8. $\sin(\pi-\theta)>0$이고 $2\cos\theta=\sin\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$　③ 0　④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

9. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\int_{-3}^{3}(x+1)(x^2+ax)dx=36+\int_{-3}^{3}(x^2+ax)dx$

$\int_{-3}^{3}(\cancel{x^3}+(a+1)x^2+\cancel{ax})dx=36+\int_{-3}^{3}(x^2+\cancel{ax})dx$

$2\int_{0}^{3}(a+1)x^2dx=36+2\int_{0}^{3}x^2dx$

$\cancel{2}\int_{0}^{3}ax^2dx=\cancel{36}\ 18$

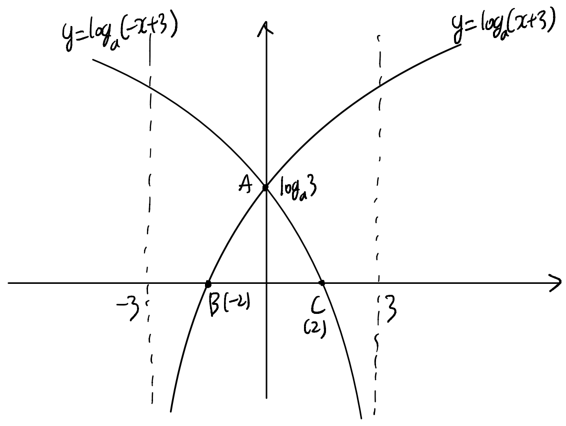
$\frac{1}{3}a[x^3]_0^3=9a=18$

$\boxed{a=2}$

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 y축 대칭

곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,
곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$　② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$　③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$　④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$　⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$



$\overline{AO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{BC}$

$\log_a 3=2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}}=3$

$\boxed{a=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}}$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x = t^3 - t^2 - t + 1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

~~ㄱ~~. $x(1)=0$

ㄴ. $v(t)=3t^2-2t-1$
$v(1)=0$

ㄷ. $v(t)=0 \Rightarrow t=1$
$a(t)=6t-2$
$a(1)=4$

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1 = a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 \\ \text{or} \\ 2a_n \end{cases}$ (조건X→나열)

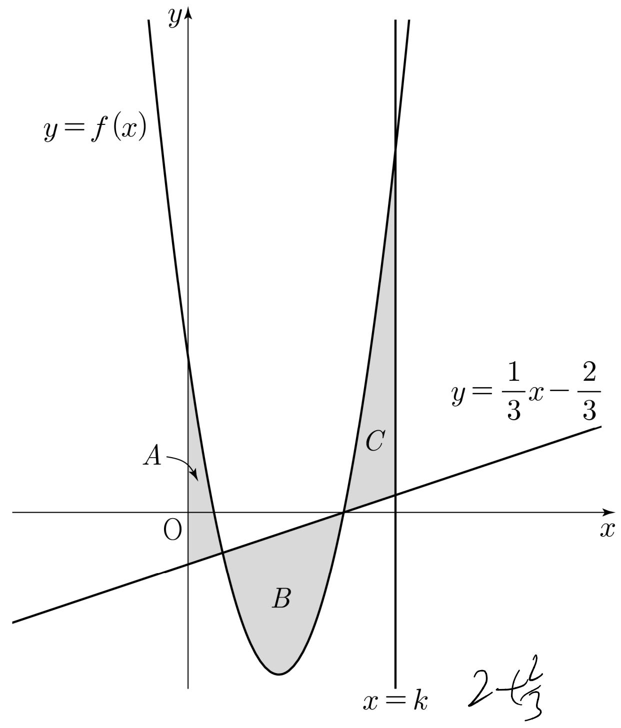
$a_2 = \begin{cases} a_1 - 3 \rightarrow a_3 = \begin{cases} a_1 - 6 \Rightarrow X \\ 2a_1 - 6 \Rightarrow a_1 = a_3 = 6 \end{cases} \\ 2a_1 \rightarrow a_3 = \begin{cases} 2a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = a_3 = 3 \\ 4a_1 \Rightarrow a_1 = a_3 = 0 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow a_4$의 최댓값
↳ $a_1=6$일때
$\boxed{a_4=12}$

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$A-B+C=0$

$\int_0^k \left(f(x)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right)dx=0$

$\int_0^k \left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx$

$=\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k$

$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$

$k(3k^2-11k+8)=0$

$3k \quad -8$
$k \quad -1$

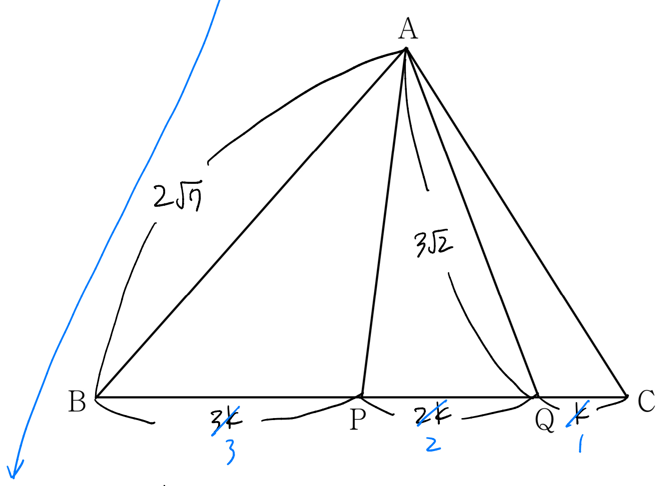
$\boxed{k=\frac{8}{3}}$ $(\because k>2)$

14. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 5 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자.

$\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2}$, $\sin(\angle\mathrm{QAP}):\sin(\angle\mathrm{APQ})=\sqrt{2}:3$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



△APQ에서

$\underbrace{\overline{PQ}}_{2k}:\underbrace{\overline{AQ}}_{3\sqrt2}=\sqrt{2}:3$

$\overline{PQ}=2$

△ABQ에서

$\cos B=\frac{25+28-18}{2\cdot5\cdot2\sqrt7}=\frac{\sqrt7}{4}$

$\sin B=\frac{3}{4}$

△ABC에서

$\overline{AC}^2=36+28-2\cdot6\cdot2\sqrt7\cdot\frac{\sqrt7}{4}$

$=22$

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\sqrt{22}}{3}=2R$

$R=\frac{2\sqrt{22}}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{88}{9}\pi}$

15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.

(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

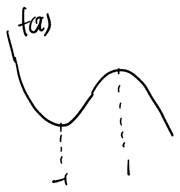
① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

우미분계수 존재, ≤0

감소함수의 형태

$|x|>1$에서 $f'(x)\le 0$

$|x|<1$에서 $-f'(x)\le 0 \Rightarrow f'(x)\ge 0$

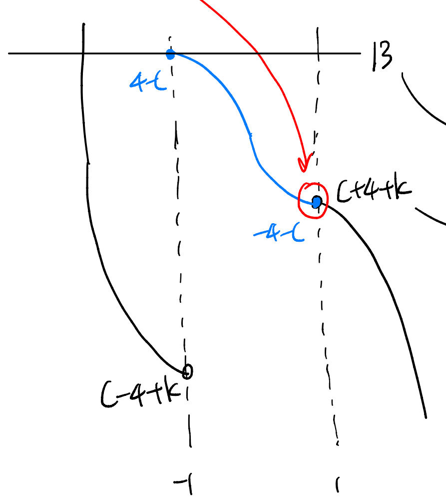


$f'(x)=m(x^2-1)$

$f'(x)=-6x^2+6$

$f(x)=-2x^3+6x+C$

$x=1$에서 연속



$C=-9$

$k=10$

$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10-\frac{25}{4}=\boxed{\frac{15}{4}}$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값과 $\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

$x=1$, $x=2$ 좌우에서 각각 $f(x)$ 부호변화

$\Rightarrow g(1)=0,\ g(2)=0$

$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$

$\lim_{x\to a}\frac{|(x-1)(x-2)(h(x)-1)|}{(x-1)(x-2)h(x)}$

↳ (분자)가 중근을 안 가지면, $x=1$, $x=2$ 좌우에서 부호변화 $\Rightarrow$ 극한값 존재X

$\Rightarrow h(1)=1,\ h(2)=1$

↳ $h(x)=(x-1)(x-2)+1$

$\therefore g(-1)=(-2)\cdot(-3)\cdot(7)=\boxed{42}$

$\boxed{42}$

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(문제를 읽어보면 처음 두 그래프는 그릴 필요 없음을 알게 됨)
(교점만 구하고 끝)

$2^x=t\ (t>0)$

$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$

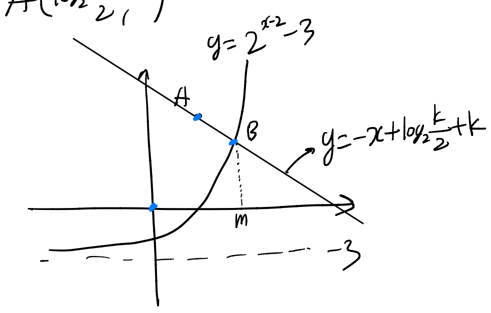
$2t^2+(4-k)t-2k=0$

$2t \quad -k$
$t \quad +2$

$2^x=\frac{k}{2}$

$x=\log_2\frac{k}{2}$

$A\left(\log_2\frac{k}{2},\ k\right)$



$2^{m-2}-3=-m+\log_2\frac{k}{2}+k$

$2^{m-2}+m=\log_2 k+k+2$

$m=\log_2 k+2$

↳ $\overline{AB}=3\sqrt{2}$

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{|\log_2 k+k-1|}{\sqrt{2}}=16$

$\log_2 k+k-1=\frac{32}{3}$

$\log_2 k+k=\frac{35}{3}$

$\boxed{\therefore 38}$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

25. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

26. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $a+f'(g(a))$의 값은? [3점]

$8-12+8$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f(m)=a$

$\Rightarrow g'(a)=\frac{1}{f'(m)}=\frac{1}{8}$

$f'(m)=8$

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}$

$m=\ln 2$

$f(\ln 2)=4$

$a=4$, $g(4)=\ln 2$

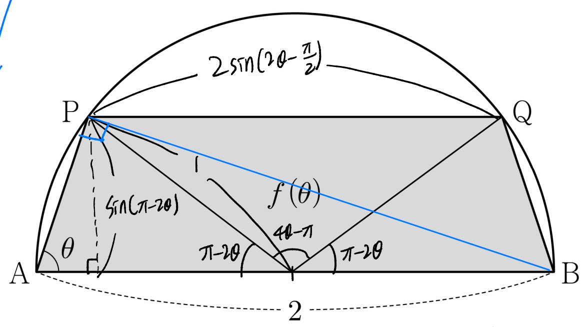
$\therefore 4+f'(\ln 2)$

$=4+8$

$=\boxed{12}$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP = \theta\ (\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2})$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]

$\tan\theta = 3$



$\pi-(2\pi-4\theta)$

① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$ ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(2 + 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \times \sin(\pi - 2\theta)$

$= (1 - \cos 2\theta) \cdot \sin 2\theta$

$f'(\theta) = 2\sin^2 2\theta + 2(1-\cos 2\theta)\cos 2\theta$

$\tan 2\theta = -\frac{3}{4}$,

$\sin 2\theta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$

이때 $f'(a) = \frac{18}{25} + 2 \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{18}{25} - \frac{72}{25} = \boxed{-\frac{54}{25}}$

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$(f(x))^5 + (f(x))^3 + \cancel{ax+b} = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (ax+b)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

$f(x)=0$ 근 존재

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

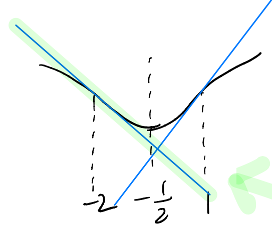
$f(x)^3(f(x)^2+1) = \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) - (ax+b)$

삼중근 → 얘도 삼중근

⇒ $y=ax+b$는 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡접선

$y = \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$

$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$



$y'' = \frac{-2x^2-2x+4}{(\quad)^2} \rightarrow x=-2, x=1$

$5f(x)^4 f'(x) + 3f(x)^2 f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$

$= f'(x) \cdot f(x)^2 (5f(x)^2+3)$

$x=2 \rightarrow$ ⊕ ⊕

$y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 $x=2$에서의 접선의 기울기 $>$ $y=ax+b$의 기울기

$y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 $x=-2$에서의 접선의 방정식

$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \ln\frac{9}{2} - \frac{4}{3}$

$a \times e^b = -\frac{2}{3} \times e^{\ln\frac{9}{2e^{4/3}}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot e^{-\frac{4}{3}}$

$= \boxed{-3e^{-\frac{4}{3}}}$

단답형

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
>
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$a_1=\alpha$
$a_2=-\beta$
$a_3=-\alpha$
$a_4=\beta$
$\alpha\beta=\pm2$

$a_{4n-2}=-\beta$
$a_{4n-3}=\alpha$

$-\beta\times\underbrace{\frac{b_1}{1-r}}_{\oplus}=\alpha\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6 \quad (|r|<1)$
$\downarrow$
$\beta<0$
$\Rightarrow \alpha\beta=\pm2$
$2,-1 \longrightarrow b_1=6(1-r)$, $\quad \frac{2\times6r}{1+r}=6$, $r=1$ (X)
$1\ -2$
$-1\ -2$

$b_1=3(1+r)$ $\quad$ $\frac{2b_1}{1-r}=6$, $b_1=3(1-r)$

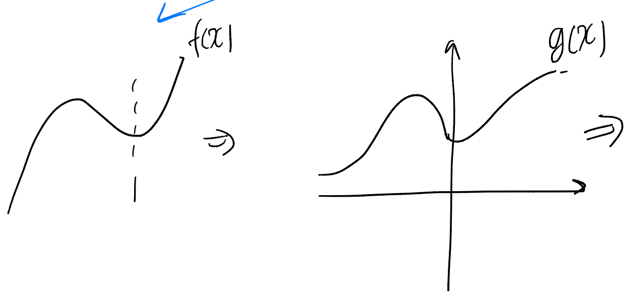
$-\frac{3r}{1+r}=6$ $\quad$ $\frac{3r}{1+r}=6$, $r=-2$ (X)

$\begin{cases} r=-\frac{2}{3} \\ b_1=5 \end{cases}$

$b_1\times b_3=5\times5\times\frac{4}{9}=\boxed{\frac{100}{9}}$

$\boxed{109}$

if



$\Rightarrow g'(\ln3)<0$ 만족X

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

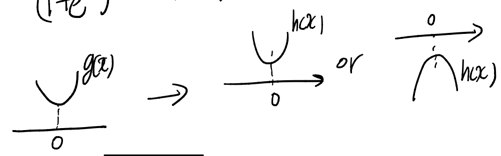
$$g(x)=\left|\underbrace{f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)}_{h(x)}\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
>
> (나) $g'(\ln3)<0$, $|g'(-\ln3)|=\frac{3}{8}g(-\ln3)$

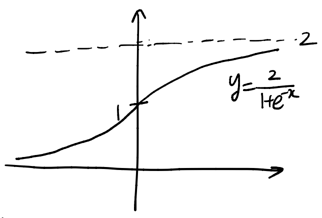
$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$h(x)=f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$
$h'(x)=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$

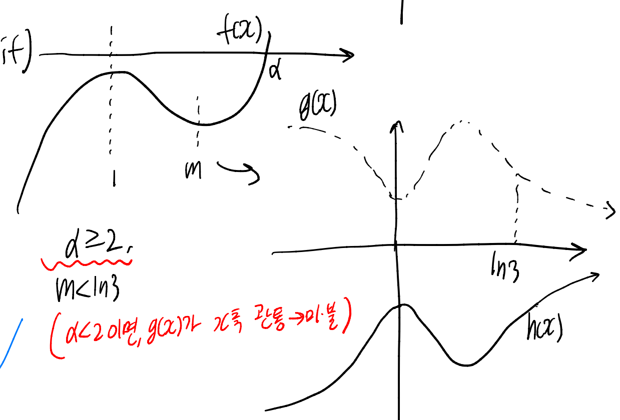


$h'(0)=0\rightarrow\boxed{f'(1)=0}$

$y=\frac{2}{1+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^x+1}$
$y'=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$



if)



$\underset{\sim\sim}{\alpha\geq2}$,
$m<\ln3$
($\alpha<2$이면, $g(x)$가 x축 접촉→미분불)

$8-6m-0+6m+C$
$C+2$.

$|g'(-\ln3)|=-g'(-\ln3)=h'(-\ln3)$
$g(-\ln3)=-h(-\ln3)$
$\frac{3}{8}\times f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}\times f\left(\frac{1}{2}\right)$
$\underset{\sim\sim\sim}{f'\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0}$

$f'(x)=3(x-1)(x-m)=3(x^2-(m+1)x+m)$
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx+C$
$C=-\frac{21}{8}m+1$ (계산 생략)
$f(2)=C+2\leq0$
$m\geq\frac{8}{7}$
$g(0)=-h(0)=-f(1)\geq\boxed{\frac{11}{14}}$

$\boxed{25}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.