제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^2 - x + 1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$의 값은? [2점]

2x-1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k = 8$일 때, $\sum_{k=1}^{7} (2a_k + 1)$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < 3) \\ 5x - a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$-9+a=15-a$

5. $\int_{0}^{2}(6x^2-2x+1)dx$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$

$16-4+2$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\overset{?}{a}\cos \overset{2}{b}x+1$의 최댓값이 8이고 주기가 π일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=5x^2+xf(x)$$

라 하자. $f(3)=2$, $f'(3)=1$일 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

$g'=\underset{30}{10x}+\underset{2}{f}+\underset{3}{xf'}$

8. $\sin(\pi-\theta)>0$이고 $2\cos\theta=\sin\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$s\theta>0$

9. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_{-3}^{3} x^3+ax^2\,dx=36$

$18a=36$

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,
곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

A(0. $\log_a 3$)
B(−2.0) C(2.0)

$\log_a 3=2\sqrt{3}$

$3=a^{2\sqrt{3}}$

$a=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가

$$x=t^3-t^2-t+1$$

$x'=3t^2-2t-1$
$x''=6t-2$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 최댓값은? [4점]

(가) $a_1 = a_3$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$(a_{n+1}-a_n+3)(a_{n+1}-2a_n)=0$$
이다.

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

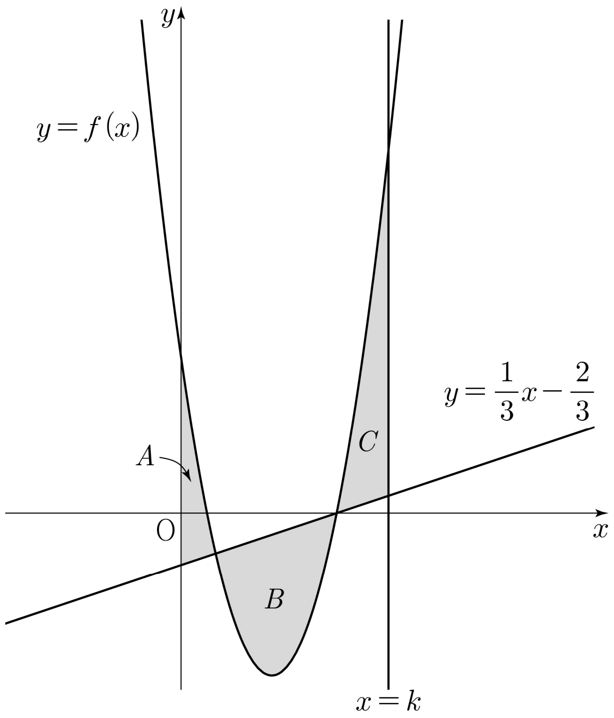
$a_2=a_1-3$
$a_3=2(a_1-3)$, $a_1=6$
$a_2=2a_1$
$a_3=2a_1-3$, $a_1=3$

12
3
6
0

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y축으로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$로 둘러싸인 영역을 B, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k\,(k>2)$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

$\left[x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{6}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k=0$

$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$

$\frac{k}{3}(3k-8)(k-1)=0$

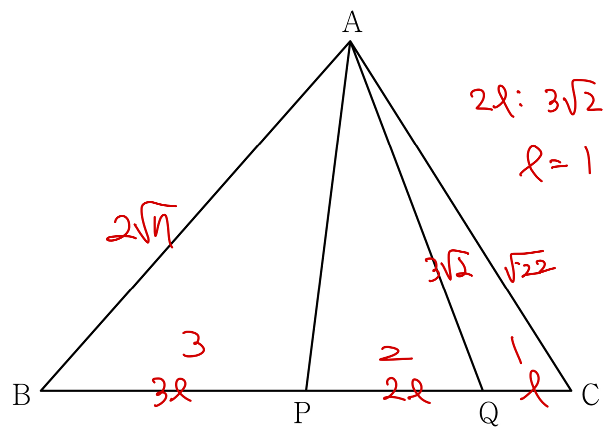
$k>2$

14. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{7}$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 P, 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하자.

$$\overline{\mathrm{AQ}}=3\sqrt{2},\ \sin(\angle\mathrm{QAP}):\sin(\angle\mathrm{APQ})=\sqrt{2}:3$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는? [4점]

① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$ ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



$2l:3\sqrt{2}=\sqrt{2}:3$

$l=1$

$53-20\sqrt{7}c\alpha=18$

$20\sqrt{7}c\alpha=\cancel{35}^{7\sqrt{7}}\times\frac{1}{\cancel{20\sqrt{7}}_{4}}$

$c\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\underbrace{28+36}_{64}-\cancel{24}^{6}\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}}=22$

$\frac{\frac{22}{1}}{\frac{3}{4}}=2R$

$R=\frac{2\sqrt{22}}{3}$

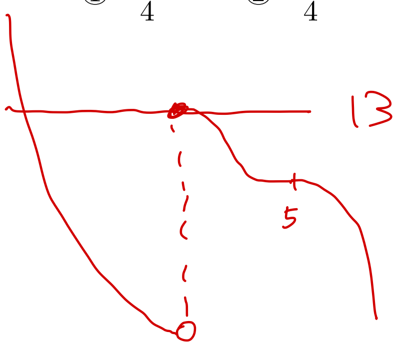
15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
> $f(1)+k=-f(1)$
> $f'(1)=f'(-1)=0$
>
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$



$f'=-6x^2+6$
$f(1)=-5$
$k=10$
$-2x^3+6x-9$
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-6=-\frac{25}{4}$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x^2-1=3$

2

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f=x^3+2x^2+3$

6

18. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{\cancel{6}\,7\,13}{\cancel{6}} + 42$

133

19. 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=3x^3-9x^2+a$의 극댓값이 20일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [3점]

$f'=9x^2-18x$

$a=20$

$24-36+20$

8

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $0 \le x < 4$일 때 $f(x)=-x^2+4x$이고,
> 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

방정식 $f\left(f(x)\right)=f(x)$의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
다음은 $a_{20}+a_{21}+a_{22}$의 값을 구하는 과정이다.

> 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근이 0, 3이므로
> 방정식 $f\left(f(x)\right)=f(x)$의 실근을 구하는 것은
> 방정식 $f(x)\times\left(f(x)-3\right)=0$의 실근을 구하는 것과 같다.
>
> $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x)\times\left(f(x)-3\right)=0$의
> 모든 실근은 0, $\boxed{(가)}$, 3이므로
> $a_1=0$, $a_2=\boxed{(가)}$, $a_3=3$
> 이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로
> 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은
> 첫째항이 각각 0, $\boxed{(가)}$, 3이고
> 공차가 모두 $\boxed{(나)}$인 등차수열이다.
> 따라서 $a_{20}+a_{21}+a_{22}=\boxed{(다)}$이다.

a_2+ a_3+ a_4+ 80

24 24 28

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

85

21. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a에 대하여
> $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)\times|\cancel{f(x)}|}{\cancel{f(x)}}$ 의 값과 $\lim\limits_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이
> 모두 존재한다.

$(x-1)(x-2)(x^2+\alpha x+\beta-1)$

$-1,\ 1$

$(x-1)(x-2)(x^2+\alpha x+\beta)$

$x^2+\alpha x+\beta=(x-1)(x-2)+1$

$g(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

$g=(x-1)(x-2)\cdots$

$-6\cdot -7$

42

22. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\underset{\alpha}{2^x}+\frac{k}{2}=k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$

$k\left(\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}-1}\right)=-\alpha-2$

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)$

$k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+2$ $\quad k\cdot\frac{\cancel{\alpha+2}}{2\alpha}=\cancel{\alpha+2}$

$\alpha=\frac{k}{2}$

$A(\log_2 k-1,\ k)$

기울기 -1 ⇒ $x+y$좌표 same

$\log_2 k-1=t.\quad k=2^{t+1}$

$t+2^{t+1}=\alpha-3+2^{\alpha-2}.\quad \alpha=t+3$

길이 $3\sqrt{2}$ → 높이 $\frac{16}{3}\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{k+\log_2 k-1}_{\frac{35}{3}}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

38

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^{n+1}}{2^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

24. 곡선 $3x+y+\cos(xy)=2$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$3+y'-\cancel{(y+xy')\sin xy}=0$

$y'=-3$

25. 양수 a에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, $a+S$의 값은? [3점]

① 7　　② $\frac{15}{2}$　　③ 8　　④ $\frac{17}{2}$　　⑤ 9

$a=3$

$\frac{(3-3n)(n+3)+3n^2+6n}{n(n+3)}$

$=\frac{9}{n(n+3)}$

$3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{2}$

26. 함수 $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 실수 a에 대하여 $\underbrace{a}_{4}+\underbrace{f'(g(a))}_{8}$의 값은? [3점]

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

$3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}-8=0$

$3e^{2x}(e^{x}-2)+4(e^{x}-2)$

$e^{x}=2$　　$x=\ln 2$

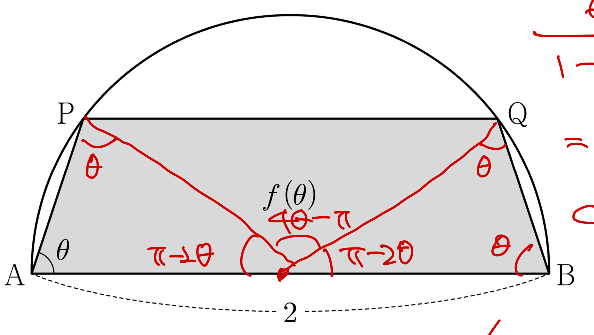
$8-12+8=4$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{BAP}=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$이 되도록 하는 θ의 값을 α라 할 때, $f'(\alpha)$의 값은? [3점]

$t\alpha = 3$

$\frac{6}{1-9} = -\frac{3}{4}$

$c2\theta = \frac{-4}{5}$



① $-\frac{64}{25}$ ② $-\frac{59}{25}$ ③ $-\frac{54}{25}$ ④ $-\frac{49}{25}$ ⑤ $-\frac{44}{25}$

$f = \sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta$

$f' = 2\cos 2\theta - 2\cos 4\theta \quad (2\cos^2 2\theta - 1)$

$= -4\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 2$

$-4\cdot\frac{16}{25} - \frac{8}{5} + 2 = -\frac{64}{25} + \frac{2}{5}$

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(\underbrace{x^2+x+\frac{5}{2}}_{g}\right)$$
> 이다.
>
> (나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

$\left(\frac{g'}{g}\right)' = \frac{2(x^2+x+\frac{5}{2})-(2x+1)^2}{g^2}$

$= \frac{-2x^2-2x+4}{g^2}$ $\quad -2,\ 1$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

$f^3(f^2+1) = \ln(x^2+x+\frac{5}{2}) - ax - b$

즉 ln 과 ax+b 교점 접하도 α

$f(\alpha)=0$

$5f'f^4 + 3f'f^2 = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$

$f'f^2(5f^2+3) = \sim$

즉 $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}} - a = 0$

$-\frac{2}{3}$ $\quad -2$

$a = -\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3} + b = \ln\frac{9}{2}$

$b = \ln\left(\frac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}\right)$

$\therefore ae^b = -\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}$

단답형

29. 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
>
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

$\alpha \quad -\beta \quad -\alpha \quad \beta$

α	β
2	1
2	-1
1	-2
-1	-2

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}\,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}\,b_{2n})=6$$

$-\beta$ $\quad \alpha\frac{b}{1-r}\frac{r}{1+r}=6$

$-\beta\frac{b}{1-r}=6$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\beta=-2.\quad \alpha=-1\quad \frac{r}{1+r}=-2$

$r=-\frac{2}{3}$

109

$b_1=5$

$5\times5\times\frac{4}{9}=\frac{100}{9}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

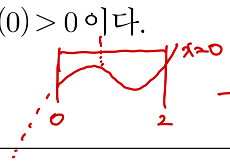
$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

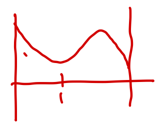
$f\,(0.2)$ 늘림 $\quad g=-f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)$

$g'=\frac{-2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}f'(-)$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
>
> (나) $g'(\ln3)<0$, $|g'(-\ln3)|=\frac{3}{8}g(-\ln3)$





$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f'=3(x-1)(x-\alpha)\qquad g'(-\ln3)=-\frac{3}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$f=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+3\alpha x+c\qquad \to\ \alpha<\frac{3}{2}$

$-x^3+\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2-3\alpha x+c$

$\frac{3}{8}\cdot3\cdot\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{8}\alpha+c\right)$

$\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{9}{8}\alpha+c$

$c=\frac{21}{8}\alpha-1$

$f(2)\le0.\quad -f(2)\ge0$

$-2+c=\frac{21}{8}\alpha-3\ge0.\quad \alpha\ge\frac{8}{7}$

$g(0)=-f(1)=\frac{9}{8}\alpha-\frac{1}{2}$

$=\frac{9}{7}-\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$

25

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.