

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호																		
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

너는 달빛에 더 아름답다

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하십시오.

- **공통과목** 1~8쪽
- **선택과목**
 - 확률과 통계 9~12쪽
 - 미적분 13~16쪽
 - 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

오르비 김0한

13. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ 이 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) \geq k(x-1)+1$$

가 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

14. 자연수 p 와 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = n^2 - pn + p + 1$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^5 (2k-1)a_k = 44$ 일 때, $p + \sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은? [4점]

- ① -4 ② 1 ③ 6 ④ 11 ⑤ 16

$$|a_1| = 2$$

$$|a_n| = 2n - p - 1 \quad (n \geq 2)$$

$$|a_2| = 3 - p \geq 0$$

$$p \leq 3$$

$$\sum |a_k| + 2 \sum |a_k| = 44$$

$$i) p=1 \quad a_1 \quad 3a_2 \quad 5a_3 \quad 7a_4 \quad 9a_5$$

$$|a_n| = 2n - 1 \quad 2 \quad 6 \quad 20 \quad 42 \quad 72$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 6 & 20 & 42 & 72 \\ \text{or} & & & & & \\ -2 & -6 & -20 & -42 & -72 \end{array}$$

정답 44, 44, 44, 44, 44

$$ii) p=2 \quad a_1 \quad 3a_2 \quad 5a_3 \quad 7a_4 \quad 9a_5$$

$$|a_n| = 2n - 3 \quad 2 \quad 3 \quad 15 \quad 35 \quad 63$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 15 & 35 & 63 \\ \text{or} & & & & & \\ -2 & -3 & -15 & -35 & -63 \end{array}$$

정답 44, 44, 44, 44, 44

$$iii) p=3 \quad a_1 \quad 3a_2 \quad 5a_3 \quad 7a_4 \quad 9a_5$$

$$|a_n| = 2n - 4 \quad 2 \quad 0 \quad 10 \quad 28 \quad 54$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 10 & 28 & 54 \\ \text{or} & & & & & \\ -2 & -10 & -28 & -54 \end{array}$$

정답 44, 44, 44, 44, 44

$$p=2 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$$

$$-2 \quad 1 \quad 3 \quad -5 \quad 7$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 4$$

$$p + \sum_{n=1}^5 a_n = 6$$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + 1) = 40, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = 90$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = |x^2 - 4x| f(x)$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$ 의 극댓값을 구하시오. [3점]

20. 상수 k ($0 < k < \frac{\pi}{6}$)에 대하여 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 정의된

함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4k - x) & (-\pi \leq x < k) \\ \sin 3x & (k \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

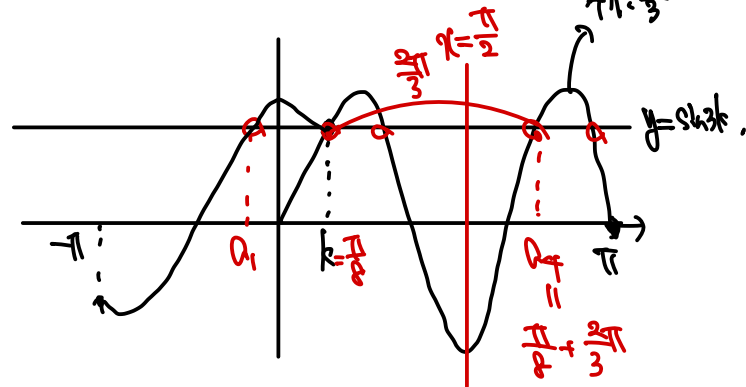
가 있다. 집합 $A = \{x \mid f(x) = \sin 3k\}$ 의 원소의 개수는 5 이고,

모든 원소의 합은 $\frac{15}{8}\pi$ 이다. 집합 A 의 원소 중 $(m-1)$ 번째로

작은 수를 a_{m-1} 이라고 하자. $a_{m-1} + k$ 의 값은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, $m \geq 2$) [4점]



$$a_1 + 2\pi = \frac{15}{8}\pi \quad a_1 = -\frac{\pi}{8}$$

$$\sin 4k + \frac{\pi}{8} = \sin 3k$$

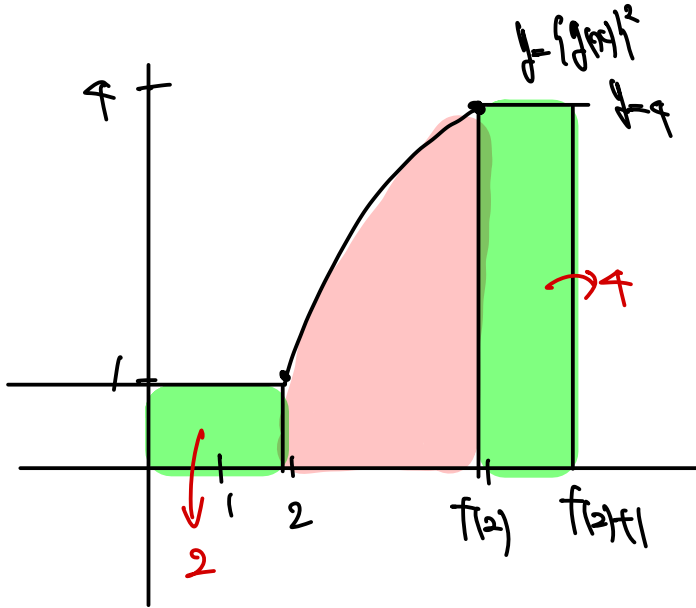
$$4k + \frac{\pi}{8} = 3k \quad 4k + \frac{\pi}{8} = \pi - 3k$$

$$k = -\frac{\pi}{8}$$

$$7k = \frac{7\pi}{8} \quad k = \frac{\pi}{8}$$

27. 실수 t 에 대하여 곡선 $y = xe^x + k$ 가 직선 $y = e^t x$ 와 오직 한 점 P 에서 만나도록 하는 실수 k 의 값을 $f(t)$ 라 하자. $t = a$ 에서 점 P 의 x 좌표가 2일 때, $f'(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수) [3점]

- ① $2e^2$ ② $4e^2$ ③ $6e^2$ ④ $8e^2$ ⑤ $10e^2$



$$\int_0^{f(2)+1} f(x)^2 dx = 6 + \int_2^{f(2)} f(x)^2 dx.$$

$$= \frac{1}{3}(e^8 - e + 11)$$

$$\int_{f(2)}^{f(2)+1} f(x)^2 dx. \quad x = f(t)$$

$$dx = f'(t) dt.$$

$$= \int_1^2 t^2 f(t) dt = \int_1^2 t^2 e^{t^3} dt - \int_1^2 t^2 dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} e^{t^3} \right]_1^2 - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(e^8 - e) - \frac{7}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(e^8 - e - 11)$$

28. 구간 $[1, \infty)$ 에서 정의되고 $f(1) = 2$, $f'(x) = e^x - 1$ 인 함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가

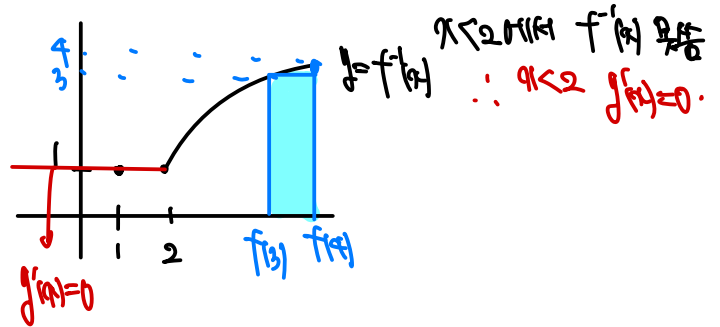
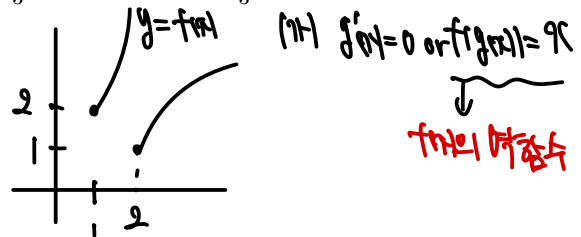
다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^{f(2)+1} \{g(x)\}^2 dx$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x)\{f(g(x)) - x\} = 0$ 이다.

(나) $g(1) = 1$, $\int_{f(3)}^{f(4)} g(x) dx = 2 \int_3^4 f'(x) dx$

- ① $\frac{1}{3}(e^8 - e + 14)$ ② $\frac{1}{3}(e^8 - e + 13)$ ③ $\frac{1}{3}(e^8 - e + 12)$

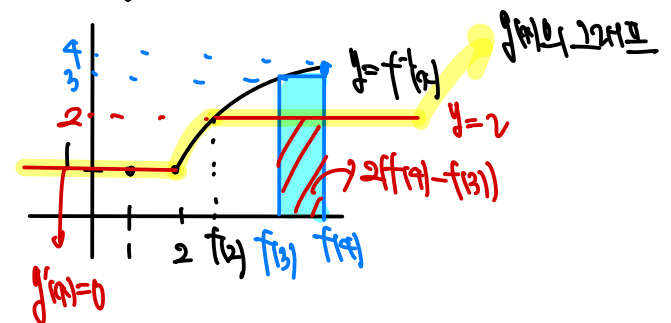
- ④ $\frac{1}{3}(e^8 - e + 11)$ ⑤ $\frac{1}{3}(e^8 - e + 10)$



$$\int_{f(3)}^{f(4)} g(x) dx = 2(f(4) - f(3))$$

$$\therefore g(x) = f'(x) \quad \int_{f(3)}^{f(4)} g(x) dx > 3(f(4) - f(3))$$

$$\therefore g(x) = 0$$



단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \sin^2 \frac{n\pi}{4} = \frac{18}{5}$$

을 만족시키고, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = S_n$ 이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_n - \frac{9}{2} \right| = S$ 로 수렴할 때, $80 \times S$ 의 값을 구하시오. [4점]30. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \sin x(a \sin x - \cos 2x + b)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $(ab)^2$ 의 값을 구하시오. [4점](가) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 5이고,
함수 $f(x)$ 의 최솟값은 존재하지 않는다.(나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서방정식 $f(x) = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

Handwritten solution for problem 30:

First, the function is simplified using trigonometric identities:

$$f(x) = 2\sin^3 x + a\sin^2 x + (b-1)\sin x$$

$$= (2x^3 + ax^2 + (b-1)x) \circ (\sin x)$$

Graphs are shown for $y=1$ and $y=\frac{1}{2}$ to analyze the number of roots.

For condition (가), the number of extrema is 5, and the minimum value does not exist. This leads to the equation:

$$g(x) = 2(x-k)^2(x-1) + \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = -2k^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2}$$

For condition (나), the equation $f(x) = \frac{1}{2}$ has 3 distinct real roots. This leads to the equation:

$$g(x) = 2(x - \frac{1}{2})^2(x-1) + \frac{1}{2} = 2x^3 - 4x^2 + \frac{5}{2}x$$

Finally, the values of a and b are determined:

$$a = -4, \quad b = \frac{1}{2}, \quad ab = -4$$

The final answer is $(ab)^2 = 16$.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.