^x+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2.$

$2^x=t.$ $\quad t+\frac{k}{2}=k\times\frac{1}{t}+k-2.$

$t^2+\left(2-\frac{k}{2}\right)t-k=(t+2)\left(t-\frac{k}{2}\right)=0.$ $\quad t=\frac{k}{2}.$

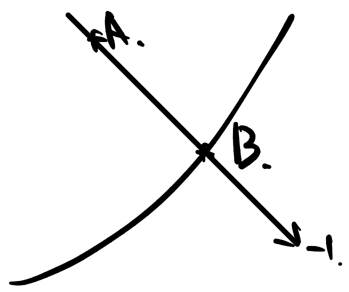
$\therefore A(\log_2 k-1,\ k).$

직선. $y=-\{x-(\log_2 k-1)\}+k.$

$=-x+\log_2 k+k-1.$

$S=\frac{1}{2}\cdot$(원점과 직선 거리.)$\times\overline{AB}.$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k+\log_2 k-1}{\sqrt{2}}\cdot\overline{AB}\ldots\ (\because k>1.\ k+\log_2 k>1+0)$



…잉??

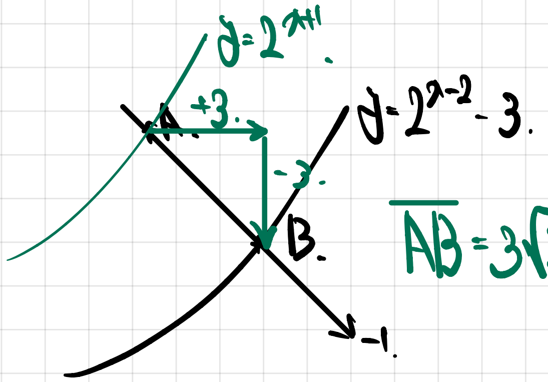
$-x+k+\log_2 k-1=2^{x-2}-3.$

$2^{x-2}+x-2=k+\log_2 k.$ …???

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

A. $2 \times 2^{\log_2 k - 1} = 2^{(\log_2 k - 1)+1} = k$.

$y = 2^{x+1}$ 위의 점!!

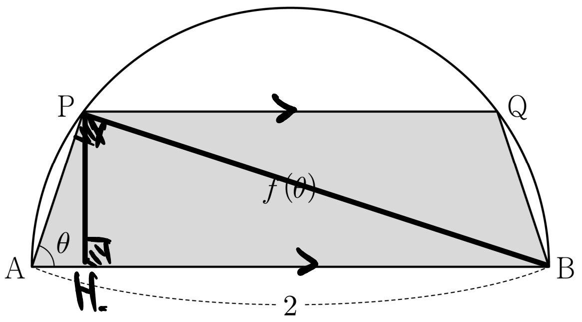


$\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ 고정!

$\therefore S = \frac{3}{2}(k + \log_2 k - 1) = 16$.

$k + \log_2 k = 1 + \frac{32}{3} = \frac{35}{3}$.

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$　② $-\frac{59}{25}$　③ $-\frac{54}{25}$

④ $-\frac{49}{25}$　⑤ $-\frac{44}{25}$

$f(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{PQ})\cdot\overline{QH}$.

$\overline{PH}=\overline{AP}\cdot\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$.

$\overline{PQ}=\overline{AB}-2\times\overline{AH}=2-2\cdot2\cos\theta\cdot\cos\theta$.

$=2-4\cos^2\theta$.

$=\frac{1}{2}\{2+(2-4\cos^2\theta)\}\cdot2\cos\theta\sin\theta$

$=4\sin^3\theta\cos\theta$.

$f'(\theta)=12\sin^2\theta\cos^2\theta-4\sin^4\theta$.

$=4\sin^2\theta\cdot(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

$\tan a=3$. $\sin^2 a=\frac{9}{10}$. $\cos^2 a=\frac{1}{10}$

$\therefore f'(a)=4\cdot\frac{9}{10}\left(\frac{3}{10}-\frac{9}{10}\right)=-\frac{54}{25}$.

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

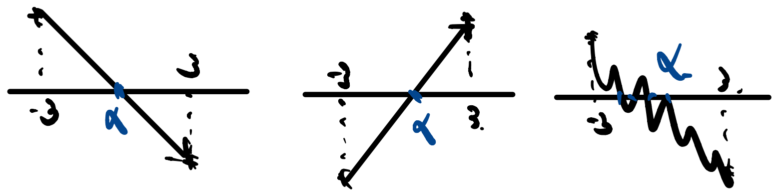
$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$　② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$　③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$　⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$



모름. 근데 근은 있고... $f(\alpha)=0$.

미분. $5f^4f'+3f^2f'+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$.

$=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}$. ...(*).

$x=\alpha$. $a=\frac{2\alpha+1}{(\alpha+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}$. $\le\frac{10}{17}$. ... 잉?

$x=2$. $f'(2)\{5f^4+3f^2\}+a=\frac{10}{17}$. $\ge a$.

(*) 우변. $\frac{2}{(x+\frac{1}{2})+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}}\le\frac{2}{3}$.

(등호 $x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ 에서.)

$\ge-\frac{2}{3}$. (등호. $x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$에서)

$\therefore\{5f^4f'+3f^2f'\}\big|_{x=1}=\{5f^4f'+3f^2f'\}\big|_{x=-2}=0$.

이어야는 ㄷ x...

$\{5f^4f' + 3f^2f'\}' = f''\{5f^4 + 3f^2\} + (f')^2\{20f^3 + 6f\}$

$= f^2f''\{5f^2 + 3\} + f(f')^2\{20f^2 + 6\} = 0.$

$\underline{f = 0}$. or $ff''\{5f^2 + 3\} + (f')^2\{20f^2 + 6\} = 0$. $\cdots (**)$

$\{x \mid (**)$ 성립$\} = \{1, -2\} \Rightarrow \alpha$

$\therefore f(1) = 0$. $\alpha = 1$. or $f(-2) = 0$. $\alpha = -2$.

이걸 어떻게...

$\alpha = -2$. $\dfrac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + \frac{5}{2}} < 0$. yes $\therefore a = -\dfrac{2}{3}$.

$\alpha = 1$. 안된다!

$e^{\{f(-1)\}^5 + \{f(-1)\}^3 - 2a + b} = e^{\frac{4}{3}} \times e^b = \dfrac{9}{2}$. $e^b = \dfrac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}$.

$\therefore a \times e^b = -3e^{-\frac{4}{3}}$. ...

$a = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + \frac{5}{2}}$. $e^{-2a + b} = \alpha^2 + \alpha + \dfrac{5}{2}$.

$a \times e^b = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + \frac{5}{2}} \times \left(\alpha^2 + \alpha + \dfrac{5}{2}\right)e^{2a}$.

$= (2\alpha + 1)e^{2a}$. a는 구해야되나...

단답형

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
>
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 109.

$a_1=\alpha$. $a_2=-\beta$. $a_3=-\alpha$. $a_4=\beta$. ...

$\therefore(\alpha\beta)^2=4$. $\alpha\beta=\pm2$.

$\{b_n\}$ 공비 r...

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\times b_n)=-\beta\cdot b_1\cdot\frac{1}{1-r}=6$. $\beta<0$...

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\times b_{2n})=\alpha\cdot(b_1\times r)\cdot\frac{1}{1-r^2}=6$.

$-\beta\cdot\frac{1}{1-r}=\alpha\cdot\frac{r}{1-r^2}$. $r=\frac{-\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{2}{3}$.

$-1<r<1$. α, β 같은 부호. $\therefore\alpha=-1$, $\beta=-2$.

$b_1=\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}=5$. $\therefore b_1\times b_3=5^2\times\frac{4}{9}=\frac{100}{9}$.

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

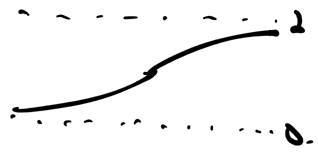
> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
>
> (나) $g'(\ln3)<0$, $|g'(-\ln3)|=\frac{3}{8}g(-\ln3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 29

$g(0)=|f(1)|$ 최소...

$p(x)=\frac{2}{1+e^{-x}}$. $p'(x)=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$.

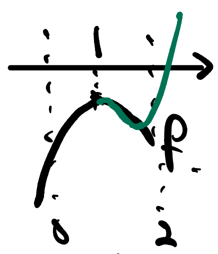
$x\to\pm\infty$... 치역 $|g|\;0<g<2$.

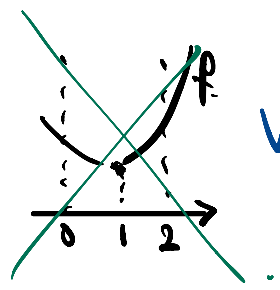


$0<x<2$에서 $f(x)\neq0$.

or $0<a<2$. $f(a)=0$. $\Rightarrow f'(a)=0$.

$g(0)=|f(1)|>0$.





V.

$p(\ln3)=\frac{3}{2}$. $p(-\ln3)=\frac{1}{2}$.

$g(x)=-f(p(x))$.

$f(1)<0$. $-f'(\frac{3}{2})p'(\ln3)<0$. $f'(\frac{3}{2})>0$. O.

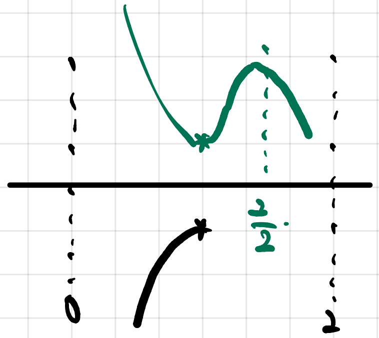
$f(1)>0$. $f'(\frac{3}{2})p'(\ln3)<0$. $f'(\frac{3}{2})<0$. X.

$g'(-\ln3)=-f'(\frac{1}{2})p'(-\ln3)$ $f'(\frac{1}{2})>0$.

$f'(\frac{1}{2})p'(-\ln3)=\frac{3}{8}f'(\frac{1}{2})$. $g(-\ln3)=-f(\frac{1}{2})$

$\therefore f'(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



$f(x)=(x-1)^2(x-a)+b$. $f(1)=b$.

$f(2)\le 0$. $\frac{2a+1}{3}<\frac{3}{2}$.

$f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})=0\ldots$

a.b 범위

$\to |f(1)|=|b|$ 범위

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}-a)+b=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}a+b$.

$f'(\frac{1}{2})=2(x-1)(x-a)+(x-1)^2\Big|_{x=\frac{1}{2}}$

$=-(\frac{1}{2}-a)+\frac{1}{4}=a-\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}a+b-\frac{1}{8}=0$.

$\frac{2a+1}{3}<\frac{3}{2}$. $a<\frac{7}{4}$ $b=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}a$. $a=\frac{1}{6}-\frac{4}{3}b$.

$f(2)=2-a+b=\frac{7}{3}b+\frac{11}{6}\le 0$. $b\le -\frac{11}{14}$

$\therefore g(1)\ge\frac{11}{14}$.