# 2026학년도 6평 대비 부엉이 모의고사 해설

제 2 교시

# 수학 영역

공통과목

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| ① | ③ | ① | ② | ⑤ |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ⑤ | ① | ② | ② | ③ |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| ⑤ | ③ | ① | ② | ④ |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 3 | 10 | 2 | 32 | 31 |
| 21 | 22 | | | |
| 18 | 53 | | | |

확률과 통계

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 28 | 29 | 30 | | |
| | | | | |

미적분

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| ③ | ① | ④ | ④ | ① |
| 28 | 29 | 30 | | |
| ② | 26 | 15 | | |

기하

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| ① | ④ | ② | ⑤ | ⑤ |
| 28 | 29 | 30 | | |
| ① | 8 | 669 | | |

예상 1컷 (6평 표본 기준)

| 미적 | 기하 | 확률과 통계 |
|---|---|---|
| 80 | 84-86 | 100 |

**총평**

공통은 어려웠다.
공통 객관식을 상당히 빡빡하게 구성하였기에 22 수능의 상위버전으로 대부분의 중상위권에게는 상당히 쉽지 않았을 것이다. 또한 공통 주관식도 20,21,22 모두 쉽지 않게 구성했고 특히 20번은 생각해야 하는 케이스가 많고 실수할 거리도 많았기에 고득점 하기에 상당히 어려웠을 것이다. 그나마 20번을 어렵게 했기에 21,22를 수월하게 넘어갈 문항으로 배치했다. 전체적으로 호흡이 긴 문항 (15, 20)과 중간중간에 당황할 문항 (8, 12)이 있었기에 최상위권을 제외하고는 쉽지 않았을 것이다.

미적분의 난이도는 전반적으로 25수능보다는 쉽고, 25학년도 6평 보다는 어렵게 낼려고 했으며 공통에서의 문제호흡이 너무 길었기에 호흡이 짧은 문제를 내고자 했다. 미적 28번은 240628의 항등식 논리에서 착안해서 출제한 문제로 문제 자체의 난이도는 쉬운 편이 아니지만 실제 계산량은 매우 적기에 상위권이었다면 수월했을 것이다. 미적 29번도 하나의 논리만을 인지한다면 바로 답이 나오도록 등비급수치고는 매우 계산량이 적게 구성했다. 미적 30번은 250629를 참고해서 낸 문제이긴 하지만 전반적인 풀이에는 그 문제와 많은 차이가 있었을 것이다. 역함수와의 관계성에 집중해야 했던 문제로 이계도함수까지 구해야 했기에 앞의 문제보다는 조금 계산이 있었지만 그럼에도 평소 미적의 계산량 생각하면 그리 많은 편은 아니었을 것이다. 결국에 공통이 어려웠기에 공통을 어떻게 해쳐나가냐에 따라서 미적에 대한 접근이 달라졌을 것이다.

기하의 난이도는 전반적으로 쉽다. 25수능과 25학년도 6평에 비해서 모두 쉬우며 25학년도 9평보다 살짝 어려운 정도이다. 기하 27번의 경우에는 포물선의 정의를 이용하여 길이 비를 사용하면 쉽게 닮음 삼각형 2개가 보이게 되고, 이를 이용하면 어렵지 않게 해결이 가능했을 것이다.
28번의 경우에는 이차곡선과 벡터의 단원 결합 문제지만 어렵지 않았을 것이다. 선분 PF의 길이를 구하는 것이 관건이었는데, 점 Q가 원의 자취임을 파악했으면 그 후에는 늘 하던 대로 진행하면 되는 문제였다.29번의 경우에는 타원의 방정식이 직접 주어지지 않았으므로 스스로 미지수를 놓고 작성을 하여야겠다는 생각이 들어야 한다. 점 P 역시 미지수가 필요하지만, 이 과정대로 진행하다 보면 미지수가 전부 결정되는 상황이 나오게 되고 그 뒤에는 타원의 대칭성을 활용하여 해결할 수 있다. 30번의 경우에는 (가) 조건과 (나) 조건을 해석하고 나면 각 도형의 자취를 그려낼 수 있을 것이다.  그 후에 삼각형의 무게중심과의 거리의 최댓값을 잡아내면 해결할 수 있을 것이다. 계산량은 있지만, 현재 기하 30번에서 긴 계산을 요구하는 문제가 출제되고 있으므로 이 정도까진 대비할 수 있도록 하자.

9번: ②

서로 다른 세 실근을 갖는다는 점에 집중해보자.

결국에 우리한테 중요한건 분모에 위치한 $f(x)$이다. $f(x)$가 0이 되는데 분자는 0으로 가지 않는 상황만 존재하지 않도록 만들어야 한다. 그런데 보아하니 분자에는 $f(x+1)$이 있다. $f(x)$가 0으로 갈 때 $f(x+1)$도 0이 되는 순간이 "두 번"은 있고 나머지 한 번을 $x-4$가 처리해 줄 것이다. 따라서

$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$, $f(6)=24$이다.

**문제 코멘트**

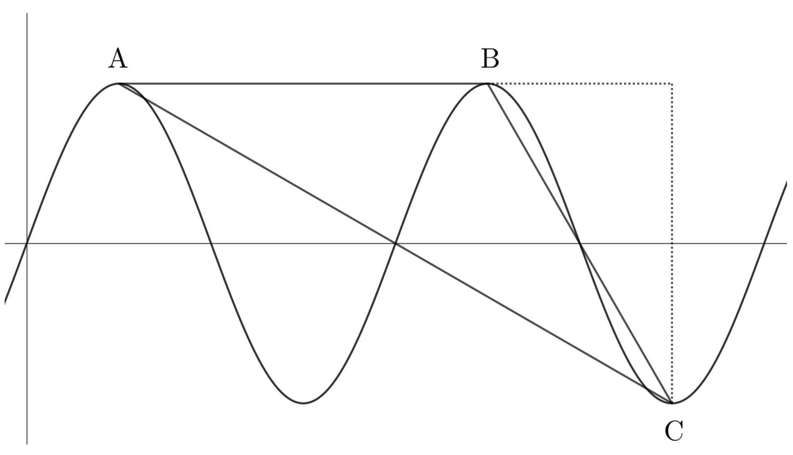
> 매우 심플한 극한 문제이다. 어떨 때 값이 존재하지 않는지만 생각한다면 쉽게 풀 수 있었을 것이다.

10번: ③

$b>\frac{3}{2}$이기 때문에 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형만이 가능하다.

따라서 다음과 같은 형태로 $b=\frac{7}{2}$이다.

($b\geq\frac{11}{2}$이면 $\overline{BC}>\overline{AB}$가 된다.)




$\overline{AB}=\overline{BC}=2$가 되기 위해서 간단하게 피타고라스 정리를 써주면

$\overline{BC}^2=1+4a^2$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

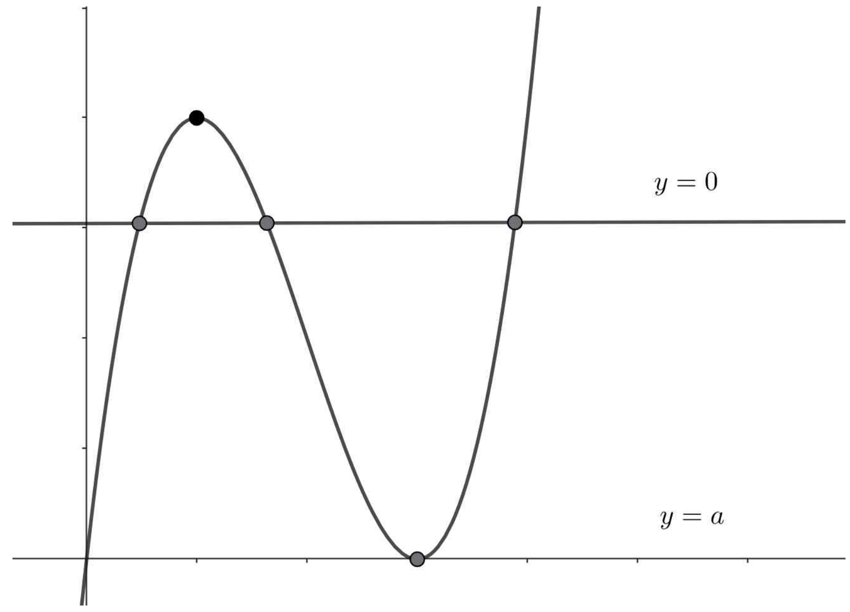
$\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=13$

11번: ⑤

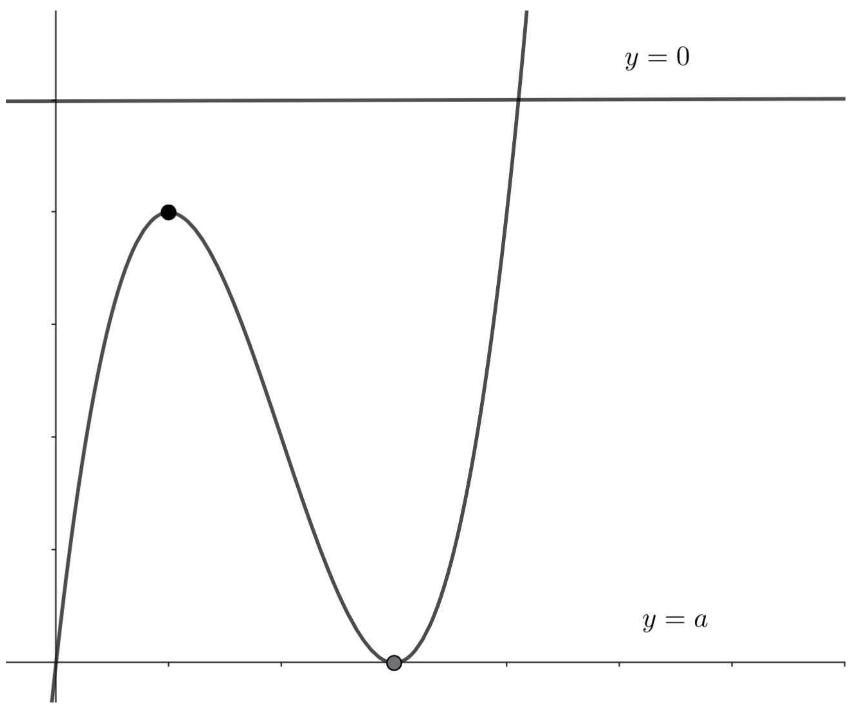
점 P의 거리- 점 Q의 거리

$=(t^3-4t^2+5t+a)-(2t^2-4t)=t^3-6t^2+9t+a$

$f(t)$는 두 점 사이의 거리이기에 절댓값이 씌운 $|t^3-6t^2+9t+a|$이다. 따라서 $|t^3-6t^2+9t+a|$의 극값을 관찰해야 한다.




다음과 같이 $|t^3-6t^2+9t+a|$가 극값을 갖는 경우는 $t^3-6t^2+9t+a$의 그래프가 $x$축을 뚫고 지나가는 경우와 극값을 갖는 경우 두 가지 경우다. 따라서 극값을 3개만 가지기 위해




다음과 같이 $a\leq-4$여야 한다. 최댓값은 $-4$

**추가해설**

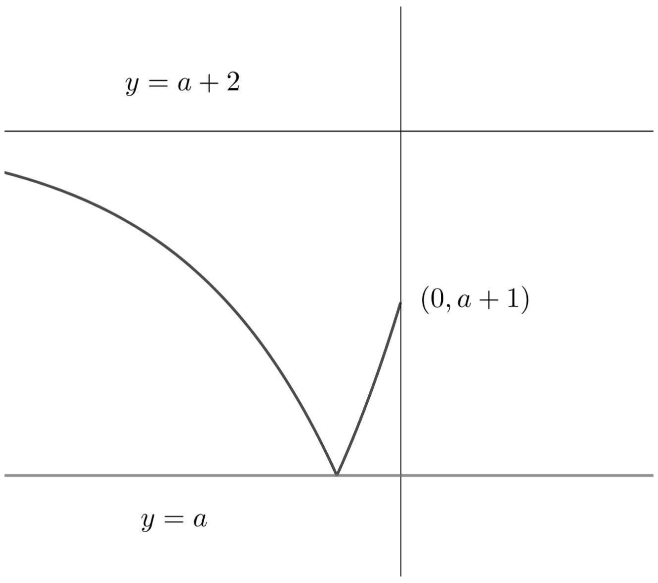
$t^3-6t^2+9t+a$가 $x$축을 뚫고 지나가는 지점이 존재해야만 극값의 개수가 3이 될 수 있다. 만약 $x$축을 뚫고 지나가는 지점이 존재한다면 극솟값의 오른쪽에서는 무조건 존재한다. 결론적으로 그곳에서만 $x$축을 뚫고 지나가야 하는 것이다. 그렇기에 극솟값의 왼쪽에서 $x$축을 뚫고 지나가는 부분이 없도록 만들어야 하고 따라서 $t^3-6t^2+9t+a$의 극댓값이 0보다 크면 안된다. 이를 통해 $a\le-4$임을 알 수 있다.

**문제 코멘트**

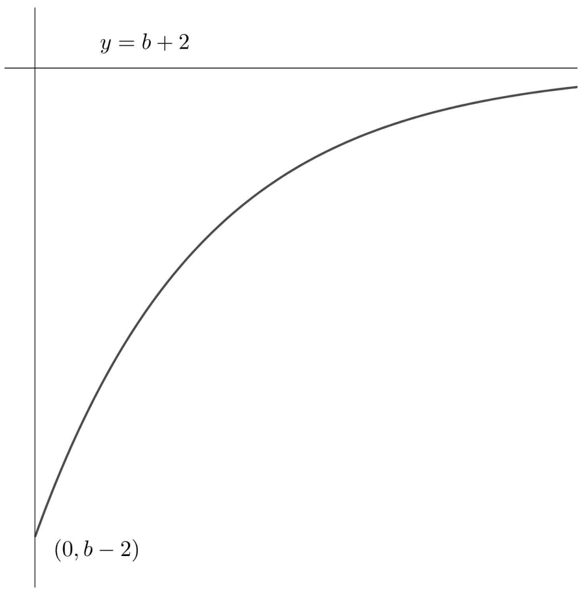
속도 가속도의 탈을 쓴 그래프 문제이다. 거리에는 절댓값을 씌움에 유의하기만 한다면 쉽게 풀 수 있었을 것이다.
해설에는 그래프가 왜 저렇게 그려지는지 생략했지만 삼차함수 비율관계를 사용하거나 그냥 미분해 봐도 바로 알 수 있기에 생략했다.

12번: ③

먼저 $x\le0$에서의 그래프를 그려보면 다음과 같다.




다음으로는 $x>0$에서의 그래프를 그려보자.




먼저 $x\le0$을 생각해보자.

일단 $x\le0$에서 $y$의 구간 $(a,a+1]$안에 정수는 무조건 존재한다. 그 구간에서 $f(x)$가 $x\le0$ 에서만 정수 지점을 두 번 지나니 $g(n)=2$가 아니기 위해서는 $x>0$ 에서도 그 부분을 지나야만 한다. 따라서 $a\le b-2<a+1$이다.

$x\le0$의 $y$의 구간 $(a+1,a+2)$에서 $f(x)$는 무조건 한 번 $y=t$를 지난다. 그런데 앞에서 구했듯 $a\le b-2<a+1$이기 때문에 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 치역에 $(a+1,a+2)$가 무조건 포함된다. 따라서 $a+1<t<a+2$인 실수 $t$에 대하여 $g(t)=2$이다. 그렇기에 $g(n)=2$가 불가능하기 위해선 $a$가 정수여야만 한다.

정수이면서 양수이면서 최소가 되기 위해서 $a=1$이 되고, 앞에서 얻은 $a\le b-2<a+1$을 사용하면 $b$의 최솟값은 3, $a+b=4$이다.

**문제 코멘트**

정수 조건이 $a$가 정수임을 특정시켜주는데 사용되는데 사실 감이 좋은 사람이라면 굳이 연역적으로 이를 도출시키지 않더라도 그렇게 됨을 어림짐작할 수 있었을 것이다. 이후 간단히 $b$의 범위만 고려하면 쉽게 풀렸다.
그럼에도 12번 치고는 꽤 난도 있는 문항이라 은근히 걸렸을 사람들이 있었을 것 같다. 12번이 어려운 것은 작년 6모 12번 반영으로 시험지에서는 어디에서 걸리지 모르기에 대비하라는 목적으로 배치했다. 문제 자체는 240914와 240513을 참고했다.

13번: ①

$\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}$이고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 위에 있기에 점 Q의 $x$좌표는 4이다. 따라서 $A-B=\int_0^4\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx=\frac{16}{3}$

이고 이를 계산해야 하는데 여기서 차함수의 관점으로

점 P의 $x$좌표만 $k$로 둔다면 $f(x)-\frac{1}{2}x=x(x-k)(x-4)$이다.

마지막으로 계산을 해보면

$$\int_0^4\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx=\int_0^4\{x(x-k)(x-4)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+4}{3}x^3+2kx^2\right]_0^4=64-\frac{k+4}{3}\times64+32k=\frac{32}{3}k-\frac{64}{3}=\frac{16}{3}$$

$k=\frac{5}{2}$, $\quad f(x)-\frac{1}{2}x=x\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-4)$

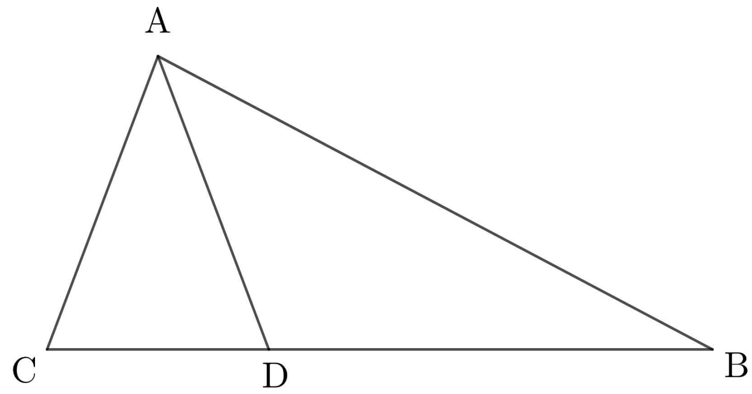
$f(5)=5\times\left(5-\frac{5}{2}\right)(5-4)+\frac{5}{2}=15$이다.

**문제 코멘트**

그냥 정석적인 정적분 문제이다. $\overline{\mathrm{OQ}}$ 길이로 $x$좌표 도출하는 것은 기출에도 자주 나왔기에 이 정도는 모르면 안된다.
차함수로 하는 것도 이제는 모르면 안되는 해석법이다.
후반부 약간의 계산 말고는 무난했을 것이다.

14번: ②

문제에서 주어진 대로 삼각형을 그려보자.




다음과 같고 외접원의 넓이 비에 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$,

각 이등분선의 성질로 $\overline{\mathrm{CD}}=3$, $\overline{\mathrm{DB}}=6$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{DB}}$의 길이와 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이 비를 알기 때문에

$\angle\mathrm{ACD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AC}}=k$, $\overline{\mathrm{AB}}=2k$ 라 하고 삼각형 ACD와 삼각형 ACB에서 코사인 법칙을 사용하면 각각

$18=k^2+9-6k\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{k^2-9}{6k}$

$4k^2=81+k^2-18k\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{27-k^2}{6k}$

따라서 $\frac{k^2-9}{6k}=\frac{27-k^2}{6k}=\cos\theta$, $k=3\sqrt{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$이다.

외접원의 반지름은 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\times6\sqrt{2}=2\mathrm{R}$,

$R=\frac{12}{\sqrt{7}}$, $\pi R^2=\frac{144}{7}\pi$이다.

**문제 코멘트**

흔한 도형 문제이다. 발상을 없애고 그냥 평범한 사인,코사인 법칙 활용 문제로 디자인 했다. 삼각형의 외접원에 대한 정보가 주어진다면 무조건 사인 법칙을 활용하라는 것이기에 이에 맞춰 정보를 해석하고 이후 간단히 코사인 법칙만 사용하면 간단히 풀렸다.

15번: ④

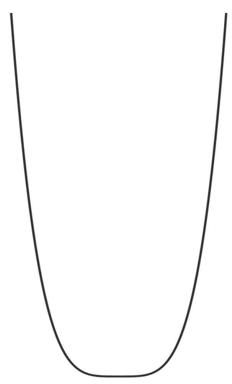
일단 함수 $|f(x)-f(t)|$의 미분불가능한 점은 아주 당연하게도

$f(x)-f(t)$가 $x$축을 인수 1개 만을 가지고 뚫고 가는

그 지점이 되겠다.

일단 우리는 함수 $f(x)$의 개형을 모르기에 후보를 추려보자.

case 1)

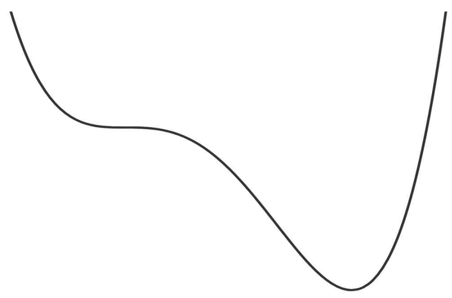


$f'(x)=0$이 되는 $x$가 하나밖에 없는 경우이다.

이럴 경우 $g(x)$는 0 또는 1로 가능한 $g(x)$의 값이 2개로

(가)조건을 만족시키지 못한다.

case 2)



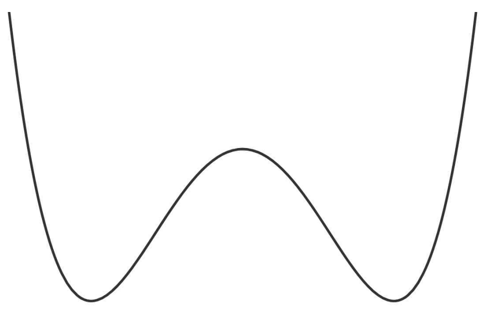
다음과 같이 삼중근을 가지는 경우이다.

이럴 경우 치역이 $0, 1, 2$으로 (가)조건을 만족시키기 위해서는

$x=4$에서 극솟값, $f(x)=f(0)$이 삼중근과 하나의 실근을

가져야 한다. 하지만 (나)조건으로 인해 $f'(\alpha)=0$이므로
$0<\alpha<4$를 만족시키지 않는다.

case 3)



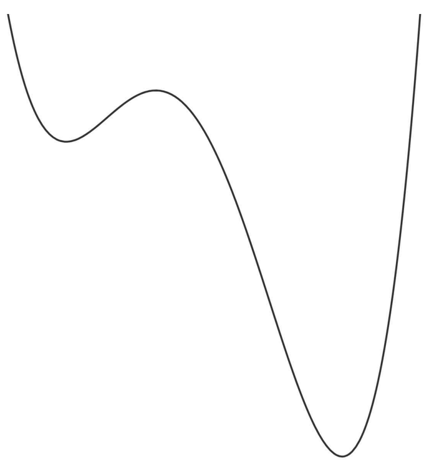
다음과 같이 두 극솟값이 같은 경우이다.

이럴 경우 $g(4)=0$, $g(0)=2$, $g(3)=4$로 $f(x)$의 극댓값이

$f(0)$이어야만 한다. 하지만 아까와 마찬가지로 $f'(\alpha)=0$이기에

$f(\alpha)<f(0)$이어서 성립하지 못한다.

case 4)



두 극솟값의 크기가 다른 경우이다.

이 경우 $g(4)=0$, $g(0)=2$, $g(3)=4$로 함수 $f(x)$는 $x=0$,

$x=4$에서 극솟값을, $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.

또한 $f(4)<f(0)$, $f(0)<f(3)$이다.

마지막 남은 이 케이스가 유일한 정답 경우임을 알 수 있고

이제 남은 것은 $f(4)<f(0)<f(3)$을 계산하는 것이다.

$f'(x)$에 대해 거의 알고 있으니 이를 기준점으로 생각하면

$$\int_0^4 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx<0,\ \int_0^3 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx>0$$

이 된다 따라서 이를 계산해보자.

$$\int_0^4 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx=4\int_0^4 \{x^3-(\alpha+4)x^2+4\alpha x\}dx$$

$$=4\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+4}{3}x^3+2\alpha x^2\right|_0^4<0,\ \alpha<2 \text{ - ①}$$

$$\int_0^3 \{4x(x-\alpha)(x-4)\}dx=4\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+4}{3}x^2+2\alpha x^2\right|_0^3>0$$

$\alpha>\frac{7}{4}$ - ②

따라서 $f'(x)=4x(x-\alpha)(x-4)$, $f'(5)=100-20\alpha$,

①과 ②에 의해 $\frac{7}{4}<\alpha<2$로 $60<100-20\alpha<65$이다.

$M+m=60+65=125$

**문제 코멘트**

사차함수 개형추론이 핵심이었다. 가능한 $g(x)$값을 생각하여
가능한 사차함수의 개형을 좁히고 이후 조건을 충족시키는
$f(x)$가 되도록 계산을 통해 $\alpha$의 범위를 좁혔어야 했다.
개형추론과 계산을 섞으면서 너무 과도한 개형추론이나 너무
과도한 계산으로 문제가 망쳐지는 현상을 피하고자 노력했다.
난이도 자체도 무난한 15번 정도라고 생각한다.

**20번: 31**

부등식에서 결국에는 부호만이 중요하다.

그렇기에 $\log\left|\frac{2}{3}n-19\right|$와 $\log\left(\frac{3}{k}n-2\right)$의 부호가 어떻게 되는지

$n$의 범위에 따라 생각해보자.

먼저 $\log\left|\frac{2}{3}n-19\right|$의 부호는 $8<n<11$에서 음수,

$n<8 \text{ or } 11<n$에서 양수.

$\log\left(\frac{3}{k}n-2\right)$의 부호는 $\frac{2}{3}k<n<k$에서 음수, $k<n$에서 양수.

그렇다면 이 두 개의 부호가 반대가 되는 시점을 찾아야 한다.

$\frac{2}{3}k$를 기준점으로 잡고 생각을 한다면

먼저 $\frac{2}{3}k<8$의 경우

$(\frac{2}{3}k<n<8$인 $n$의 개수$)+(k<n<11$인 $n$의 개수$)$가 4가

되도록 하는 자연수 $k$는 7과 8만이 존재한다.

$8\le\frac{2}{3}k<11$인 상황에서는 $(k<n<11$인 $n$의 개수$)$가 4가

되도록 하는 자연수 $k$는 16만 존재한다.

$\frac{2}{3}k>11$인 상황에서는 $(11<n<k$인 $n$의 개수$)$가 4가 되도록

하는 자연수 $k$가 존재하지 않는다.

따라서 답은 $7+8+16=31$이다.

**문제 코멘트**

> 상당히 어려운 문제이다. 일단 나오는 케이스가 상당히 많으며 실수할 거리도 많은 문제이다. 하지만 결국에 부호에 초점을 맞추고 무엇을 움직이며 관찰할지를 명확히 확정한다면 실수 없이 깔끔히 풀어내는 것이 가능했을 것이다.

21번: 18

$f(tx)=f(tx-f(x))$ 의 실근이 언제 나오는지를 분석해보자.

$tx=tx-f(x)$인 경우, 즉 $f(x)=0$일 때 가능하다.

또한 $f(x)$는 $x=\frac{k+3}{2}$를 대칭축으로 갖는 이차함수이기에

$tx$와 $tx-f(x)$가 $f(x)$의 대칭축에 대하여 대칭인, 즉

$2tx-f(x)=k+3$, $f(x)=2tx-k-3$일 때 가능하다.

다시 정리해보면 결국 우리는 $f(x)=0$과 $f(x)=2tx-k-3$의

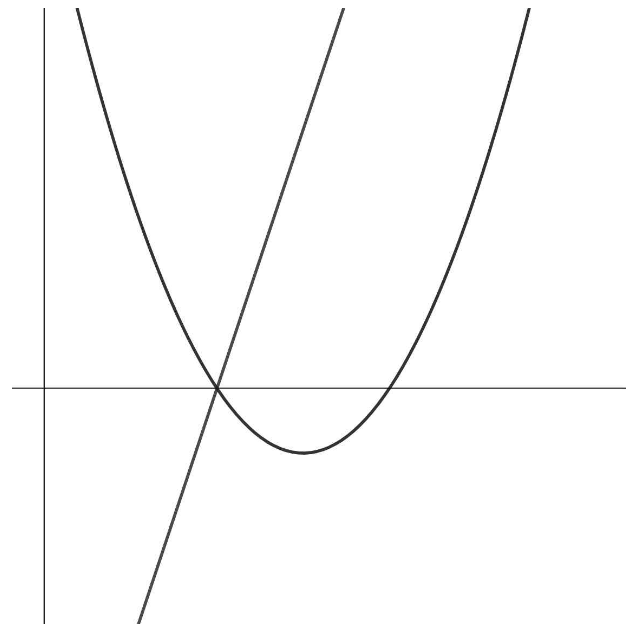
실근에 대하여 분석해야 한다.

그런데 $f(x)=0$의 실근은 $k$와 3으로 고정되있다.

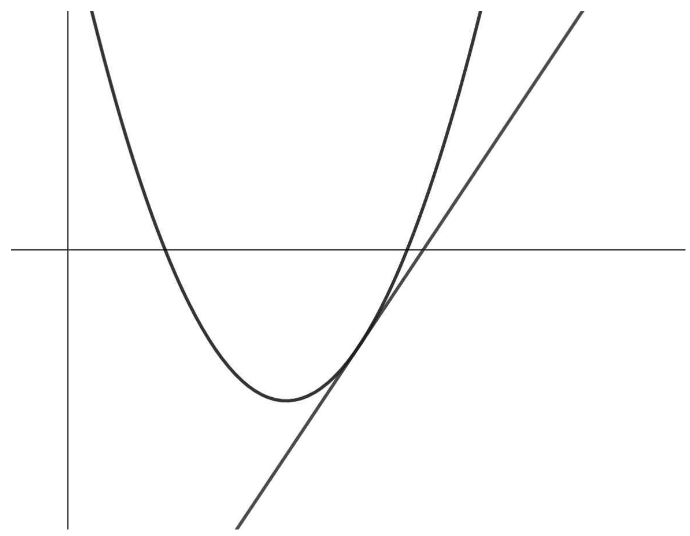
따라서 우리는 실근의 변화를

$f(x)=2tx-k-3$의 실근에서 찾아야 한다.

한 번 그래프를 그려보자면



다음과 같이 $f(x)=2tx-k-3$와 $f(x)=0$의 실근이 겹칠 때와



다음과 같이 $f(x)=2tx-k-3$의 실근의 개수가 달라지는

순간에서 $g(t)$가 불연속임을 알 수 있다.

따라서 총 불연속점이 2곳이기에 $f(x)=2tx-k-3$의 실근의

개수가 달라지면서, $f(x)=2tx-k-3$와 $f(x)=0$의 실근이

겹치는 순간이 존재함을 알 수 있다.

$t>0$이기에 함수 $y=f(x)$와 $y=2tx-k-3$는 $(3,0)$에서 접한다.

이를 계산하면 $6t=k+3$, $3-k=2t$, $k=\frac{3}{2}$, $t=\frac{3}{4}$이고 이때

$t$값이 $b$가 된다. 마지막으로 $a$는 실근이 겹칠 때인

$y=2tx-k-3$가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지날 때로 이때 $t=a=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $8(a+b)=8\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)=18$이다.

**문제 코멘트**

> 문제의 포인트는 $f(tx)=f(tx-f(x))$의 해석이었다. 이차함수가 대칭성을 지닌다는 매우 기본적인 원리를 사용하면 바로 해석이 가능했다. 합성함수를 꼭 합성함수로 생각하지 않아도 된다. 공통에서 합성함수 포멧으로 문제가 출제된다면 그 문항은 대부분의 경우 합성함수의 관점이 아닌 다른 관점으로 문제를 해결할 수 있고, 그것이 더 빠른 문제이다.
> 특히 평가원 시험에서는 더더욱 그러하다.

22번: 53

(가)조건을 해석하면 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$또는 $a_{n+1}=2a_n-8$이다.

(나)조건을 해석하면 $m>2$에서 $a_m \times a_{m+1} \le 0$이고 $a_2 \times a_3 > 0$

이다. $a_6$은 0이기에 정직하게 $a_6$부터 역추적 해보자.

<table>
<tr><th>$a_6$</th><th>$a_5$</th><th>$a_4$</th><th>$a_3$</th><th>$a_2$</th><th>$a_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="5">0</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>7, −12</td></tr>
<tr><td>4</td><td>−8</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">−8</td><td>16</td><td>12</td><td>−24, 10</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

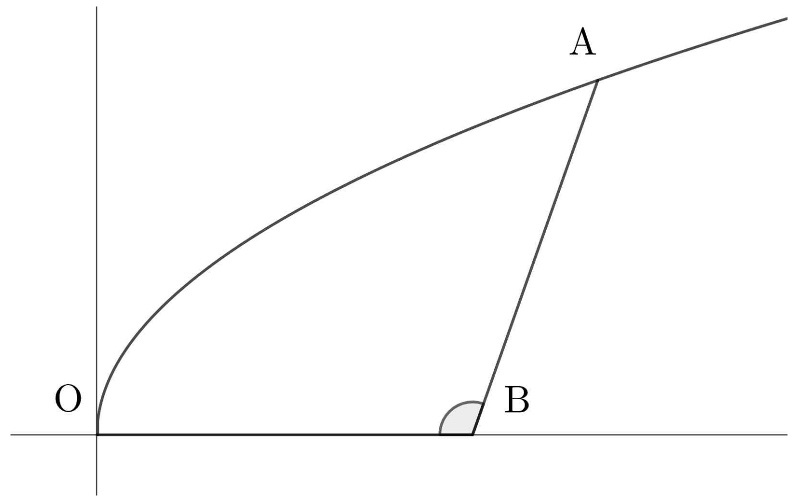
따라서 $|7|+|-12|+|-24|+|10|=53$이다.

**문제 코멘트**

> (가)조건은 250922,(나)조건은 251122를 참고했지만 문제의 난이도는 낮췄다. 간단히 역추적만 하면 답이 나오는 문항이지만 $m$의 최댓값이 2인 이유에 대하여 잊지 않았어야 했다. 공통의 나머지 문항의 난도가 높았기에 22번은 간단히 넘어갈 수 있는 문항으로 배치했다.

**선택 미적분**

27번: ①




$\overline{AB}=\overline{BO}$이기에 B의 $x$좌표를 $a$로 두면 $a^2=(k-a)^2+k$,

$a=\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}$

$\cos(\pi-f(k))=-\cos f(k)=\frac{k-a}{a}=\frac{k-1}{k+1}$ - ①

$f(t)=\frac{2}{3}\pi$, ①식에 대입시 $\frac{1}{2}=\frac{t-1}{t+1}$, $t=3$

①식 미분시 $f'(k)\sin f(k)=\frac{2}{(k+1)^2}$, $f'(3)\sin f(3)=\frac{1}{8}$,

$f'(3)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{\sin f(3)}=\frac{\sqrt{3}}{12}$이다.

**문제 코멘트**

> 매우 평범한 음함수 미분 문제. 각도를 함수로 준 것에 약간 당황할 수 있지만 결국에 이 함수를 어떻게 나타낼 수 있는지만 고려하면 문제 없이 풀 수 있었을 것이다.

28번: ②

$|g(x)|=\{f(x)+f(1-x)\}\circ \sin x$ 이다.

$f(x)+f(1-x)$를 $h(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 두 이차함수의 합이기 때문에 최고차항이 양수인 이차함수이고 $f(x)+f(1-x)$가 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭성을 가지고 있기에 이차함수 $h(x)$의 대칭축은 $x=\frac{1}{2}$이 된다.

$|g(x)|=h(\sin x)\geq 0$이기 때문에 함수 $h(x)$는 $\sin x$의 치역인 닫힌구간 $[-1,1]$에서는 양수, 즉 $h(x)$의 최솟값인 $h\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0$ 이다.

$M>0$, $m<0$이기 때문에 함수 $g(x)$의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이다. 사잇값의 정리에 따라 실수 전체집합에서 연속인 함수 $g(x)$에서 $g(a)=0$을 만족시키는 실수 $a$가 존재한다.

따라서 $|g(a)|=h(\sin a)=0$인데 $h(x)$의 최솟값인 $h\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0$ 이기 때문에 $0\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\leq h(\sin a)=0$, $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$이다.

이제 최대,최소를 구하자면 $|g(x)|=h(\sin x)$이기에 $h(\sin x)$가 극값을 가지는 곳에서 $g(x)$의 최댓값,최솟값을 가진다. $h(\sin x)$는 $h'(\sin x)=0$ 또는 $\cos x=0$인 $x$에서 극값을 가지는데 $h'(\sin x)=0$ 일 때는 $h(\sin x)=0$ 이기에 아니고 따라서 $\cos x=0$ 일 때 최대, 최소를 가짐을 알 수 있다. $h(1)<h(-1)$, $|M|>|m|$이기에 $h(-1)=M$ , $h(1)=-m$이다.

$x=1$과 $x=-1$은 함수 $h(x)$의 대칭축인 $x=\frac{1}{2}$와 떨어진 거리가 $1:3$이고 $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$이기에 $h(1):h(-1)=1:9$이다. 따라서 $M\times m=-\frac{81}{4}$을 이용하면 $M=\frac{27}{2}$, $m=-\frac{3}{2}$, $M-m=15$ 이다.

문제 코멘트

전체적으로 240628을 참고한 문항이다. $f(x)+f(1-x)$가 $x=\frac{1}{2}$를 대칭축으로 갖는 "이차함수"임을 파악 후 $g(x)$의 최솟값이 어떻게 하면 음수가 나올 수 있는지를 생각했어야 했다. 결국에는 항등식에 대한 문제로 항등식에서 좌변과 우변 모두 같은 특성을 지닐 수 밖에 없다는 점을 항상 명심해야만 한다. 계산이 거의 없었던 문제로 마지막의 최대,최소 계산 또한 이차함수의 높이 비로 계산없이 끝낼 수 있었다.

29번: 26

일단 (나)조건을 보면 $\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)$이 수렴함으로 $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=0$이다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 상수항은 0이다.

(가)조건에서 $k$이상의 모든 자연수 $m$에 대해 $f(a_m)\leq 0$인데 $f(x)$의 상수항이 0이고 $a_n$은 $n$이 커짐에 따라 0에 아주 가까운 위치에서 양수와 음수를 번갈아가며 값이 나오기에 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 $x$축을 뚫고 지나가서는 안된다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 $x$축에 접한다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2(x-t)$라 하고 (나)조건을 계산하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^3-ta_n^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{8}\right)^n-t\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=-\frac{1}{9}-\frac{t}{3}=-\frac{4}{27}$$

$t=\frac{1}{9}$, 따라서 가능한 자연수 $k$의 최솟값은 3,

$f(3)=9\left(3-\frac{1}{9}\right)=26$이다.

문제 코멘트

등비급수의 계산보다는 약간의 추론이 주가 되었던 문항이다. $k$ 이상의 모든 자연수 $m$에 대하여 $f(a_m)\leq 0$이 무엇을 의미하는지를 정확히 이해하기만 했다면 수월하게 풀 수 있었을 것이다.

30번: 15

역함수 조건으로 $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+a}+b\geq 0$,

$f'(2)\geq f'(x)$이기에

$f'(x)$는 $x=2$에서 극대, 따라서 $f''(2)=\dfrac{a-4}{(a+4)^2}\times 2=0$, $a=4$

$4f'(x_1)=g'(x)$를 만족시키는 순서쌍 $(x_1,x_2)$의 개수는 1개라는

말은 즉, 함수 $4f'(x_1)$와 함수 $g'(x)$의 공통된 치역이 한 곳만

존재한다는 것이다. $a=4$이기에

함수 $4f'(x_1)$의 치역은 닫힌구간$[4b-2,4b+2]$

함수 $g'(x)$의 치역은 $\dfrac{1}{f'(g(x))}$의 치역이기에

닫힌구간 $\left[\dfrac{2}{2b+1},\dfrac{2}{2b-1}\right]$이다. 공통된 치역이 한 곳만 존재하기

위해서는 $4b-2=\dfrac{2}{2b-1}$또는 $4b+2=\dfrac{2}{2b+1}$이어야 한다.

따라서 가능한 $b$의 값은 계산해보면 $-1$, $0$, $1$이 있다.

역함수 조건 $f'(x)\geq 0$으로 얻어진 $b\geq\dfrac{1}{2}$에 의해 $b=1$

마지막으로 $g'(x)\geq g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$이기에 $g'(2)$가 최소가 되기

위해서는 $f'(g(2))$가 최대가 되어야 한다. 따라서 $f'(g(2))=f'(2)$

$g(2)=2$이다.

$f(2)=g(2)=2=\ln(4+4)+2+c=2$, $c=-3\ln2$

$a+b+c=5-3\ln2$, $p\times q=15$이다.

**문제 코멘트**

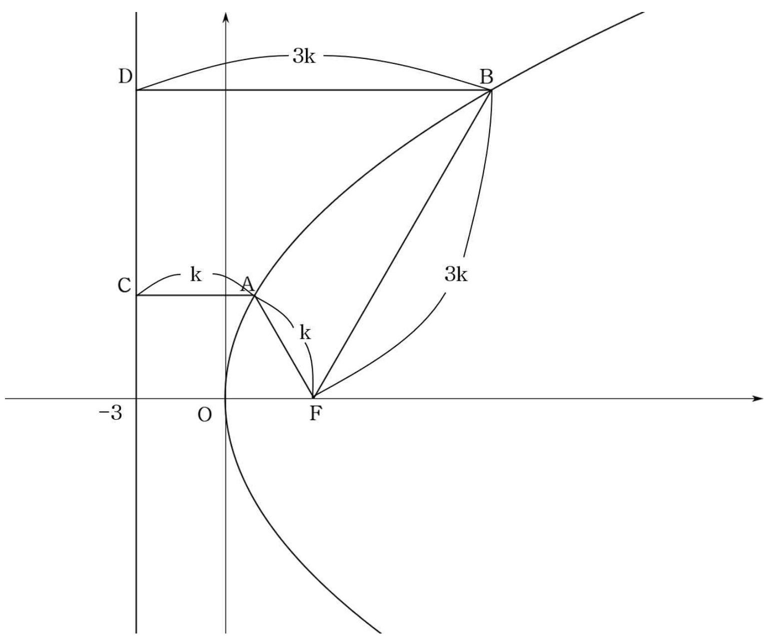
의외로 그렇게 난이도가 높지는 않았던 미적 30번이었다.
미적분 30번 문제치고는 문제의 호흡자체도 길지 않았다.
결국에 핵심은 문제의 (나)조건으로 각각의 치역이 어떻게
형성되는지와 이를 통해 치역이 한 곳만 겹치도록 어떻게
만들어야 하는지를 역함수가 존재한다는 조건과 합쳐서
해석하는 것이 관건이었다. (가)조건은 문제를 많이 풀어봤다면
꽤 자주 나오는 조건이라 비교적 쉽게 해석이 가능했을 것이라
생각한다.

**선택 기하**

27번: ⑤

문제에서 포물선 위의 점 A와 B가 주어졌다. 포물선 위의 점이 주어지면 먼저 해야 할 일은 포물선 위의 점과 포물선의 준선까지 잇는 것이다. A, B에서 준선까지 이은 선분과 준선과의 교점을 각각 C, D라고 하자. 다음으로 해야 할 것은 나와 있는 길이 비를 표시하는 일이다. 길이 비가 1:3이라고 주어졌으므로 표시하도록 하자.

초점과 준선의 위치 역시 표시할 수 있다.




다음 조건으로는 ∠AFO와 ∠BFO의 관계가 나와 있다.

$\angle \mathrm{AFO}+\angle \mathrm{BFO}=\pi$만으로는 명확하게 의미하는 것이 무엇인지가 보이지 않는다. 따라서 식을 변형해보자.

$\angle \mathrm{AFO}=\pi-\angle \mathrm{BFO}$로 식을 변경하면 A에서 $x$축에 내린 수선의 발을 A′, B에서 $x$축에 내린 수선의 발을 B′라 할 때, ∠AFA′과 ∠BFB′의 각이 같다는 사실을 알 수 있다. 따라서 삼각형 AFA′과 삼각형 BFB′은 모두 직각삼각형이므로 AA 닮음 임을 알 수 있다. 즉 두 삼각형은 1:3 닮음이므로 A′F과 FB와의 길이 비를 통해서 $k$값을 확정 지어보자.

$6-k:3k-6=1:3$ 따라서 $k=4$이므로

$\mathrm{A}(1,2\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(9,6\sqrt{3})$임을 알 수 있다.

구해야 할 것은 AFB의 외접원의 반지름의 길이이므로 선분 AB의 길이와 ∠AFB를 이용하여 사인법칙을 사용하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{7}$, ∠AFA′과 ∠BFB′는 모두 $\frac{\pi}{3}$이므로

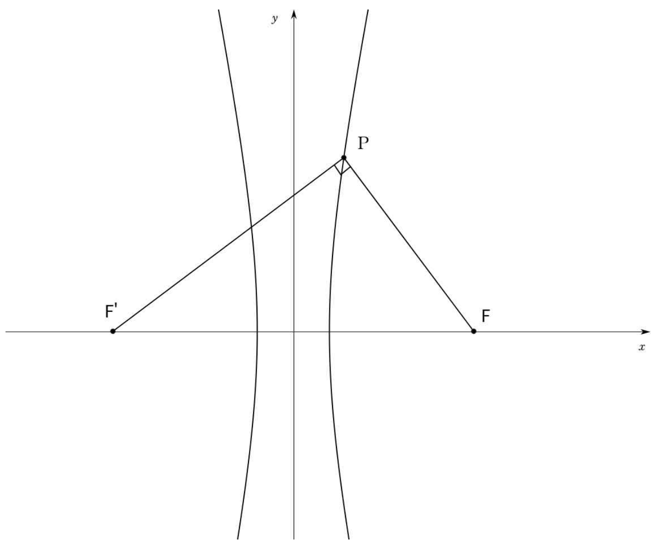
$\angle \mathrm{AFB}=\frac{\pi}{3}$이다. $\frac{4\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ 이므로 $R=\frac{4\sqrt{21}}{3}$

**문제 코멘트**

> 특별할 거 없이 주어진 조건들을 전부 활용하면 풀리는 문제이다. 그나마 변별 포인트는 ∠AFO와 ∠BFO 관계를 식 변형을 통해 ∠AFA′과 ∠BFB′의 관계로 바꾸는 작업이다. 그 후에는 세 각이 모두 60도임을 확인하고 항상 하던 대로 사인법칙.

28번: ①

문제를 읽어보면 쌍곡선 C 위의 점 P와 초점과의 관계가 나와있다. 쌍곡선의 초점의 좌표만이 나와 있으므로 이 조건을 엮어서 쌍곡선을 결정지어야 할 것으로 보인다.

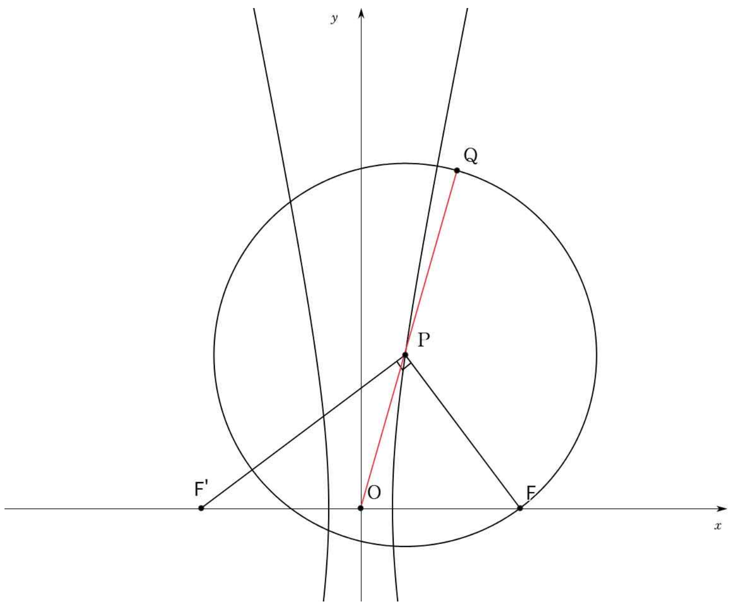



주어진 조건대로 그림을 그리면 다음과 같다. 이제 (가) 조건을 보도록 하자 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$라 하였으므로 선분 PF의 길이와 같은 길이 위의 점, 즉 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원의 자취가 Q의 자취라는 사실을 알 수 있다. (나) 조건의 경우 F와 F′의 중점이 원점 O임이 명확함으로 $|\overrightarrow{\mathrm{QF}}+\overrightarrow{\mathrm{QF'}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{QO}}|$로 바꾸어 생각해보자. 따라서 선분 QO 길이의 최댓값은 11이다.

그러면 선분 QO의 길이가 최댓값인 상황은 어떤 상황일까?

그림과 같이 점 Q, P, O가 일직선 위에 있게 되는 상황일 때가 선분 QO 길이의 값이 최대가 되게 된다.

(단, Q는 제1사분면 위에 존재할 때)




삼각형 F′PF는 직각삼각형이다. 따라서 선분 FO의 길이와 PO의 길이는 5로 같다. 즉 선분 QP의 길이는 6이다. $\overline{FF'}=10$, $\overline{PF}=6$ 이므로 피타고라스에 의해서 선분 PF′의 길이는 8이다.

즉 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$ $2a=2$이다. 따라서 쌍곡선 C의 주축의 길이는 2이다.

**문제 코멘트**

(가) 조건을 통해 점 Q가 원의 자취임을 파악한 후, 직각삼각형을 이용하여 선분 FO와 PO가 같음을 보였으면 선분 QP의 길이를 통해 선분 FP의 길이를 구할 수 있다. 피타고라스로 PF′의 길이를 구한 후 쌍곡선의 정의를 활용하면 되는 문제였다. 이렇게 두 개의 단원을 엮어서 문제를 내는 경우는 어렵지 않게 출제된다.
 겉보기 난이도에 지레 겁먹지 말고 주어진 대로만 진행해보도록 하자.

29번: 8

타원 C에 대한 단축의 길이만 주어졌다. 따라서 타원의 방정식을 결정할 수는 없는 상황이다. 타원을 결정하기 위해서 A에서 그은 접선의 접점이 P, P′이라는 사실과 선분 PP′의 길이가 $4\sqrt{2}$라는 사실을 이용해야 할 것으로 보인다.

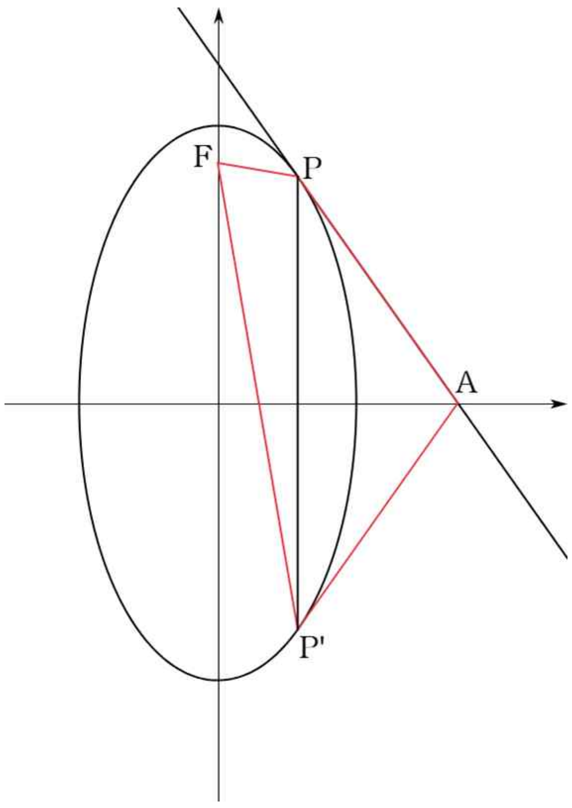
선분 PP′의 중점을 M이라 할 때 선분 PM의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 점 P의 좌표를 $(k, 2\sqrt{2})$라고 둘 수 있다.

타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{a^2}=1$이라 할 수 있다. 점 P는 타원 위의 점이므로 $\frac{k^2}{3}+\frac{8}{a^2}=1$이 성립한다. 또한, 접점공식을 활용하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{k}{3}x+\frac{2\sqrt{2}y}{a^2}=1$이다. 이 접선이 $A(3, 0)$를 지나므로 $k=1$ 임을 알 수 있다. 따라서 $a^2=12$이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$이라고 결정지을 수 있다.

구해야 하는 것은 사각형 PFP′A 의 둘레의 길이이다. 삼각형 PMA의 길이 중 $\overline{PM}=2\sqrt{2}$ , $\overline{MA}=2$ 를 알고 있으므로 피타고라스를 이용하면 $\overline{PA}=2\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 선분 PA와 P′A 는 대칭이므로 두 선분의 합은 $4\sqrt{3}$이다. 선분 PF와 P′F의 길이의 합은 타원의 대칭성을 통해 타원의 장축 길이와 같음을 알 수 있다. 따라서 타원의 장축 길이는 $4\sqrt{3}$, 구하고자 하는 사각형 PFP′A의 둘레의 길이는

$4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 따라서 $a$의 값은 8이다

**참고**



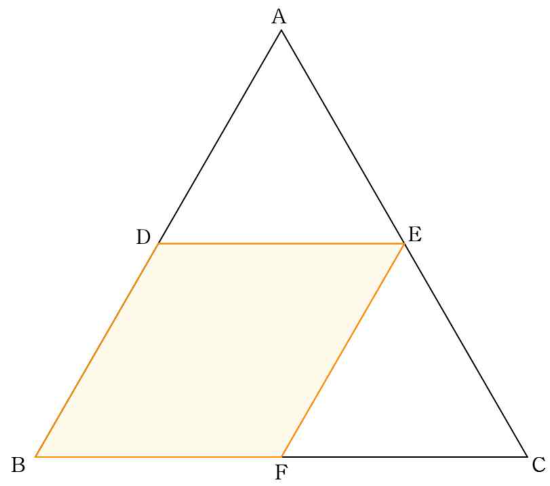

**문제 코멘트**

타원의 방정식이 직접 주어지지 않고 식을 세워 찾아내야 하는 문제이다. 현재 기조상 29번 이차곡선 문제에서 이차곡선의 식을 직접 주지 않고 찾아내어 연립해야 하는 문제가 많이 출제되는 만큼 잊어서는 안 되는 주제이다. 그 후에는 타원의 대칭성을 활용하면 길이 관계를 쉽게 파악하여 답을 구해낼 수 있다.

30번: 669

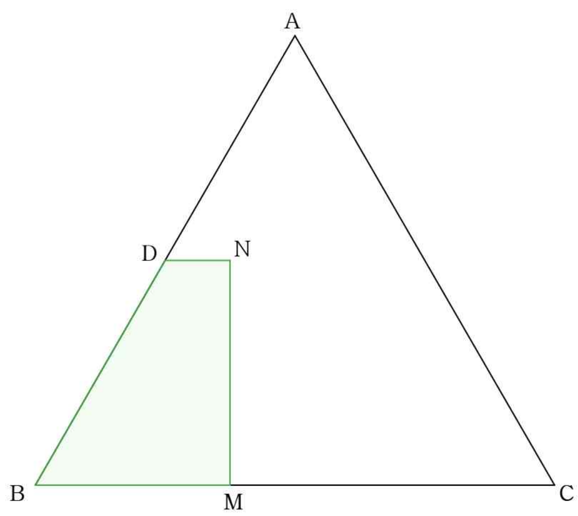
주어진 도형은 간단해 보이지만 (가), (나) 조건은 까다로워 보인다. 하나씩 해석해 보도록 하자. (가) 조건에서 P점의 자취를 줬다. 따라서 P점의 자취를 그려보는 것이 우선일 것이다.

선분 AB의 중점을 D, 선분 AC의 중점을 E, 선분 BC의 중점을 F라 할 때, (가) 조건에 의해서 점 P는 평행사변형 BFED의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

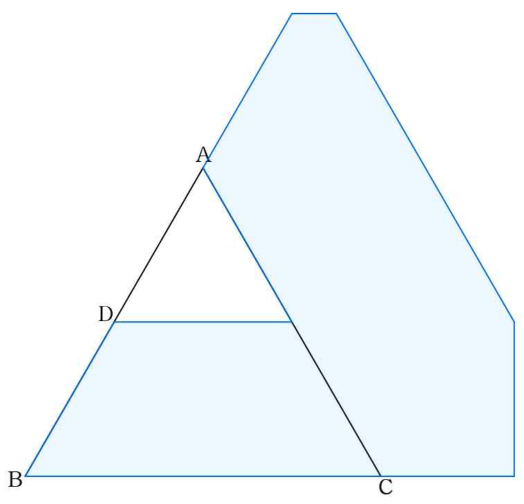



(나) 조건은 복잡해 보인다. 우선 생각해 봐야 할 점은 비슷한 벡터가 존재하느냐인데 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{AP}$는 관련성이 있어 보인다. 시점이 전부 P이므로 $\overrightarrow{AP}$의 시점을 P로 바꿔보도록 하자. 그러면 $\overrightarrow{PA}$로 묶을 수 있다.

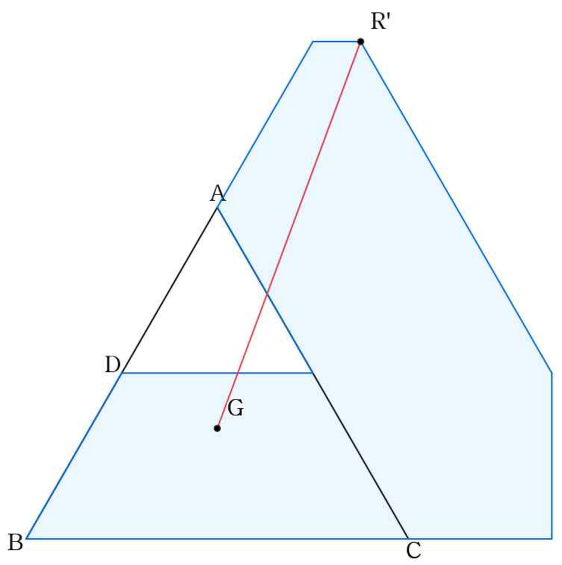
$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} \geq 8$ 따라서 (가), (나) 조건을 전부 만족하는 P의 자취는 다음과 같다.



이제 점 R의 자취를 구해보도록 하자. 점 R은 점 P의 자취를 점 Q의 자취만큼 이동시킨 도형의 자취이다.




따라서 파란색 면적만큼의 자취를 갖는다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때$|\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{CR}|^2=9|\overrightarrow{GR}|^2$ 따라서 R의 자취 중에서 점 G와의 거리의 최댓값을 구하면 된다. 최댓값을 가질 때의 R을 R'이라 할 때 다음과 같은 상황일 때가 $\overrightarrow{GR'}$이다.




따라서 $9|\overrightarrow{GR'}|^2=9\times\left\{\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2+9\right\}=588+81=669$

**문제 코멘트**

> 도형의 자취를 파악하는 것이 중요한 문제였다. 30번인 만큼 조건해석이나 도형의 자취를 그리는 것이 까다롭긴 하나 주어진 대로 따라가면 어려운 문제는 아니었을 것이다. 이러한 기출문제는 많이 출제되었기 때문에 만약 이 문제가 어려웠다면 반복하여 기출학습을 하도록 하자.