

아이디 모의고사 시즌1 1회 정답 및 해설

• 공통 영역 •

정답

1	③	2	①	3	①	4	①	5	⑤
6	③	7	⑤	8	②	9	④	10	⑤
11	②	12	④	13	④	14	③	15	②
16	10	17	72	18	85	19	19	20	40
21	12	22	617						

해설

1. [정답] ③

$$27^{\frac{4}{3}} \div \sqrt[4]{3^6} = 3^4 \div 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3}$$

2. [정답] ①

미분계수의 정의로부터 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이고
 $f'(x) = 8x + 2$ 이므로 $f'(1) = 10$

3. [정답] ①

$a_5 + a_6 + a_7 = 3a_6 = 24$ 이므로 $a_6 = 8$ 이고,
 $\{a_n\}$ 의 공차가 -3 이므로
 $a_n = -3(n-6) + 8$ 이다.
 $a_{10} = -3 \times 4 + 8 = -4$

4. [정답] ①

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ 에서 함수 $f(x)$ 가
 $x=0$ 과 $x=1$ 에서 연속이므로
 $f(0) + f(1) = 4$ 이다. $f(0) = f(1) + 2$ 이므로
위의 두 식을 연립하면 $f(0) = 3, f(1) = 1$ 이다.
곧, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

5. [정답] ⑤

$$f'(x) = x^3 + 2x^2 + 2 + (x+1)(3x^2 + 4x)$$

이므로 $f'(1) = 5 + 2 \times 7 = 19$

6. [정답] ③

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta = \frac{1}{3},$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{3} \text{ 이고, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\because 0 < \theta < \pi) \text{ 이다. 따라서 } \tan\theta = -2\sqrt{2} \text{ 이고}$$

$$\sin\theta(1 + \tan^2\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \{1 + (-2\sqrt{2})^2\} = 6\sqrt{2}$$

7. [정답] ⑤

준식에서 양변에 $x=a$ 를 대입하면,
 $0 = a(a-2)^2$ 이고, $a=2$ ($\because a \neq 0$) 이다.
준식의 양변을 미분하면,
 $f(x) = (x-2)^2 + 2x(x-2)$ 이고,

$$f(3) = 1 + 3 \times 2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$a + f(3) = 2 + 7 = 9$$

8. [정답] ②

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{1}{a}} = 2 \text{에서 양변을 } a \text{ 제곱하면,}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = 2^a \dots\dots \text{㉠ 이고}$$

$$2^{\frac{4}{b}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \dots\dots \text{㉡ 이므로}$$

$$\text{㉠과 ㉡에서 } 2^a \times 2^{\frac{4}{b}} = 1 \text{ 이고,}$$

$$2^{a + \frac{4}{b}} = 2^0 \text{ 이므로 } a + \frac{4}{b} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{곧, } a = -\frac{4}{b} \text{ 이므로}$$

$$a \times b = \left(-\frac{4}{b}\right) \times b = -4$$

9. [정답] ④

18 이하의 자연수 x 에 대하여 $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ 의
값으로 가능한 값은 $0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$ 뿐이다.

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = 0 \text{ 일 때, } x = 6, 12, 18 \text{ 이고}$$

가능한 자연수 x 는 3개다.

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{1}{4} \text{ 일 때, } x = 1, 5, 7, 11, 13, 17 \text{ 이고}$$

가능한 자연수 x 는 6개다.

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{3}{4} \text{ 일 때, } x = 2, 4, 8, 10, 14, 16 \text{ 이고}$$

가능한 자연수 x 는 6개다.

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = 1 \text{ 일 때, } x = 3, 9, 15 \text{ 이고}$$

가능한 자연수 x 는 3개다.

따라서 부등식 $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) < k$ 를 만족시키는

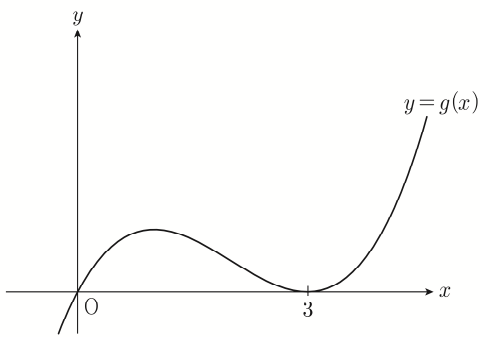
자연수 x 의 개수가 9개이므로 $\frac{1}{4} < k \leq \frac{3}{4}$ 이다.

곧, 실수 k 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$

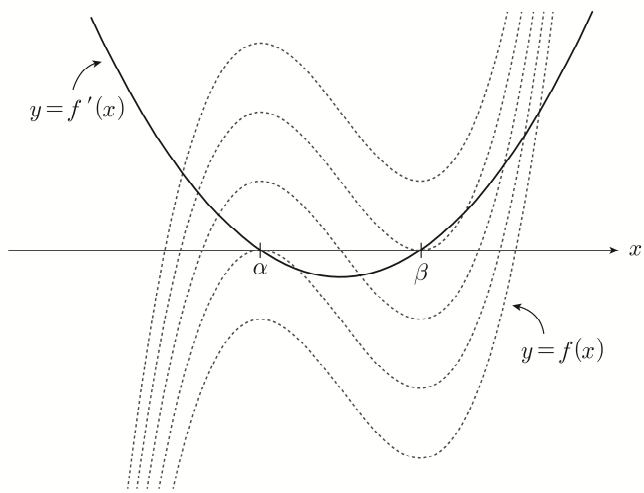
10. [정답] ⑤

함수 $g(x) = f(x) \times f'(x)$ 라 두면,
부등식 $f(x) \times f'(x) < 0$ 의 해가 $x < 0$ 이므로
 $g(0) = 0 \dots\dots \text{㉠ 이고,}$
 $x < 0$ 일 때, $g(x) < 0$,
 $x \geq 0$ 일 때, $g(x) \geq 0 \dots\dots \text{㉡ 이다.}$
 $f(3) \times f'(3) = 0$ 이므로 $g(3) = 0$ 이고,
㉡의 부등식에 의해 함수 $g(x)$ 는 아래의 그림과
같이 $x=3$ 에서 x 축에 접해야 하므로
 $g'(3) = 0$ 이고, $g(3) = g'(3) = 0 \dots\dots \text{㉢ 이다.}$
또 방정식 $g(x) = 0$ 는 ㉡에 의해
최대 3개의 실근을 가질수 있으며,
이 경우 3개의 실근을 $0, 3, a (a > 0)$ 라 두면,
 $g(a) = g'(a) = 0$ 이어야 한다.

수학 영역



i) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근이 2개인 경우
 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ ($\alpha<\beta$)인 두 실수 α, β 에 대하여
 $g(\alpha)=g(\beta)=0$ 이므로
 두 실수 α, β 중 적어도 하나는 0이거나 3이다.
 함수 $y=f'(x)$ 와 가능한 함수 $y=f(x)$ 를
 좌표평면에 그리면 아래와 같다.



방정식 $f(x)=0$ 이 세 개의 실근을 가지면,
 방정식 $g(x)=0$ 이 다섯 개의 실근을 가지므로
 함수 $y=g(x)$ 가 부호변화가 일어나는 지점이
 다섯 지점이 존재하므로 ㉠과 ㉡에 모순이다.
 방정식 $f(x)=0$ 이 두 개 이하 실근을 갖더라도,
 함수 $y=g(x)$ 가 부호변화가 일어나는 지점이
 두 지점 이상 존재하므로 ㉠과 ㉡에 모순이다.
 따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는
 존재하지 않는다.

ii) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근이 0개인 경우
 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고
 방정식 $f(x)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가지므로
 ㉠과 ㉡을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는
 존재하지 않는다.

iii) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근이 1개인 경우
 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고
 방정식 $f(x)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가진다.
 $f(\alpha)=0$ 인 실수 α 가 존재하고
 $f'(\beta)=0$ 인 실수 β 에 대하여 $g(\beta)=g'(\beta)=0$ 이므로 ㉠과 ㉡에
 의해 $\alpha=0, \beta=3$ 이다.
 즉, $f(x)=(x-3)^3+k$ (k 는 상수)에 대하여
 $f(0)=0$ 이므로 $-27+k=0, k=27$ 이다.
 그러므로 $f(x)=(x-3)^3+27$

i), ii), iii)에 의해 $f(5)=8+27=35$

11. [정답] ㉡

$$f'(x)g(x)=3x^2(x-4)^2\cdots\cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(x)g'(x)=2x^2(x-2)(x-6)\cdots\cdots \textcircled{㉡}$$

라 하자. ㉠과 ㉡에 의해 $f(x)g(x)$ 는 5차식이고,
 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 각각 1이므로
 ㉠에서 $f(x)$ 는 삼차함수, ㉡에서 $g(x)$ 는 이차함수이다.

㉠에서

$$g(x)=(x-4)^2 \text{ 이라면 } g'(x)=2(x-4) \text{ 이므로}$$

㉡의 우변에 $(x-4)$ 가 인수로 있어야 하니 모순이다.

㉠에서

$$g(x)=x^2 \text{ 이라면 } f'(x)=3(x-4)^2 \text{ 이다. 그런데 } g'(x)=2x \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } f(x)=x(x-2)(x-6) \text{ 여야 하고}$$

$$\text{이때 } f'(x)=3x^2-16x+12 \text{ 이므로 모순이다.}$$

$$\text{따라서 } g(x)=x(x-4) \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 } g'(x)=2(x-2) \text{ 이므로 } \textcircled{㉡} \text{에서 } f(x)=x^2(x-6) \text{ 이다.}$$

$$f(7)+g(7)=49+21=70$$

12. [정답] ㉣

$$a_{n+1}a_{n+2}=a_na_{n+3}+8 \text{ 이므로}$$

$$(a_n+d)(a_n+2d)=a_n(a_n+3d)+8, 2d^2=8, d^2=4$$

이므로 $d=2$ 또는 $d=-2$ 이다.

$$a_1>0 \text{ 이므로 } d=2 \text{ 이면,}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$ 이고,

$$b_n=4, c_n=16 \text{ 이므로 두 수열 } b_n \text{ 과 } c_n \text{ 의}$$

최솟값이 동일하지 않다. 따라서 $d=-2$ 이고,

$$a_n \geq 0 \text{ 을 만족시키는 자연수 } n \text{ 의 최댓값을 } m(m>2) \text{ 이라 하자.}$$

$$\text{이때 } 0 \leq a_m < 2 \text{ 이고,}$$

두 수열 b_n 과 c_n 의 최솟값이 동일하므로

$$\text{두 수열 } B_n=\{|a_n|-|a_{n+1}|\} \text{ 과 } C_n=\{|a_n|-|a_{n+2}|\} \text{ 의}$$

최솟값도 동일하다.

$$\text{두 수열 } B_n \text{ 과 } C_n \text{ 의 최솟값을 } a_m \text{ 의 값이 1보다 큰지 작은지에}$$

따라 경우를 나누어 생각하자.

i) $0 \leq a_m < 1$ 인 경우

$$\text{수열 } B_n=\{|a_n|-|a_{n+1}|\} \text{ 은 } n=m \text{ 일 때 최소이고,}$$

$$\text{최솟값은 } 2-2a_m \text{ 이다.}$$

$$\text{수열 } C_n=\{|a_n|-|a_{n+2}|\} \text{ 은 } n=m-1 \text{ 일 때 최소이고,}$$

$$\text{최솟값은 } 2a_m \text{ 이다.}$$

$$\text{곧, } 2-2a_m=2a_m, a_m=\frac{1}{2} \text{ 이고,}$$

$$a_n=-2(n-m)+\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$13< a_1 < 16 \text{ 이므로 } 13< -2(1-m)+\frac{1}{2} < 16,$$

$$13< 2m-\frac{3}{2} < 16, \frac{29}{4} < m < \frac{35}{4} \text{ 이고}$$

따라서 가능한 자연수 m 의 값은 8이고,

$$\text{가능한 } a_1 \text{의 값은 } a_1=\frac{29}{2} \text{ 이다.}$$

수학 영역

ii) $1 \leq a_m < 2$ 인 경우

수열 $B_n = \{||a_n| - |a_{n+1}||\}$ 은 $n = m$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $2a_m - 2$ 이다.

수열 $C_n = \{||a_n| - |a_{n+2}||\}$ 은 $n = m$ 일 때 최소이고, 최솟값은 $4 - 2a_m$ 이다.

곧, $2a_m - 2 = 4 - 2a_m$, $a_m = \frac{3}{2}$ 이고,

$a_n = -2(n - m) + \frac{3}{2}$ 이다.

$13 < a_1 < 16$ 이므로 $13 < -2(1 - m) + \frac{3}{2} < 16$,

$13 < 2m - \frac{1}{2} < 16$, $\frac{27}{4} < m < \frac{33}{4}$ 이고

따라서 가능한 자연수 m 의 값은 7 또는 8 이고,

가능한 a_1 의 값은 $a_1 = \frac{27}{2}$ 또는 $a_1 = \frac{31}{2}$ 이다.

따라서 i) 과 ii) 에 의해 가능한 a_1 의 값의 합은

$$\frac{27}{2} + \frac{29}{2} + \frac{31}{2} = \frac{87}{2}$$

13. [정답] ④

함수 $g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 2) \\ f(x) & (x > 2) \end{cases}$ 가

$x = 2$ 에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

이고, $g'(x) = \begin{cases} 2x & (x \leq 2) \\ f'(x) & (x > 2) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g'(x)$ 이다.

곧, $2^2 = f(2)$, $4 = f'(2)$ 이므로

$f(x) = a(x - 2)^2 + 4x - 4$ (a 는 상수)라 두자.

방정식 $h(x) = g'(t)(x - t) + g(t)$ 의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 t 의 값의 범위가 $t \leq 5$ 뿐이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수 a 의 값의 부호에 따라 경우를 나누어 생각해 보자.

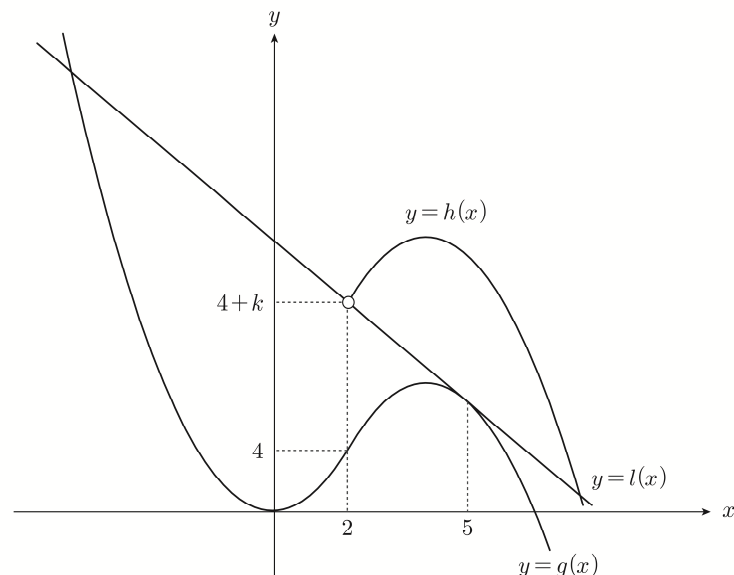
i) $a > 0$

k 의 값에 관계없이 $t \rightarrow -\infty$ 이면

방정식 $h(x) = g'(t)(x - t) + g(t)$ 의 실근의 개수가 1 이므로 모순이다.

ii) $a < 0$

$t = 2$ 일 때, 방정식 $h(x) = g'(t)(x - t) + g(t)$ 의 실근의 개수가 2가 되려면 $k > 0$ 이다.



$t \leq 5$ 일 때, 방정식 $h(x) = g'(t)(x - t) + g(t)$ 의 실근의 개수가 2 이므로, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(5, g(5))$ 에서의 접선

$$l(x) = g'(5)(x - 5) + g(5)$$

에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = l(2)$ 이다.

곧, $f(2) + k = f'(5)(2 - 5) + f(5)$,

$$k + 4 = -3(6a + 4) + 9a + 16,$$

$$k = -9a \quad \text{..... ㉠}$$

이고,

$h(4) = 17$ 이므로

$$f(4) + k = 17,$$

$$4a + k = 5 \quad \text{..... ㉡}$$

이다.

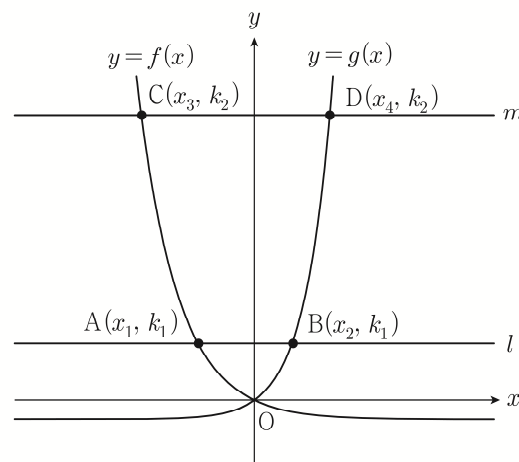
㉠과 ㉡을 연립하면 $a = -1$, $k = 9$ 이다.

따라서 $k = 9$

14. [정답] ③

점 A 의 좌표를 (x_1, k_1) , 점 B 의 좌표를 (x_2, k_1) ,

점 C 의 좌표를 (x_3, k_2) , 점 D 의 좌표를 (x_4, k_2) 라 하자.



$$a^{-x_1} - 1 = b^{x_2} - 1 = k_1, \quad x_2 - x_1 = \log_b(k_1 + 1) + \log_a(k_1 + 1)$$

이고

$$a^{-x_3} - 1 = b^{x_4} - 1 = k_2, \quad x_4 - x_3 = \log_b(k_2 + 1) + \log_a(k_2 + 1)$$

이다.

$\overline{CD} = 2 \overline{AB}$ 이므로 $x_4 - x_3 = 2(x_2 - x_1)$ 이고

$$\log_b(k_2 + 1) + \log_a(k_2 + 1) = 2(\log_b(k_1 + 1) + \log_a(k_1 + 1)),$$

$$\log_b \frac{(k_1 + 1)^2}{k_2 + 1} = \log_a \frac{k_2 + 1}{(k_1 + 1)^2}$$

이다.

$$\frac{(k_1+1)^2}{k_2+1}=k \text{ (} k \text{는 양의 실수) 라 두면,}$$

$$\log_b k = \log_a \frac{1}{k} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이다.

$$k > 1 \text{ 이면 } \log_b k > 0, \log_a \frac{1}{k} < 0 \text{ 이므로}$$

㉠ 에 모순이고,

$$k < 1 \text{ 이면 } \log_b k < 0, \log_a \frac{1}{k} > 0 \text{ 이므로}$$

㉠ 에 모순이다.

$$\text{곧, } k=1, (k_1+1)^2=k_2+1 \text{ 이고}$$

$$a^{-x_1}=k_1+1, a^{-x_3}=k_2+1 \text{ 이므로}$$

$$x_3=2x_1 \dots\dots \textcircled{㉡},$$

$$b^{x_2}=k_1+1, b^{x_4}=k_2+1 \text{ 이므로}$$

$$x_4=2x_2 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이다.

한편 직선 AC의 방정식은

$$y = \frac{k_2 - k_1}{x_1}(x - x_1) + k_1,$$

$$y = \frac{k_2 - k_1}{x_1}x + 2k_1 - k_2$$

이고 직선 BD의 방정식은

$$y = \frac{k_2 - k_1}{x_2}(x - x_2) + k_1,$$

$$y = \frac{k_2 - k_1}{x_2}x + 2k_1 - k_2$$

이므로 두 직선의 y 절편은 동일하고, 두 직선의 교점의 좌표는 $(0, 2k_1 - k_2)$ 이다.

$$\text{곧, } 2k_1 - k_2 = -9 \text{ 이고 } (k_1+1)^2 = k_2+1 \text{ 이므로}$$

$$\text{두 식을 연립하면 } (k_1+1)^2 = 2k_1+10,$$

$$(k_1)^2 = 9, k_1 = 3 \text{ (} \because k_1 > 0 \text{) 이다.}$$

$$k_2 = 15 \text{ 이고 삼각형 OCD의 넓이가 75 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times (x_4 - x_3) \times 15 = 75, x_4 - x_3 = 10$$

$$\textcircled{㉢} \text{에 의해 } 2x_2 - x_3 = 10 \dots\dots \textcircled{㉣}$$

이다.

$$\text{한편 } \overline{BC} = 4\sqrt{13} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (15 - 3)^2 = 8^2 + 12^2$$

$$\therefore x_2 - x_3 = 8 \dots\dots \textcircled{㉤}$$

이고, 두 식 ㉣, ㉤을 연립하면

$$x_2 = 2, x_4 = 4, x_1 = -3, x_3 = -6 \text{ 이다.}$$

따라서 점 A의 좌표가 $(-3, 3)$, 점 B의 좌표가 $(2, 3)$ 이므로

이를 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 에 대입하면

$$a=2^{\frac{2}{3}}, b=2 \text{ 이고, } a \times b = 2^{\frac{2}{3}} \times 2 = 2^{\frac{5}{3}}$$

15. [정답] ㉡

$$\text{함수 } g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ a-f(x) & (x \geq 1) \end{cases} \text{에}$$

대하여 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - g(1)|}{(x-1)^2} = b \dots\dots \textcircled{㉦}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} \{g(x) - g(1)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{g(x) - g(1)\} = 0$$

이고 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$f(1) = a - f(1), a = 2f(1) \text{ 이고}$$

$$g(x) - g(1) = \begin{cases} f(x) - f(1) & (x < 1) \\ f(1) - f(x) & (x \geq 1) \end{cases} \text{이다.}$$

$$\textcircled{㉦} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - g(1)|}{(x-1)^2} \text{의 극한값이 수렴하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|f(1) - f(x)|}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|f(x) - f(1)|}{(x-1)^2}$$

이다. 곧, 다항식 $f(x) - f(1)$ 은 $(x-1)^2$ 을 인수로 가지므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여

$$f(x) - f(1) = (x-1)^2 h(x) \dots\dots \textcircled{㉧}$$

이다. (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x-1)}{g(x) - g(1)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x-1)}{g(x) - g(1)} + 4$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x-1)}{f(1) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x-1)}{f(x) - f(1)} + 4$$

$$\text{이다. } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x-1)}{f(1) - f(x)} = \alpha \text{라 두고 위의 식에 대입하면}$$

$$\alpha = -\alpha + 4, \alpha = 2 \text{ 이다. 곧,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x-1)}{f(x) - f(1)} = -2 \dots\dots \textcircled{㉨}$$

$$\text{이고 } \textcircled{㉨} \text{을 } \textcircled{㉧} \text{에 대입하면, } \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x-1)}{(x-1)^2 h(x)} = -2 \text{ 이다.}$$

$$f(x-1) = (x-1)^2 (x^2 + c'x + d') \text{ (} c', d' \text{는 상수)}$$

라 두면,

$$f(x) = x^2(x^2 + cx + d) \text{ (} c, d \text{는 상수)} \dots\dots \textcircled{㉩}$$

이다.

$$\textcircled{㉩} \text{에서 } f'(1) = 0 \text{ 이므로 이를 } \textcircled{㉨} \text{에 대입하면,}$$

$$f'(x) = 2x(x^2 + cx + d) + x^2(2x + c) \text{ 이므로}$$

$$2 + 2c + 2d + 2 + c = 0, 3c + 2d = -4 \text{ 이다.}$$

한편 ㉨을 ㉩에 대입하면,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)^2((x-1)^2 + c(x-1) + d)}{x^2(x^2 + cx + d) - (1 + c + d)} = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)^2(x^2 + (c-2)x + 1 - c + d)}{(x-1)^2(x^2 + (c+2)x + 2c + d + 3)} = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^2 + (c-2)x + 1 - c + d)}{(x^2 + (c+2)x + 2c + d + 3)} = -2,$$

$$\frac{1 + (c-2) + 1 - c + d}{1 + (c+2) + 2c + d + 3} = -2,$$

수학 영역

$$\frac{d}{3c+d+6}=-2, \quad d+6c+2d+12=0, \\ 2c+d=-4$$

이다. 이를 $3c+2d=-4$ 와 연립하면, $c=-4$, $d=4$ 이다.

곧, $f(x)=x^2(x^2-4x+4)=x^2(x-2)^2$ 이고
 $a=2f(1)=2$ 이다.

㉠에 $f(x)$ 의 식을 대입하면,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)-f(x)}{(x-1)^2}=b, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2(x^2-2x-1)}{(x-1)^2}=b, \\ -(1-2-1)=b, \\ b=2$$

이다.

따라서 $a+b=2+2=4$

16. [정답] 10

부등식 $\log_2(x^2+16) \leq 5$ 의 해는

$$x^2+16 \leq 32, \quad x^2 \leq 16, \quad -4 \leq x \leq 4 \text{ 이므로}$$

따라서 가능한 자연수 x 의 값의 합은

$$1+2+3+4=10$$

17. [정답] 72

주어진 $f'(x)$ 의 식으로부터

$$f(x)=3x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C \quad (C \text{는 상수})$$

$$\text{이때 } f(1)=4 \text{ 이므로 } 4=\frac{5}{2}+C, \quad C=\frac{3}{2}$$

$$f(3)=81-\frac{27}{2}+3+\frac{3}{2}=72$$

18. [정답] 85

$$\text{함수 } f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (|x|<1) \\ ax^2+bx & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \text{ 이고,}$$

$$a-b=-2+3=1 \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{함수 } f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (|x|<1) \\ ax^2+bx & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \text{ 이고,}$$

$$a+b=2+3=5 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하면, $a=3, b=2$ 이다.

$$\text{따라서 } f(a+b)=f(5)=3 \times 5^2+2 \times 5=85$$

19. [정답] 19

$$a_n+a_{n+1}=2n+1 \dots\dots \text{㉠ 이고,}$$

$$a_{n+1}+a_{n+2}=2n+3 \dots\dots \text{㉡ 이다.}$$

㉡에서 ㉠을 변변 빼면 $a_{n+2}-a_n=2$ 이므로

$$a_{19}=a_1+2 \times 9=20 \text{ 이고,}$$

㉠에서 $a_{19}+a_{20}=39$ 이므로 $a_{20}=19$ 이다.

20. [정답] 40

사각형 ABCD에서 $\angle AEB=\angle CED=\theta$

라 하자. 삼각형 ABE의 외접원의 넓이와

삼각형 CDE의 외접원의 넓이가 동일하므로

두 외접원의 반지름의 길이가 같다.

삼각형 ABE의 외접원의 반지름을 R_1 이라 하면,

$$R_1=\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} \text{ 이고,}$$

삼각형 CDE의 외접원의 반지름을 R_2 이라 하면,

$$R_2=\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta}=\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} \text{ 이고, } \overline{AB}=\overline{CD} \text{ 이다.}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=3, \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AE}=a, \overline{BE}=3a \text{ 라 두고,}$$

$$\overline{DE}=b, \overline{CE}=2b \text{ 라 두자.}$$

삼각형 ABE에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=a^2+(3a)^2-2 \times a \times 3a \times \cos \theta,$$

$$\overline{AB}^2=10a^2-6a^2 \times \cos \theta$$

이고, 삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=b^2+(2b)^2-2 \times b \times 2b \times \cos \theta,$$

$$\overline{CD}^2=5b^2-4b^2 \times \cos \theta$$

이다.

$$\overline{AB}=\overline{CD} \text{ 이므로}$$

$$10a^2-6a^2 \times \cos \theta=5b^2-4b^2 \times \cos \theta \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{이다. } \cos(\angle DCE)=\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로}$$

삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 의하여

$$b^2=\overline{CD}^2+(2b)^2-2 \times \overline{CD} \times 2b \times \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\overline{CD}^2-\frac{8b}{\sqrt{5}} \times \overline{CD}+3b^2=0,$$

$$\overline{CD}=\frac{4b}{\sqrt{5}} \pm \frac{b}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{CD}=\sqrt{5}b \text{ 또는 } \overline{CD}=\frac{3b}{\sqrt{5}} \text{ 이다.}$$

$$\overline{CD}>\overline{CE} \text{ 이므로 } \overline{CD}=\sqrt{5}b \text{ 이고,}$$

$$\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2 \text{ 이므로 삼각형 CDE는 직각삼각형이다.}$$

$$\therefore \angle AEB=\angle CED=\frac{\pi}{2} \text{ 이고, } \text{㉠에서 } \cos \theta=0 \text{ 이므로}$$

$$10a^2=5b^2, \quad b=\sqrt{2}a \text{ 이다.}$$

수학 영역

한편 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times a^2 \times (1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 14+14\sqrt{2},$$

$$a^2 = 4, a = 2 \text{ 이다. 따라서 } \overline{AB}^2 = 10a^2 = 40$$

21. [정답] 12

점 P가 시각 $t=0$ 부터 $t=x$ 까지 움직인 거리를 $f(x)$ 라 하면,

$$f(x) = \int_0^x |v(t)| dt \text{ 이고,}$$

점 P의 시각 $t=x$ 에서의 위치를 $g(x)$ 라 하면,

점 P가 점 A(a)에서 출발하므로

$$g(x) = \int_0^x v(t) dt + a = 2t^2 + bt + a \text{ 이다.}$$

따라서 함수 $|f(x) - g(x)|$ 를 $h(x)$ 라 두면,

$$h(x) = \left| \int_0^x \{ |v(t)| - v(t) \} dt - a \right| \text{ 이고,}$$

$v(t) = 4x + b$ 에서 $b \geq 0$ 이면

양의 실수 x 에 대하여, $h(x) = |a|$ 이므로 (나)조건에 모순이다.

$$\text{따라서 } b < 0 \text{ 이고 } v\left(-\frac{b}{4}\right) = 0 \text{ 이다.}$$

$a \leq 0$ 이면 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않으므로 $a > 0$ 이어야 한다.

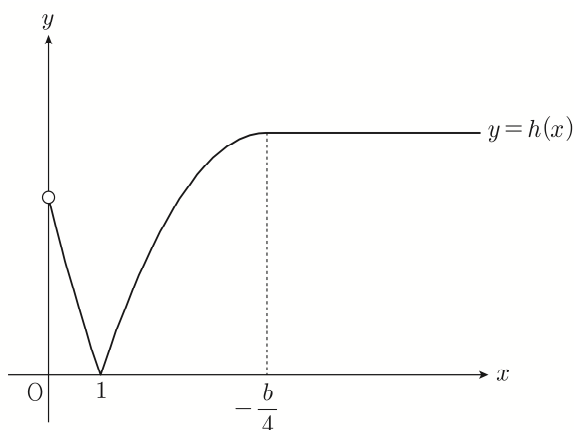
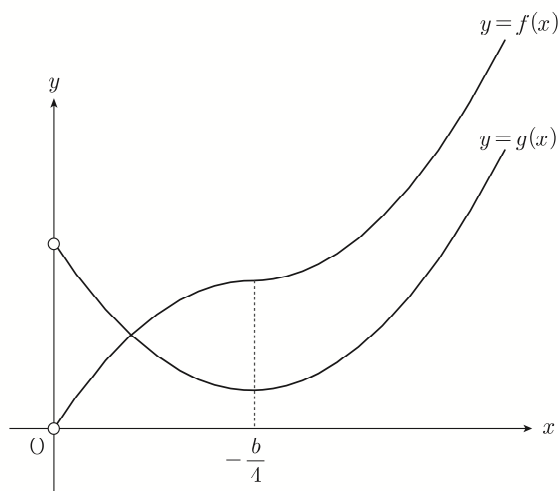
한편 모든 양수 x 에 대하여 $g(x) \geq f(x)$ 가 성립하도록

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 그려지면

$h(x)$ 는 최솟값을 여러 번 갖게 되어 모순이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 및

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 아래와 같이 그려져야 한다.



함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$h(1) = |f(1) - g(1)| = 0 \text{ 이다.}$$

$$f(1) = g(1) \text{ 이고 } g(0) = 2g(1) \text{ 이다.}$$

$$a = 2(2+b+a), a+2b = -4 \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $h(x)$ 는 최댓값 36을 가지므로

$$h\left(\frac{b}{4}\right) = f\left(\frac{b}{4}\right) - g\left(\frac{b}{4}\right) = 36 \text{ 이다.}$$

$$0 < x \leq -\frac{b}{4} \text{ 일 때, } f(x) = -2t^2 - bt \text{ 이므로}$$

$$\frac{b^2}{8} - \left(\frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{4} + a \right) = 36, \frac{b^2}{4} - a = 36 \dots\dots \textcircled{8}$$

이다. ⑦과 ⑧을 연립하면,

$$(b+16)(b-8) = 0, b = -16 (\because b < 0), a = 28 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a+b = 28-16 = 12$$

22. [정답] 617

수열 $\{a_n\}$ 은 $|a_{n+1}|$ 의 값이 1보다 크면,

세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 가 등비수열을 이루고,

$|a_{n+1}|$ 의 값이 1보다 작거나 같으면,

세 수 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 가 등차수열을 이룬다.

11이하의 자연수 m 에 대하여 $|a_m| = |a_{12-m}|$

이 성립하므로, $|a_5| = |a_7|$ 이다.

따라서 a_5 와 a_7 의 부호와 $|a_6|$ 의 값이 1보다 큰지 작거나

같은지에 따라 경우를 나누어 생각하자.

i) $a_5 = a_7$ 이고 $|a_6| > 1$ 인 경우

$$a_5 \times a_7 = (a_6)^2 \text{ 이므로 } a_6 = a_5 \text{ 이거나 } a_6 = -a_5$$

이다. 이때 $a_6 = a_5$ 이면 $a_5 > a_6$ 의 조건에 모순이므로

$$a_6 = -a_5 < 0 \text{ 이고, 수열 } \{a_n\} \text{ 은}$$

제 1항부터 제 11항까지 공비가 -1 인 등비수열을 이룬다.

$$\text{곧, } \sum_{n=1}^{11} |a_n| = 11|a_5| = 11a_5 = 12,$$

$$a_5 = \frac{12}{11} \text{ 이다.}$$

$$a_1 = a_5 \times (-1)^4 = a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = \frac{12}{11} \text{ 이다.}$$

ii) $a_5 = a_7$ 이고 $|a_6| \leq 1$ 인 경우

$$a_5 + a_7 = 2a_6 \text{ 이고, } a_5 = a_6 = a_7 \text{ 이므로}$$

이는 $a_5 > a_6$ 의 조건에 모순이다.

iii) $a_5 = -a_7$ 이고 $|a_6| > 1$ 인 경우

$$(a_6)^2 \neq a_5 \times a_7 < 0 \text{ 이므로 모순이다.}$$

iv) $a_5 = -a_7$ 이고 $|a_6| \leq 1$ 인 경우

$$a_5 + a_7 = 2a_6 \text{ 이고, } a_6 = 0, a_7 = -a_5 \text{ 이다.}$$

$$a_5 > 1 \text{ 이면 } (a_5)^2 = a_4 \times a_6 = 0 \text{ 에서 모순이므로 } 0 < a_5 \leq 1 \dots\dots \textcircled{9}$$

이다. $a_5 = a$ 라 하자.

$$2a_5 = a_4 + a_6 \text{ 이므로 } a_4 = 2a,$$

$$2a_7 = a_6 + a_8, a_8 = -2a \text{ 이다.}$$

⑨에서 a 의 값의 범위에 따라 케이스를 나누어 생각해보자.

$$\frac{1}{2} < a \leq 1 \text{ 인 경우}$$

$$a_3 = 4a, a_2 = 8a, a_1 = 16a \text{ 이고,}$$

$\sum_{n=1}^{11} |a_n| = 62a = 12$ 이므로 $a = \frac{6}{31}$ 이다.

이는 전제인 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 에 모순이다.

$\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$ 인 경우

$a_3 = 3a, a_2 = \frac{9}{2}a, a_1 = \frac{27}{4}a$ 이고,

$\sum_{n=1}^{11} |a_n| = \frac{69}{2}a = 12$ 이므로 $a = \frac{8}{23}$ 이다.

이때 $a_1 = \frac{27}{4} \times \frac{8}{23} = \frac{54}{23}$ 이다.

$\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}$ 인 경우

$a_3 = 3a, a_2 = 4a, a_1 = \frac{16}{3}a$ 이고,

$\sum_{n=1}^{11} |a_n| = \frac{92}{3}a = 12$ 이므로 $a = \frac{9}{23}$ 이다.

이는 전제인 $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}$ 에 모순이다.

$0 < a \leq \frac{1}{4}$ 인 경우

$a_3 = 3a, a_2 = 4a, a_1 = 5a$ 이고,

$\sum_{n=1}^{11} |a_n| = 30a = 12$ 이므로 $a = \frac{2}{5}$ 이다.

이는 전제인 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 에 모순이다.

따라서 i)~iv) 에 의해 모든 a_1 의 값의 합은

$\frac{12}{11} + \frac{54}{23} = \frac{870}{253}$ 이므로

$-p + q = -253 + 870 = 617$ 이다.

수학 영역

• 미적분 •

정답

23	⑤	24	②	25	③	26	③	27	①
28	④	29	49	30	16				

해설

23. [정답] ⑤

극한식 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$ 에서 $x^2 = t$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(4t+1)}{t} = 4$$

24. [정답] ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

25. [정답] ③

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{8n^2+3n+1}{6n(n+1)} \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시킨다.

①에서 양변에 $n=1$ 을 대입하면, $a_1 = 1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n+1} + 4a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (6a_n) - 2a_1 \\ &= 6 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2+3n+1}{6n(n+1)} - 2 \\ &= 6 \times \frac{4}{3} - 2 = 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

26. [정답] ③

곡선 $y = \sin ax + ax$ 을 미분하면,

$$y' = a \cos ax + a \text{ 이므로}$$

곡선 $y = \sin ax + ax$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의

기울기는 $2a$, 곡선 $y = \sin ax + ax$ 위의

점 $(\pi, \sin a\pi + a\pi)$ 에서의 접선의 기울기는

$a \cos a\pi + a$ 이다.

모든 양수 a 에 대하여 $\cos a\pi \leq 1$ 이므로

모든 양수 a 에 대하여 $2a \geq a \cos a\pi + a$ 이고,

$$\tan f(a) = \frac{2a - a(\cos a\pi + 1)}{1 + 2a \times a(\cos a\pi + 1)} = \frac{a(1 - \cos a\pi)}{1 + 2a^2(\cos a\pi + 1)}$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\tan f(a)}{a^3} &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a(1 - \cos a\pi)}{a^3 \{1 + 2a^2(\cos a\pi + 1)\}} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \times 1 = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

27. [정답] ①

$$\frac{dx}{dt} = -\sin 2t + a, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t - a \text{ 이므로,}$$

점 P 의 속력은

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\sin 2t + a)^2 + (\sin t - a)^2}$$

이므로

점 P 의 속력이 0 이 되는 시각 t 에 대하여

$$-\sin 2t + a = \sin t - a = 0 \text{ 를 만족시킨다.}$$

곧, $\sin t = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = a$ 이고,

$\sin t = 0$ 이거나 $\cos t = \frac{1}{2}$ 이다.

$\sin t = 0$ 이면 $a = 0$ 이므로 a 가 음수라는 조건에

모순이다. 따라서 $\cos t = \frac{1}{2}$ 이고,

a 가 음수이므로 $a = \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

즉, $\cos t = \frac{1}{2}$, $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 만족시키는

시각 t 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은

$$t = \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, \dots \text{ 이고, 공차가 } 2\pi \text{ 인}$$

등차수열을 이루므로 $a_n = \left(2n - \frac{1}{3}\right)\pi$ 이다.

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^9 a_n = 9a_5 = 9 \times \frac{29\pi}{3} = 87\pi$$

28. [정답] ④

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n b_n = \begin{cases} a_n + 2 & (|a_n| \leq 1) \\ 1 & (|a_n| > 1) \end{cases} \text{ 이 성립한다.}$$

$a_n = 0$ 인 자연수 n 이 존재하면 위의 식을 만족시키지 않으므로,

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이고 위의 식의 양변을

a_n 으로 나눌 수 있다.

$$\text{곧, } b_n = \begin{cases} 1 + \frac{2}{a_n} & (|a_n| \leq 1) \\ \frac{1}{a_n} & (|a_n| > 1) \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

이고 $a_4 = b_4$ 이므로 $|a_4| > 1$ 이면,

$$(a_4)^2 = 1 \text{ 이고, 이는 전제에 모순이다.}$$

곧, $|a_4| \leq 1$ 이고 $(a_4)^2 = a_4 + 2$,

$$(a_4 - 2)(a_4 + 1) = 0, \quad a_4 = b_4 = -1 \text{ 이다.}$$

(나)에서 $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ 의 값이 수렴하므로,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이 성립해야한다. 이때 등비수열 a_n 의

공비 r 에 대하여 $|r| \leq 1$ 이면,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이고, ①에서 $n \rightarrow \infty$ 일 때,

b_n 은 0 으로 수렴하지 않는다. 따라서 ①에서

$n \rightarrow \infty$ 일 때, $|a_n|$ 은 ∞ 로 발산해야 하고,

$|r| > 1$ 이다. $a_3 = -\frac{1}{r}$ 이므로 $b_3 = 1 - 2r$ 이고,

$n \geq 4$ 일 때, $b_n = -\frac{1}{r^{n-4}}$ 이다.

$$\text{곧, } \sum_{n=3}^{\infty} b_n = b_3 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n = (1-2r) + \frac{-1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{13}{3},$$

$$(1-2r) - \frac{r}{r-1} = \frac{13}{3}, \quad -2r^2 + 3r - 1 - r = \frac{13}{3}(r-1),$$

$$6r^2 + 7r - 10 = 0, \quad (6r-5)(r+2) = 0 \text{ 에서 } r = -2 \quad (\because |r| > 1)$$

$$\text{따라서 } a_1 = -\frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \text{ 이고,}$$

$$b_1 = 1 + \frac{2}{a_1} = 17 \text{ 이다.}$$

29. [정답] 49

삼각형 PQB에서 $\angle PBQ = \angle PQB = \theta$

$\left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하자. $\overline{BP} = \overline{PQ} = 2\cos\theta$ 이고,

직선 BP와 직선 QR이 평행하므로
 $\angle RQA = \theta$, $\angle PQR = \pi - 2\theta$ 이다.

선분 AB를 지름으로 하는 원에 대하여,

점 P를 직선 AB에 대해 대칭 이동한 점을 P'이라 하자.

$\angle PBQ = \angle PQB = \theta$ 이므로 세 점 P', R, Q은

한 직선 위에 있고, 할선정리에 의해

$$\overline{RQ} \times \overline{P'Q} = \overline{AQ} \times \overline{BQ} \text{ 이다.}$$

$$\text{곧, } \overline{P'Q} = \overline{PQ} \text{ 이므로 } \overline{RQ} \times \overline{PQ} = \overline{AQ} \times \overline{BQ} \text{ 이고}$$

$$\overline{BQ} = 4\cos^2\theta, \quad \overline{AQ} = 2 - 4\cos^2\theta \text{ 이므로}$$

$$\overline{RQ} = 2\cos\theta(2 - 4\cos^2\theta) \text{ 이다.}$$

삼각형 PQR에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2 \times \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \cos(\pi - 2\theta)$$

$$\left(\frac{\overline{PR}}{2\cos\theta}\right)^2 = 1^2 + (2 - 4\cos^2\theta)^2 - 2(2 - 4\cos^2\theta) \times (\sin^2\theta - \cos^2\theta),$$

$$\left(\frac{\overline{PR}}{2\cos\theta}\right)^2 = 1, \quad \overline{PR} = 2\cos\theta$$

이다. 한편 삼각형 PQR의 넓이와 삼각형 BQR의 넓이는 같으므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QH} = \frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{QR} \times \sin\theta,$$

$$\cos\theta \times \overline{QH} = 2\cos^2\theta \times 2\cos\theta(2 - 4\cos^2\theta) \times \sin\theta,$$

$$\overline{QH} = 8\cos^2\theta \sin\theta(1 - 2\cos^2\theta) \text{ 이다.}$$

$\overline{BQ} = t$ 에 대하여 $f(t) = \overline{QH}$ 이므로

$$f(4\cos^2\theta) = 8\cos^2\theta \sin\theta(1 - 2\cos^2\theta) \text{ 이고,}$$

$$t = 4\cos^2\theta \text{ 이므로}$$

$$f(t) = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \sqrt{4-t},$$

$$f'(t) = (1-t) \sqrt{4-t} + \frac{\frac{t^2}{2} - t}{2\sqrt{4-t}}$$

이다.

$$\text{따라서 } f'(1) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ 이고,}$$

$$\{f'(1)\}^2 = \frac{1}{48} \text{ 이므로 } p+q = 48+1 = 49$$

30. [정답] 16

함수 $y = f(x)$ 의 최댓값이 M , 최솟값이 m 이므로

$-8 < m < M < 8$ 이다. $M - m = 8$ 이므로 $m < 0 < M$ 이고,

$f(x) = 0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재한다.

모든 실수 x 에 대하여 $-8 < f(x) < 8$ 이므로,

$$\left| \tan \frac{\pi f(x)}{16} \right| = \tan \frac{\pi |f(x)|}{16}$$

이 성립하고 두 함수

$$h(x) = \tan \frac{\pi x}{16} \quad (-8 < x < 8), \quad g(x) = a \cos^2 bx + 2a \cos bx + c$$

에 대하여

$$g(x) = h(|f(x)|) \dots\dots \textcircled{1}$$

이고, $f(x) = 0$ 을 만족시키는 실수 x 에 대하여

$$g(x) = h(|f(x)|) = 0 \text{을 만족시킨다.}$$

한편 모든 실수 x 에 대하여, $|f(x)| \geq 0$ 이므로

$$g(x) = h(|f(x)|) \geq 0 \text{이고, 함수 } g(x) \text{의 최솟값은 } 0 \text{이다.}$$

$$g(x) = a(\cos bx + 1)^2 + c - a \text{이므로 함수 } g(x) \text{의 최솟값이 } 0 \text{이 되려면 } a = c \text{이다.}$$

곧, 함수 $g(x) = a(\cos bx + 1)^2$ 에서 $\cos bx = 1$ 을 만족시키는 실수 x 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 최댓값 $4a$ 을 가지고, $\cos bx = -1$ 을 만족시키는 실수 x 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 최솟값 0 을 가진다.

$$\text{한편 } h'(x) = \frac{\pi}{16} \sec^2 \frac{\pi x}{16} \text{이므로 } h'(x) > 0 \text{이고}$$

$h(x)$ 는 정의역 전체의 집합에서 미분가능한 증가함수가 되고 함수 $h(x)$ 의 역함수 $h^{-1}(x)$ 또한 정의역 전체의 집합에서 미분가능한 증가함수가 된다.

따라서

$$|f(x)| = h^{-1}(g(x)) \dots\dots \textcircled{2}$$

이고, $f(x) \neq 0$ 일 때, $f(x) = \pm h^{-1}(g(x))$ 이다.

두 함수 $h^{-1}(x)$ 와 $g(x)$ 가 각각의 정의역 전체의 집합에서

미분가능하므로 합성함수의 미분법에 의하여 함수

$f(x)$ 도 미분가능하다.

$f(x) = 0$ 일 때, $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $g(x) = 0$ 이고,

$f(x_1) = 0$ 을 만족시키는 실수 x_1 에 대하여

$$\cos bx_1 = -1, \quad x_1 = \frac{(2n+1)\pi}{b} \quad (n \text{은 정수})$$

이고

$$g(x_1) = g'(x_1) = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

이다. $\textcircled{2}$ 에서 양변을 미분하면 $f(x) \geq 0$ 일 때,

$$f'(x) = (h^{-1})'(g(x)) \times g'(x) \text{이고}$$

$$f(x) \leq 0 \text{일 때, } f'(x) = -(h^{-1})'(g(x)) \times g'(x)$$

이므로 위의 두 식에 $\textcircled{3}$ 을 대입하면 항상 $f'(x_1) = 0$ 이다.

$\textcircled{1}$ 에서 $g(x) = h(|f(x)|)$ 의 최댓값이 $4a$ 이고

$h(x)$ 는 정의역 전체의 집합에서 증가함수이므로

$h(t) = 4a$ 을 만족시키는 양의 실수 t 에 대하여

함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 t 이다.

수학 영역

한편, $m < 0 < M$, $M - m = 8$ 이므로
 $t = 4$ 이고, $M = 4$, $m = -4$ 이다.

따라서 $f(x) = 4$ 또는 $f(x) = -4$ 일 때,
 함수 $g(x) = h(|f(x)|)$ 는 최댓값

$h(4) = 1$ 를 갖고, $4a = 1$, $a = c = \frac{1}{4}$ 를 얻는다.

(나)에서

$$f(0) \times f(1) = f\left(\frac{1}{5}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) = M \times m \dots\dots \textcircled{a}$$

이므로

$$|f(0)| = \left|f\left(\frac{1}{5}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{3}\right)\right| = |f(1)| = 4$$

이다.

곧, 함수 $f(x)$ 는 $x = 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$ 에서 최대 또는 최소를 가지고,

함수 $g(x)$ 는 $x = 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$ 에서 최대를 갖는다.

따라서 $\cos 0 = \cos \frac{b}{5} = \cos \frac{b}{3} = \cos b = 1$

이고, 세 실수 $\frac{b}{5}, \frac{b}{3}, b$ 가 2π 의 배수이므로

$b = 30\pi \times (\text{자연수})$ 이다.

한편 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서
 극대 또는 극소가 되도록 하는 실수 α 의 개수가 최소인 상황을
 고려해야 하므로 b 의 값은 가능한 작아야 하니 $b = 30\pi$ 이고,
 이로부터 $|f(x)|$ 가 결정된다.

또한, 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 될 수 있는 지점은

$x = \frac{n}{15}$ (n 은 자연수) 이고

㉠에 의하여 함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 최대이면,
 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 최소이고,

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 최소이면,
 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 최대이다.

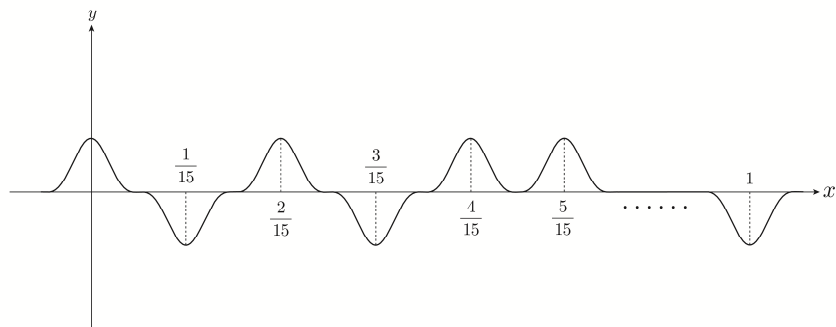
함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{5}$ 에서 최대이면,

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{3}$ 에서 최소이고,

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{5}$ 에서 최소이면,

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{3}$ 에서 최대이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 가 극대 또는 극소가
 되도록 하는 실수 α 의 개수가 최소가 되려면
 반드시 극대, 극소를 갖는 지점을 제외하고는
 다음 그림과 같이 함수 $f(x)$ 가 최대, 최소를 번갈아가며
 가져야 한다.



이때 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 가 극대 또는 극소가 되도록 하는
 실수 α 의 개수의 최솟값은 모두 $1 \times 12 + 2 \times 2 = 16$ 가 된다.

• 확률과 통계 •

정답

23	②	24	⑤	25	③	26	②	27	④
28	③	29	455	30	76				

해설

23. [정답] ②

$$\frac{7!}{2!3!}=420$$

24. [정답] ⑤

$P(B)=x$ 라 하면 $P(A)=4x$ 이다.

A 와 B 는 서로 독립이기 때문에 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ 이다.

$$\therefore P(A\cap B)=4x^2$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 이고,

$P(A\cup B)=9\times P(A\cap B)$ 에서 $10\times P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

$$\text{즉, } 40x^2=5x$$

$P(A)\neq 0$ 이므로, $x\neq 0$

$$\therefore x=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cup B)=4x^2\times 9=\frac{1}{16}\times 9=\frac{9}{16}$$

25. [정답] ③

다항식 $(2x+n)^4$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_4C_r(2x)^r n^{4-r} \quad (r=0, 1, 2, 3, 4)$$

x^2 항은 $r=2$ 일 때이므로,

$${}_4C_2\times 2^2\times n^2=216$$

이고, n 이 자연수라고 했으므로 $n=3$

x^3 항은 $r=3$ 일 때이므로

$${}_4C_3\times 2^3\times n^1=96$$

이다.

26. [정답] ②

6명이 일렬로 서는 전체 경우의 수는 $6!$ 이다.

여사건의 확률을 이용하여 양 끝에 놓인 2명의 국적이 같을 확률을 구해보자.

i) 양 끝에 모두 한국인이 올 때

양 끝에 모두 한국인을 세우는 경우의 수는 $2!$ 이고 나머지 4명을 세우는 경우의 수는 $4!$ 이므로 양 끝에 모두 한국인이 오는 경우의 수는

$$2!\times 4!=48$$

이다.

ii) 양 끝에 모두 일본인이 올 때

양 끝에 모두 일본인을 세우는 경우의 수는 ${}_3C_2\times 2!$ 이고

나머지 4명을 세우는 경우의 수는 $4!$ 이므로 양 끝에 모두 일본인이 오는 경우의 수는

$${}_3C_2\times 2!\times 4!=144$$

이다.

i), ii)에 의하여 구하는 확률은

$$1-\frac{48+144}{6!}=\frac{11}{15}$$

이다.

27. [정답] ④

주사위를 던져 전구를 끄고 켜는 시행을 다섯 번 반복한 후 홀수가 적힌 전구가 모두 켜져 있으려면 짝수가 적힌 전구 중 두 개가 켜져 있거나, 짝수가 적힌 전구들은 모두 꺼져 있어야 한다.

두 가지로 경우를 나누어 구해보자.

(주사위를 다섯 번 던져 나오는 눈으로 만들 수 있는 모든 순서쌍 중 각 경우에 부합하는 순서쌍의 개수를 세자.)

i) 짝수가 적힌 전구 중 두 개가 켜져 있는 경우

짝수 중 두 개를 선택하여, 선택한 짝수 두 개와

홀수 세 개가 나오는 순서를 정하는 경우의 수이므로

$${}_3C_2\times 5!=360 \text{이다.}$$

ii) 짝수가 적힌 전구들은 모두 꺼져 있는 경우

홀수가 모두 홀수 번 나오고, 짝수는 짝수 번 나오거나 나오지

않아야 한다. 따라서 주사위를 다섯 번 던져,

1, 3, 5가 나오는 횟수가 각각 1이고

2, 4, 6 중 하나가 두 번 나오거나,

1, 3, 5 중 두 개는 나오는 횟수가 각각 1이고

나머지 하나는 나오는 횟수가 3이어야 한다.

각각의 경우의 수를 구해보자.

1, 3, 5가 나오는 횟수가 각각 1이고

2, 4, 6 중 하나가 두 번 나오는 경우의 수는

$${}_3C_1\times \frac{5!}{2!}=180$$

이고,

1, 3, 5 중 두 개가 나오는 횟수가 각각 1이고

나머지 하나가 나오는 횟수가 3인 경우의 수는

$${}_3C_1\times \frac{5!}{3!}=60$$

이다.

i), ii)에 의해 주사위를 다섯 번 던져

홀수가 적힌 전구가 모두 켜져 있을 때,

짝수가 적힌 전구가 모두 꺼져 있을 확률은

$$\frac{\frac{180+60}{6^5}}{\frac{360+(180+60)}{6^5}}=\frac{2}{5}$$

이다.

수학 영역

28. [정답] ③

함수 $f(x)$ 가 부등식

$$f(2) \geq f(1) \geq f(0) \geq f(-1) \geq f(-2)$$

을 만족시킨다.

함수 $\{f(x)\}^2$ 의 최솟값이 0이므로

함수 $f(x)$ 의 치역은 0을 포함하고

함수 $\{f(x)\}^2$ 의 최댓값이 4이므로 함수 $f(x)$ 의 치역은 2 또는 -2를 포함한다.

i) 함수 $f(x)$ 의 치역이 2를 포함하고 -2는 포함하지 않는 경우
-1, 0, 1, 2 중 5개를 중복을 허락하여 택하되 0과 2는
하나 이상 택하면 함수는 자동으로 결정된다.

예를 들어 2, 2, 1, 0, -1을 택할 경우 이 순서대로
 $f(2), f(1), f(0), f(-1), f(-2)$ 에 대응되기 때문이다.
따라서 ${}_4H_{5-2} = 20$ 가지이다.

ii) 함수 $f(x)$ 의 치역이 -2를 포함하고 2는 포함하지 않는 경우
위와 마찬가지로 20가지이다.

iii) 함수 $f(x)$ 의 치역이 -2와 2를 모두 포함하는 경우
-2, -1, 0, 1, 2 중 5개를 중복을 허락하여 택하되 0과 -2와 2는
하나 이상 택하는 경우의 수와 같다.
따라서 ${}_5H_{5-3} = 15$ 가지이다.

i) ~ iii)에 의해 조건을 만족시키는 함수

$f(x)$ 의 개수는

$$2 \times 20 + 15 = 55$$

이다.

29. [정답] 455

12 이하의 자연수가 가지고 있는 소인수 2의 개수로 구분해 보자.

소인수 2의 개수가 0인 자연수는 1, 3, 5, 7, 9, 11로 총 6개이고,
소인수 2의 개수가 1인 자연수는 2, 6, 10으로 총 3개이고,
소인수 2의 개수가 2인 자연수는 4, 12로 총 2개,
소인수 2의 개수가 3인 자연수는 8로 총 1개이다.

곧, 택한 4장의 카드에 적힌 숫자 중

소인수 2의 개수가 0인 숫자 카드의 개수를 a ,

소인수 2의 개수가 1인 숫자 카드의 개수를 b ,

소인수 2의 개수가 2인 숫자 카드의 개수를 c ,

소인수 2의 개수가 3인 숫자 카드의 개수를 d

라 할 때, 택한 4장의 카드에 적힌 수들의 곱이 32의

배수가 아닌 8의 배수가 되기 위해서는

택한 4장의 카드에 적힌 수들의 곱에 포함된

소인수 2의 개수가 3이상 5미만이 되어야 하므로

$a+b+c+d=4$ 이고, $3 \leq b+2c+3d \leq 4$ 이다.

순서쌍 (a, b, c, d) 에 따라 경우를 나누자.

(3, 0, 0, 1)일 때,

$${}_6H_3 \times {}_1H_1 = 56,$$

(2, 1, 1, 0)일 때,

$${}_6H_2 \times {}_3H_1 \times {}_2H_1 = 126,$$

(1, 3, 0, 0)일 때,

$${}_6H_1 \times {}_3H_3 = 60,$$

(2, 1, 0, 1)일 때,

$${}_6H_2 \times {}_3H_1 \times {}_1H_1 = 63,$$

(2, 0, 2, 0)일 때,

$${}_6H_2 \times {}_2H_2 = 63,$$

(1, 2, 1, 0)일 때,

$${}_6H_1 \times {}_3H_2 \times {}_2H_1 = 72,$$

(0, 4, 0, 0)일 때,

$${}_3H_4 = 15$$

이다.

따라서 구하고자 하는 총 경우의 수는

$$56 + 126 + 60 + 63 + 63 + 72 + 15 = 455$$

이다.

30. [정답] 76

주머니 B에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자를

기준으로 경우를 나누어 생각해 보자.

i) 1과 2를 꺼내는 경우

1과 2를 꺼낼 확률은 $\frac{1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}$ 이고, 이때

주머니 A에는 1, 1, 2, 2, 2이 각각 적힌 다섯 개의 공이 있고,

주머니 B에는 2, 3, 3, 3이 각각 적힌 네 개의 공이 있다.

이 경우 a 의 최댓값은 4이고, b 의 최솟값은 5이므로 $a \neq b$ 이다.

ii) 1과 3을 꺼내는 경우

1과 3를 꺼낼 확률은 $\frac{1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{15}$ 이고,

주머니 A에는 1, 1, 2, 2, 3이 각각 적힌 다섯 개의 공이 있고,

주머니 B에는 2, 2, 3, 3이 각각 적힌 네 개의 공이 있다.

$a=b \leq 4$ 이라면, 주머니 A에서 1과 3 또는 2와 2를 뽑고,

주머니 B에서 2와 2를 뽑으면 되고 이 확률은

$$\frac{({}_2C_1 \times 1 + {}_2C_2)}{{}_5C_2 \times {}_4C_2} = \frac{3}{60}$$

이다.

곧, $a=b \leq 4$ 일 확률은

$$\frac{3}{15} \times \frac{3}{60} = \frac{9}{15 \times 60}$$

이다.

iii) 2와 3을 꺼내는 경우

2와 3를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{15}$ 이고,

주머니 A에는 1, 2, 2, 2, 3이 각각 적힌 다섯 개의 공이 있고,

주머니 B에는 1, 2, 3, 3이 각각 적힌 네 개의 공이 있다.

$a=b \leq 4$ 이라면, 주머니 A에서 1과 3 또는

2와 2를 뽑고, 주머니 B에서 1과 3을 뽑거나,
주머니 A에서 1과 2를 뽑고, 주머니 B에서 1과 2를 뽑으면
되므로 이 확률은

$$\frac{({}_3C_2 + 1){}_2C_1 + {}_3C_1}{{}_5C_2 \times {}_4C_2} = \frac{11}{60}$$

이다.

곧, $a = b \leq 4$ 일 확률은

$$\frac{6}{15} \times \frac{11}{60} = \frac{66}{15 \times 60}$$

이다.

iv) 2와 2를 꺼내는 경우

2와 2를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$ 이고,

주머니 A에는 1, 2, 2, 2, 2이 각각 적힌 다섯 개의 공이 있고,
주머니 B에는 1, 3, 3, 3이 각각 적힌 네 개의 공이 있다.

$a = b \leq 4$ 이라면, 주머니 A에서 2와 2를 뽑고,
주머니 B에서 1과 3을 뽑으면 되므로 이 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_2 \times {}_4C_2} = \frac{18}{60}$$

이다.

곧, $a = b \leq 4$ 일 확률은 $\frac{1}{15} \times \frac{18}{60} = \frac{18}{15 \times 60}$

v) 3과 3을 꺼내는 경우

3과 3을 꺼낼 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{15}$ 이고,

주머니 A에는 1, 2, 2, 3, 3이 각각 적힌 다섯 개의 공이 있고,
주머니 B에는 1, 2, 2, 3이 각각 적힌 네 개의 공이 있다.

$a = b \leq 4$ 이라면, 주머니 A에서 1과 3또는
2와 2를 뽑을 때, 주머니 B에서 1과 3또는
2와 2를 뽑고, 주머니 A에서 1과 2를 뽑을 때,
주머니 B에서 1와 2를 뽑으면 되므로 이 확률은

$$\frac{({}_2C_1 + {}_2C_2)(1 + {}_2C_2) + {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2 \times {}_4C_2} = \frac{10}{60}$$

이다.

곧, $a = b \leq 4$ 일 확률은 $\frac{3}{15} \times \frac{10}{60} = \frac{30}{15 \times 60}$

i)~v)에서 $a = b \leq 4$ 일 때, 주머니 A에 3이 적힌 공이 없을
확률은

$$\frac{\frac{18}{900}}{\frac{9}{900} + \frac{66}{900} + \frac{18}{900} + \frac{30}{900}} = \frac{18}{123} = \frac{6}{41}$$

이므로 구하고자 하는 확률은 $1 - \frac{6}{41} = \frac{35}{41}$ 이다.

$\therefore p = 41, q = 35$ 이고 $p + q = 41 + 35 = 76$