

정답 및 해설

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	③	12	③	23	⑤	23	⑤	23	③
2	②	13	②	24	④	24	④	24	⑤
3	①	14	④	25	②	25	④	25	②
4	②	15	③	26	②	26	②	26	④
5	①	16	625	27	③	27	①	27	⑤
6	④	17	8	28	②	28	②	28	①
7	⑤	18	6	29	12	29	8	29	25
8	⑤	19	32	30	32	30	8	30	80
9	③	20	125						
10	③	21	108						
11	④	22	329						

체스잘하고싶다 모의고사

출제자 : 체스잘하고싶다

본 모의평가에 대한 저작권은 체스잘하고싶다에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 무단복제/2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있으며 처벌받을 수 있습니다.

본 모의평가에 관한 모든 문의는 yoonsol229@gmail.com으로 연락해주시기 바랍니다.

공통과목

1 ③

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2 ②

$$\int_2^1 (x^3 - 3x^2)dx = \int_1^2 (3x^2 - x^3)dx = \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = (2^3 - 1^3) - \frac{1}{4}(2^4 - 1^4)$$
$$= 7 - \frac{15}{4} = \frac{13}{4}$$

3 ①

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a_6}{a_4} = r^2 = 4$$
$$\therefore r = \pm 2$$
$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} \text{ or } a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

$a_n = 3 \times 2^{n-1}$ 일 때의 $\sum_{n=1}^8 a_n$ 의 값은

$$3 \times \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3 \times 255 = 765 \text{ 이고}$$

$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$ 일 때의 $\sum_{n=1}^8 a_n$ 의 값은

$$3 \times \frac{(-2)^8 - 1}{-2 - 1} = -1 \times 255 = -255 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^8 a_n \text{의 값의 합은 } 765 + (-255) = 510 \text{ 이다.}$$

4 ②

$$f(1) = 4, f'(1) = 2$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - 4}{x^3 - 1} \times \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right\}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - 4}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$
$$= f'(1) \times \frac{3}{2} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

5 ①

함수 $f(x) = 2^x(2^x - 2)$ 이므로

$$f(-x) = 2^{-x}(2^{-x} - 2) = -2^{-x}(2 - 2^{-x}) \text{가 된다.}$$
$$f(x) + f(-x) = 2^x(2^x - 2) - 2^{-x}(2 - 2^{-x}) = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x})$$
$$2^x + 2^{-x} = t \text{라 하면 } t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$
$$f(x) + f(-x) = t^2 - 2 - 2t = (t - 1)^2 - 3$$
$$\therefore f(x) + f(-x) \text{는 } t = 2 \text{일 때, 최솟값 } -2 \text{를 가진다.}$$

6 ④

함수 $f(x)$ 의 $x = -3$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로
 $(-3, f(-3))$ 을 지나고 l 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.
 그리고 그 직선은 원점을 지나므로 해당 직선은
 $y = -\frac{1}{3}x$ 이다.
 $(-3, f(-3))$ 이 $y = -\frac{1}{3}x$ 위의 점이므로 $f(-3) = 1$ 이다.
 $\therefore l: y = 3(x+3)+1 = 3x+10$
 $\therefore A\left(-\frac{10}{3}, 0\right), B(0, 10)$
 $\therefore$ 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 10 = \frac{50}{3}$

7 ⑤

선분 AC를 지름으로 하는 원 C를 그리면 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 이므로
 점 B는 원 C 위의 점이다.
 또한 $\angle ADB = \angle ACB$ 이므로 사인법칙에 의하여 점 D도 원 C
 위의 점이다. ($\angle BAD > \frac{\pi}{2}$, $\overline{CD} < \overline{CA}$ 에 의해서 점 D가 두
 점 AB를 포함하고 반지름의 길이가 선분 AC와 같은 원 C가
 아닌 원 위의 점 일 수 없습니다.)
 선분 AC는 원 C의 지름이므로 $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ 이다.
 $\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$
 $\therefore \sin^2\theta + \cos^2 2\theta = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \pi = 1^2 + (-1)^2 = 2$

8 ⑤

점 P가 $t = 1$ 에서 $t = k$ 까지 움직인 거리는
 $\int_1^k |v(t)| dt = \int_1^k |3t^2 - 4t - 4| dt$ 이다.
 즉 $\int_1^k |3t^2 - 4t - 4| dt = 131$ 을 만족시키는 1보다 큰 k 를
 구하면 된다.
 case1) $k \leq 2$ 인 경우
 $\int_1^k |3t^2 - 4t - 4| dt = \int_1^k (-3t^2 + 4t + 4) dt \leq 3$ 이므로 k 는
 2이하가 아니다.
 case2) $k > 2$ 인 경우
 $\int_1^k |3t^2 - 4t - 4| dt = \int_1^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt + \int_2^k (3t^2 - 4t - 4) dt$
 $= 3 + (k^3 - 2k^2 - 4k + 8) = k^3 - 2k^2 - 4k + 11$
 $\int_1^k |3t^2 - 4t - 4| dt = k^3 - 2k^2 - 4k + 11 = 131$ 을 만족하는 k 의
 값은 6이다.
 $\therefore k = 6$

9 ③

수열 a_n 은 초항이 양수고 $a_m = 0$ 인 자연수 m 이 존재하는
 등차수열이므로 a_n 의 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.
 $a_n = d(n-m)$ (단, $d < 0$, m 은 자연수)
 $\therefore \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n d(k-m) = \frac{d(n+1-2m)}{2} \times n$
 a_n 은 $1 \leq n \leq m-1$ 에선 $a_n > 0$ 이고 $n \geq m+1$ 에선
 $a_n < 0$ 이다.
 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \frac{d(n+1-2m)}{2} \times n \right|$ 는 $n = 2m-1$ 에서 0이 되고
 모든 자연수 n 에 대하여 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq 0$ 을 만족한다.
 a_n 은 $1 \leq n \leq m-1$ 에선 $a_n > 0$ 이므로 $1 \leq n \leq m-1$ 에서
 $a_n + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq 0$ 이 성립한다.
 $a_m = 0$ 이므로 $n = m$ 일 때 $a_n + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq 0$ 이다.
 $m+1 \leq n \leq 2m-2$ 에선 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq |a_n| = -a_n$ 이고
 $n \geq 2m$ 에서도 $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq |a_n| = -a_n$ 이므로
 $m+1 \leq n \leq 2m-2$, $n \geq 2m$ 에서 $a_n + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq 0$ 이
 성립한다.
 그런데 $n = 2m-1$ 에선 $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ 이고 $a_n < 0$ 이므로
 $a_n + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| < 0$ 이므로 $n = 2m-1$ 에선 $a_n + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq 0$ 이
 성립하지 않는다.
 $\therefore 2m-1 = 9$
 $\therefore 2m = 10$

10 ③
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 3$
 $f(x)$ 를 n 차 함수라고 하자
 $f(x) = x^n + \sim$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1} + \sim}{x^n + \sim} = n = 3$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 삼차함수가 된다.
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}$ 의 값이 0이 아니므로 $f(1) = 0$ 이 된다.
 $f(x) = (x-1)^k \times P(x)$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1} \times P(x) + (x-1)^k \times P'(x)\}}{(x-1)^k \times P(x)}$
 $= k = 3$
 $f(x)$ 는 삼차함수이므로
 $f(x) = (x-1)^3 \times 1 = (x-1)^3$ 이 된다.
 $\therefore f(3) = (3-1)^3 = 2^3 = 8$

11 ④

$n = 1$ 일 때, $a_2 = S_1 = a_1 = 1$ 이다.

$$a_{n+1} = nS_n$$

의 양변에 S_n 을 더하면

$$S_{n+1} = (n+1)S_n$$

이다.

$$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}} = 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

$$\frac{S_n}{S_1} = n!$$

$S_1 = 1$ 이므로

$$S_n = \boxed{n!} \quad (n \geq 1)$$

$S_n = n!$ 이므로 $n \geq 2$ 에서

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n! - (n-1)! = \boxed{(n-1) \times (n-1)!}$$

이다. 따라서

$$a_n = \begin{cases} (n-1) \times (n-1)! & (n \geq 2) \\ 1 & (n = 1) \end{cases}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} &= \frac{a_1}{0!} + \sum_{k=2}^n \frac{(k-1) \times (k-1)!}{(k-1)!} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n (k-1) = \boxed{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $f(n) = n!$, $g(n) = (n-1) \times (n-1)!$,

$$h(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \frac{f(4)}{g(5) \times h(6)} = \frac{4!}{4 \times 4! \times 16} = \frac{1}{64}$$

12 ③

함수 $g(x)$ 의 식을 알아보기 쉽게 하기 위하여 구간별로 식을 작성해보면 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} x+4 & (x < -2) \\ -x & (-2 \leq x < 2) \\ x-4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체 집합에서 미분가능하려면

$$f(3) = g(3), \quad f(-3) = g(-3), \quad f'(3) = g'(3),$$

$$f'(-3) = g'(-3) \text{ 이어야 한다.}$$

$$f(3) = -1, \quad f(-3) = 1, \quad f'(3) = f'(-3) = 1$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ 라고 하면}$$

$$f(3) = -1, \quad f(-3) = 1, \quad f'(3) = f'(-3) = 1 \text{ 을 만족하는 실수 } a, b, c, d \text{ 는}$$

$$a = \frac{2}{27}, \quad b = 0, \quad c = -1, \quad d = 0 \text{ 이다.}$$

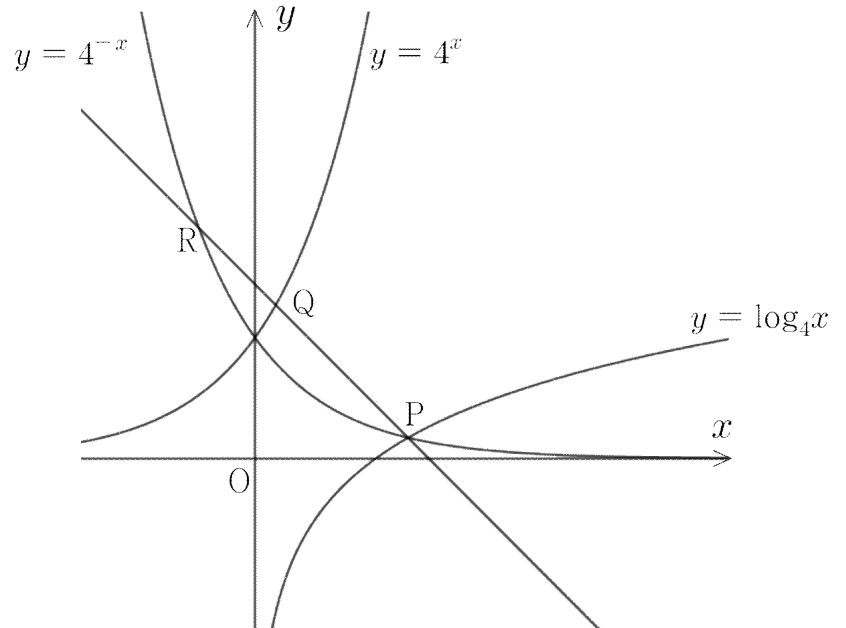
$\therefore$ 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하게 하는 함수

$$f(x) \text{ 는 } f(x) = \frac{2}{27}x^3 - x \text{ 이다.}$$

$$\therefore f(6) = \frac{2}{27} \times 6^3 - 6 = 16 - 6 = 10$$

13 ②

두 곡선 $y = \log_4 x$ 와 $y = 4^{-x}$ 가 만나는 점 P, 점 P를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 $y = 4^x$ 와 만나는 점 Q, 점 P를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 $y = 4^{-x}$ 와 만나는 점 R을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. 기울기가 -1 인 직선은 $y = x$ 에 대하여 수직이고 $y = 4^x$ 와 $y = \log_4 x$ 는 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 두 점 P, Q는 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore x_1 = y_2, \quad y_1 = x_2$$

$$\therefore x_1 x_2 = y_1 y_2 \text{ (참)}$$

ㄴ. 세 점 P, Q, R이 지나는 직선을 $x + y = a$ 라고 하자.

$$a > 0, \quad y_2 = a - x_2, \quad y_3 = a - x_3$$

$$|x_3| > |x_2| \rightarrow -x_3 > x_2$$

$$\therefore x_2 + x_3 < 0$$

$$\frac{x_2}{a} + \frac{x_3}{a} < 0$$

$$\frac{x_2}{a} < \frac{-x_3}{a}$$

$$\frac{a}{x_2} > \frac{a}{-x_3}$$

$$\frac{a}{x_2} + \frac{a}{x_3} > 0$$

$$\frac{a - x_2}{x_2} + \frac{a - x_3}{x_3} > -2$$

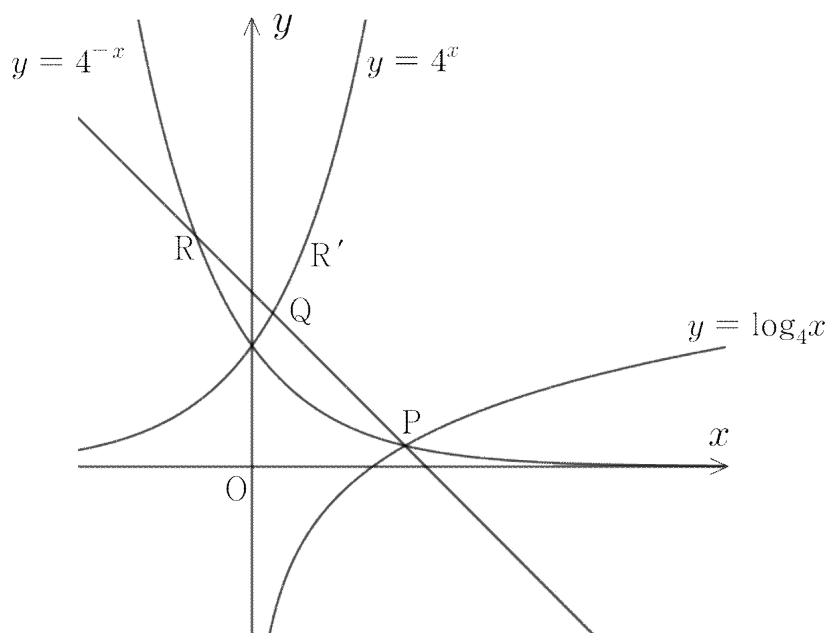
$$\frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} > -2$$

$$x_2 = y_1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_3}{x_3} > -2 \text{ (참)}$$

ㄷ. 점 R을 y 축에 대하여 대칭시킨 점을 R'이라 할 때,

$y = 4^x$ 와 $y = 4^{-x}$ 는 서로 y 축에 대하여 대칭이기 때문에 R'은 $y = 4^x$ 위의 점이 된다.



R' 은 점 R 을 y 축에 대하여 대칭시킨 점이므로
 $R'(-x_3, y_3)$ 이다.

두 점 P, R 은 기울기가 -1 인 직선 위의 점이므로 직선 PR' 의 기울기는 -1 보다 작다.

$$\therefore \frac{y_3 - y_1}{-x_3 - x_1} < -1$$

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 + x_1} > 1$$

$$y_3 - y_1 > x_3 + x_1$$

$$\therefore x_3 - y_3 < -x_1 - y_1 \text{ (거짓)}$$

14 ④

함수 $g(x)$ 는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

그런데 $p \leq x < p+3$ 에서 함수 $g(x)$ 는 상수함수이다.

$f'(p) = 0$ 이어야 함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 미분가능하게 된다.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$$

그런데 $g'(x) \geq 0$ 이므로 $p = 2$ 이어야 한다.

$$\therefore p = 2$$

$$a = f(2) = 2$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 2) \\ 2 & (2 \leq x < 5) \\ f(x-b)+c & (x \geq 5) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체 집합에서 미분가능하여 $g'(x) \geq 0$ 이려면 $5-b = 4$ 이어야 한다.

$$\therefore b = 1$$

$$2 = f(4) + c = -2 + c$$

$$\therefore c = 4$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 2) \\ 2 & (2 \leq x < 5) \\ f(x-1)+4 & (x \geq 5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_2^5 g(x)dx &= \int_2^5 2dx + \int_5^6 \{f(x-1)+4\}dx \\ &= 10 + \int_4^5 f(x)dx = 10 - \frac{3}{4} = \frac{37}{4} \end{aligned}$$

15 ③

다항함수 $f_1(x)$ 는 모든 항의 계수가 같다.

계수를 k (단, k 는 정수)라고 하면

$f_1(x) = k + kx + kx^2 + \cdots + kx^n$ 이 된다.

$$a_1 = f_1(0) = k$$

$$a_2 = f_2(0) = k \times 1!$$

$$a_3 = f_3(0) = k \times 2!$$

$$a_4 = f_4(0) = k \times 3!$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n = f_n(0) = k \times (n-1)!$$

$a_{10} = 0$ 이므로 $f_1(x)$ 는 8차 이하의 다항함수이다.

또한 $a_3 \neq 0$ 이므로 $f_1(x)$ 는 2차 이상의 다항함수이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = k \times \sum_{n=0}^p n! \quad (2 \leq p \leq 8)$$

$$p = 2 \rightarrow \sum_{n=0}^p n! = 4$$

$$p = 3 \rightarrow \sum_{n=0}^p n! = 10$$

$$p = 4 \rightarrow \sum_{n=0}^p n! = 34$$

$$p = 5 \rightarrow \sum_{n=0}^p n! = 154$$

$$p = 6 \rightarrow \sum_{n=0}^p n! = 874$$

k 는 정수이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 462$ 가 될 수 있는 p 는 5밖에 없고

그때의 k 의 값은 3이다.

$$\therefore f_1(x) = 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^5$$

$$\therefore a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 18, a_5 = 72, a_6 = 360,$$

$$a_n = 0 \quad (n \geq 7)$$

$$a_m \neq 0 \text{인 } m \text{의 값의 합은 } 1+2+3+4+5+6 = 21 \text{ 이다.}$$

16 625

$$\left(\frac{5\sqrt{5}}{5}\right)^{\sqrt{5}+1} = (5^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1} = 5^{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = 5^4 = 625$$

17 8

함수 $f(x)$ 가 실수 전체 집합에서 연속이려면

$$a \times (-1) + b = 0, \quad a \times 2 + b = 6 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\therefore a = b = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

18 6

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2, \quad f(-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) + f(-2) = 2 + 4 = 6$$

19 32

주어진 식 $(a_n - 3n + 4) \times (a_n - 2^{n-1}) = 0$ 에 의해서

$$a_n = 3n - 4 \text{ 혹은 } a_n = 2^{n-1} \text{ 이 된다.}$$

$$a_1 = -1 \text{ or } a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \text{ or } a_2 = 2$$

$$a_3 = 5 \text{ or } a_3 = 4$$

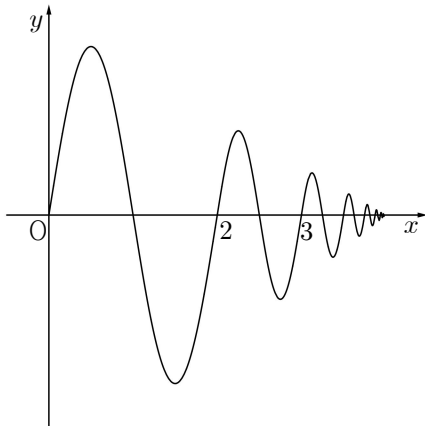
$$a_4 = 8 \text{ or } a_4 = 8$$

$$a_5 = 11 \text{ or } a_5 = 16$$

$$\therefore \sum_{n=1}^5 a_n \text{의 최댓값은 } 1 + 2 + 5 + 8 + 16 = 32 \text{이다.}$$

20 125

좌표평면위에 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



양수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2개, 4개, 6개 ... $2n$ 개가 되도록 하는 t 의 범위를 각각 구하면 다음과 같다.

$$2 \text{ 개} : 1 < t < 2$$

$$4 \text{ 개} : \frac{1}{2} < t < 1$$

$$6 \text{ 개} : \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$2n \text{ 개} : 2^{1-n} < t < 2^{2-n}$$

$\therefore$ 양수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 128개가 되도록 하는 t 의 범위는 $2^{-63} < t < 2^{-62}$ 이다.

$$\therefore a = 2^{-63}, b = 2^{-62}$$

$$\therefore \log_2 \frac{1}{ab} = \log_2 \frac{1}{2^{-63} \times 2^{-62}} = \log_2 2^{125} = 125$$

21 108

$$\overline{AP} = 4, \overline{CP} = 6 \rightarrow \overline{AP} : \overline{CP} = 2 : 3$$

$$\therefore \text{삼각형 ABP의 넓이} : \text{삼각형 BCP의 넓이} = 2 : 3$$

$$\overline{AB} = k \text{라 하면 } \overline{BC} = \sqrt{21}k \text{이다.}$$

$$\overline{BP} = a \text{라고 하면}$$

$$\text{삼각형 ABP의 넓이는 } \frac{1}{2}ak \sin(\angle ABP) \text{이고}$$

$$\text{삼각형 BCP의 넓이는 } \frac{1}{2}a\sqrt{21}k \sin(\angle CBP) \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{1}{2}ak \sin(\angle ABP) : \frac{1}{2}a\sqrt{21}k \sin(\angle CBP) = 2 : 3$$

$$\therefore \sin(\angle ABP) : \sin(\angle CBP) = 2 : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\angle CBD = \angle CAD \quad (\because \text{원주각}) \text{이므로}$$

$$\frac{10}{\cos(\angle CBD)} = \overline{AD}$$

$$\rightarrow \overline{AD} \times \cos(\angle CBD) = \overline{AD} \times \cos(\angle CAD) = 10 = \overline{AC}$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{\pi}{2} = \angle ABD$$

$$\therefore \sin(\angle ABP) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\therefore \sin(\angle CBP) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \rightarrow \cos(\angle CBP) = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\angle CBP = \theta \text{라 하자.}$$

삼각형 ABC에서 사인 법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{10}{\cos \theta} = 4\sqrt{7} = 2r$$

$$\therefore \overline{AD} = 4\sqrt{7}$$

$$\angle ACD = \angle ABD = \frac{\pi}{2}, \overline{AD} = 4\sqrt{7}, \overline{AC} = 10$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\sqrt{3}$$

$$\angle ACD = \frac{\pi}{2}, \overline{CD} = 2\sqrt{3}, \overline{CP} = 6$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore S^2 = 108$$

22 329

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ 0 & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체 집합에서 연속이려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이거나 $f(x) = g(x)$ 인 모든 실수 x 에서 $f(x) = g(x) = 0$ 이어야 한다.

그런데 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 일 경우

$h(x) = f(x)$ 가 되기 때문에 $h(x)$ 가 $x = -1$ 에서만 미분 불가능할 수 없다.

$f(x) = g(x)$ 인 x 가 하나만 있을 경우 $f(x) \geq g(x)$ 인 경우에 해당하므로 $f(x) = g(x)$ 인 x 는 2개 이상이다.

그런데 $g(x)$ 는 직선이므로 두 개 이상의 x 에서 $g(x) = 0$ 일 경우 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 $g(x) = 0$ 이게 된다.

함수 $h(x)$ 가 $x = -1$ 에서만 미분 불가능하려면 $f(x)$ 는 x 축과 $x = -1$ 과 $x = a$ (a 는 실수)에서만 만나야 하고 $f'(a) = 0$,

$f'(-1) \neq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(x) = 2(x+1)(x-a)^3$$

$$f'(x) = 8\left(x - \frac{a-3}{4}\right)(x-a)^2$$

$$\therefore f(x) \text{는 } x = \frac{a-3}{4} \text{에서 최솟값이자 극솟값 } -54 \text{를 가진다.}$$

$$f\left(\frac{a-3}{4}\right) = -54\left(\frac{a+1}{4}\right)^4 = -54$$

$$\therefore a = 3 \text{ or } a = -5$$

$$\therefore f(x) = 2(x+1)(x-3)^3 \text{ or } f(x) = 2(x+5)^3(x+1)$$

$$f(x) = 2(x+1)(x-3)^3 \text{일 때의 } \int_{-1}^0 f(x)dx \text{의 값은 } -\frac{188}{5} \text{이고}$$

$$f(x) = 2(x+5)^3(x+1) \text{일 때의 } \int_{-1}^0 f(x)dx \text{의 값은 } \frac{512}{5} \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx \text{의 값의 합은 } -\frac{188}{5} + \frac{512}{5} = \frac{324}{5} \text{이다.}$$

$$\therefore p = 5, q = 324$$

$$\therefore p + q = 329$$

확률과 통계

확률과 통계 23 ⑤

$(x+k)^4$ 의 전개식에서 상수항은 $k^4 = 81$ 이다.

$$\therefore k = 3$$

$\therefore (x+k)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_4C_2 \times k^2 = 6k^2 = 54$ 이다.

확률과 통계 24 ④

흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 4개가 들어있는 주머니에서 3개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 흰 바둑돌이 2개 이하로 나오는 경우는 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 1개 / 흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 2개 / 흰 바둑돌 0개, 검은 바둑돌 3개 가 있다.

$$\therefore {}_3C_2 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_4C_2 + {}_3C_0 \times {}_4C_3 = 12 + 18 + 4 = 34$$

확률과 통계 25 ②

$P(X \leq 8) = 0.3$, $P(X \geq 76) = 0.2$ 이므로

$P(8 \leq X \leq 76) = 0.5$ 이다.

또한 확률 변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 를 따르고

$P(X \leq 8) = 0.3$, $P(X \geq 76) = 0.2$ 이므로

$$P(8 \leq X \leq m) = P\left(\frac{8-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = 0.2$$

$$P\left(\frac{8-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-8}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$P(m \leq X \leq 76) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{76-m}{\sigma}\right) = 0.3 \text{ 이다.}$$

$P(|Z| \leq 0.52) = 0.4$, $P(|Z| \leq 0.84) = 0.6$ 이므로

$P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$, $P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.3$ 이다.

$$\therefore \frac{m-8}{\sigma} = 0.52, \quad \frac{76-m}{\sigma} = 0.84$$

$$\therefore \sigma = 50, \quad m = 34$$

$$\therefore m + \sigma = 34 + 50 = 84$$

확률과 통계 26 ②

$a^2 < 4(b+1)$ 을 만족하는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$

$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$

$(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

$(4, 4), (4, 5), (4, 6)$

$(5, 6)$

으로 21개다.

$\therefore$ 부등식 $a^2 < 4(b+1)$ 이 성립할 확률은 $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ 이다.

확률과 통계 27 ③

	남학생	여학생	Σ
안경 착용	50	150	200
안경 미 착용	k	$250-k$	250
Σ	$50+k$	$400-k$	450

$$\frac{150}{400-k} = \frac{3}{5}, \quad 400-k = 250$$

$$\therefore k = 150$$

$$\therefore \text{남학생수} = 150 + 50 = 200$$

확률과 통계 28 ②

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 $x = 3$ 을 대칭축으로 갖는다

$$f(\alpha) = g(\alpha) = f(\beta) = g(\beta) \Rightarrow 3 - \alpha = \beta - 3$$

$$\alpha - \beta = 2k \quad (k \text{는 양수}) \text{라고 하면 } 3 - \alpha = \beta - 3 = k$$

확률변수 Z 는 Y 와 평균만 다르고 표준편차는 같으므로 $h(x)$ 는 $g(x)$ 를 x 축 방향으로 $m-3$ 만큼 평행이동시킨 함수이다.

$$\therefore g(\beta) = h(\beta) \Rightarrow \alpha + m - 3 = \beta \quad \therefore m - 3 = 2k$$

$$\therefore m = \beta + k, \quad \gamma = \beta + 2k, \quad \gamma = 3 + 3k$$

확률 변수 W 가 표준정규분포를 따를 때

$$\int_3^\gamma f(x)dx = P(3 \leq X \leq \gamma) = P\left(0 \leq W \leq \frac{\gamma-3}{\sigma}\right)$$

$$\int_{-21}^3 f(x)dx = P(-21 \leq Y \leq 3) = P\left(-\frac{24}{2\sigma} \leq W \leq 0\right)$$

$$\therefore \frac{\gamma-3}{\sigma} = \frac{12}{\sigma} \quad \therefore \gamma = 15$$

$$\gamma = 15 = 3 + 3k \quad \therefore k = 4 \rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = 7, \quad m = 11$$

$$\therefore 3m + 2\alpha + \beta - \gamma = 33 - 2 + 7 - 15 = 23$$

확률과 통계 29 12

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \quad : \quad {}_pH_6$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \text{ 인데 } a_1 = a_4$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \geq a_5 \geq a_6 \quad : \quad {}_pH_3$$

$$1 - \frac{{}_pH_3}{{}_pH_6} = \frac{33}{34} \quad \therefore p = 12$$

확률과 통계 30 32

$f(n) \leq f(n+1)$ (n 은 5이하의 자연수)이며 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f 의 개수는 ${}_6C_3 \times {}_3H_{(6-3)} = 20 \times 10 = 200$ 이다.

$Y = \{f(f(x)) \mid x \text{는 6이하의 자연수}\}$ 에 대해서 $n(Y) = 3$ 인 함수 f 의 개수를 구하라는 것은 함수 f 의 치역의 원소가 3개이며 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구하라는 것과 같다.

함수 f 의 치역의 원소가 3개일 때, 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소가 3개이려면 함수 f 의 치역의 원소는 자기 자신에게 대응해야한다.

간단히 말하자면 함수 f 의 치역이 $\{a, b, c\}$ 라면 $f(a) = a$,

$f(b) = b$, $f(c) = c$ 이어야 한다는 것이다.

함수 f 의 치역으로 가능한 것들은 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\dots$, $\{3, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$ 이다. 각각에 대해서 위의 조건을 만족시키는 경우를 각각 구하면 다음과 같다.

치역	경우의 수
$\{1, 2, 3\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_0 = 1$
$\{1, 2, 4\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_1 = 2$
$\{1, 2, 5\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_2 = 3$
$\{1, 2, 6\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_3 = 4$
$\{1, 3, 4\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_0 = 2$
$\{1, 3, 5\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_1 = 4$
$\{1, 3, 6\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_2 = 6$
$\{1, 4, 5\}$	${}_2H_2 \times {}_2H_0 = 3$
$\{1, 4, 6\}$	${}_2H_2 \times {}_2H_1 = 6$
$\{1, 5, 6\}$	${}_2H_3 \times {}_2H_0 = 4$
$\{2, 3, 4\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_0 = 1$
$\{2, 3, 5\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_1 = 2$
$\{2, 3, 6\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_2 = 3$
$\{2, 4, 5\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_0 = 2$
$\{2, 4, 6\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_1 = 4$
$\{2, 5, 6\}$	${}_2H_2 \times {}_2H_0 = 3$
$\{3, 4, 5\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_0 = 1$
$\{3, 4, 6\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_1 = 2$
$\{3, 5, 6\}$	${}_2H_1 \times {}_2H_0 = 2$
$\{4, 5, 6\}$	${}_2H_0 \times {}_2H_0 = 1$

$\therefore$ 함수 f 의 치역의 원소가 3개일 때, 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소가 3개인 함수 f 의 개수는 56이다.

$$\therefore \frac{q}{p} = \frac{56}{200} = \frac{7}{25}$$

$$p = 25, \quad q = 7$$

$$\therefore p + q = 32$$

미적분

미적분 23 ⑤

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

미적분 24 ④

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx &= [-x^2 \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-2x \cos x) \, dx \\ &= [-x^2 \cos x]_0^{\pi} + 2 \left\{ [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right\} \\ &= [-x^2 \cos x]_0^{\pi} + 2 \{ [x \sin x]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi} \} \\ &= [2x \sin x]_0^{\pi} + [(2-x^2) \cos x]_0^{\pi} \\ &= 0 + \{ (\pi^2 - 2) - 2 \} = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

미적분 25 ④

점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(12t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2} \text{ 이다.}$$

$(12t)^2 \geq 0$, $\left(\frac{3}{t}\right)^2 \geq 0$ 이므로 산술기하평균에 의하여

$$(12t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2 \geq 2\sqrt{(12t)^2 \times \left(\frac{3}{t}\right)^2} = 72 \text{ 이다.}$$

(등호는 $(12t)^2 = \left(\frac{3}{t}\right)^2$ 일 때 성립)

즉 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 점 P의 속력은 최솟값을 가지고 그때의

최솟값은 $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore k = \frac{1}{2}, \quad m = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore km^2 = \frac{1}{2} \times 72 = 36$$

미적분 26 ②

$$f(3) = 10, \quad f'(10) = 2$$

$$f^{-1}(10) = 3, \quad (f^{-1})'(10) = \frac{1}{2}$$

$y = f^{-1}(x)$ 위의 점 $(t, f^{-1}(t))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = (f^{-1})'(t)(x - t) + f^{-1}(t)$$

$$\therefore g(t) = t - \frac{f^{-1}(t)}{(f^{-1})'(t)}$$

$$\therefore g(1) = 10 - 6 = 4$$

미적분 27 ①

삼차함수 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체이므로 어떤 실수 α 에 대하여 $x = \alpha$ 에서 $f(\alpha) = 1$ 이다.

함성함수 $h(x) = g(f(x))$ 는 $f(x) \neq 1$ 인 점에서 미분가능하다.

$\therefore f(x) = 1$ 인 점에서 $h(x)$ 가 미분가능하면 함성함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(f(x)) - g(f(\alpha))}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left\{ \frac{g(f(x)) - g(f(\alpha))}{f(x) - f(\alpha)} \times \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right\}$$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(f(x)) - g(f(\alpha))}{f(x) - f(\alpha)}$ 는 극한값이 존재하지 않으므로

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$ 이어야 $h(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서

미분가능하다.

$$\therefore f'(\alpha) = 0$$

$$\therefore f(x) = (x - \alpha)^3 + 1$$

$$f(3) = (3 - \alpha)^3 + 1 = 2, \therefore \alpha = 2$$

$$\therefore f(x) = (x - 2)^3 + 1$$

$$\therefore h(4) = g(f(4)) = g(9) = 2|9 - 1| = 16$$

미적분 28 ②

좌표평면 위에 곡선 $y = e^{tx}$ 와 곡선 $y = \ln x^{\frac{1}{t}}$ 이 있다. 곡선

$y = e^{tx}$ 위의 점 P, 곡선 $y = \ln x^{\frac{1}{t}}$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값을 $f(t)$ 라 하자. $\left| \frac{f'(e)}{f''(e)} \right|$ 의 값은?

곡선 $y = e^{tx}$ 를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 시킨 곡선은 $y = \frac{1}{t} \ln x = \ln x^{\frac{1}{t}}$ 이다.

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 땐 선분 PQ가 직선 $y = x$ 와 수직이고 곡선 $y = e^{tx}$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 $y = x$ 의 기울기와 같다.

점 P의 좌표를 $P(g(t), h(t))$ 라 하면 $Q(h(t), g(t))$ 가 되고 $te^{tg(t)} = 1$ 이 된다.

$$g(t) = -\frac{\ln t}{t}, h(t) = \frac{1}{t}$$

$$f(t) = \sqrt{2} |g(t) - h(t)| = \sqrt{2} \{h(t) - g(t)\} = \sqrt{2} \times \frac{\ln t + 1}{t}$$

$$f'(t) = -\sqrt{2} \times \frac{\ln t}{t^2} \rightarrow f'(e) = -\frac{\sqrt{2}}{e^2}$$

$$f''(t) = \sqrt{2} \times \frac{2 \ln t - 1}{t^3} \rightarrow f''(e) = \frac{\sqrt{2}}{e^3}$$

$$\therefore \left| \frac{f'(e)}{f''(e)} \right| = \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{e^2}}{\frac{\sqrt{2}}{e^3}} \right| = e$$

미적분 29 8

$\angle AO_1B_1 = \frac{\pi}{3}$, $\angle O_1B_1O_2 = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle O_1O_2B_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ 이다.

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{O_1B_1}}{\sin \angle O_1O_2B_1} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin \angle O_1B_1O_2}$.

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{이 성립한다.}$$

$$\therefore \overline{O_1O_2} = 4(\sqrt{3} - 1)$$

삼각형 $O_1B_1O_2$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4(3 - \sqrt{3})$

이므로 S_1 의 값은 $4(3 - \sqrt{3})$ 이다.

부채꼴 O_1AB_1 의 반지름의 길이는 4

부채꼴 O_2AB_2 의 반지름의 길이는 $4 - 4(\sqrt{3} - 1) = 4(2 - \sqrt{3})$

(넓음비)² = 넓이비, $S_2 - S_1 = S_1\{(2 - \sqrt{3})^2\}$

$\therefore$ 초항이 $4(3 - \sqrt{3})$, 공비가 $7 - 4\sqrt{3}$ 인 무한 등비급수가

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 과 같으므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4(3 - \sqrt{3})}{1 - (7 - 4\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2$$

$$a = 2, b = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$$

미적분 30 8

$4 \leq x \leq 12$ 에서 $f(x) = g(x)$ 이라면 $4 \leq x \leq 12$ 에서 $f(x)$ 는 $y = x$ 대칭이어야 한다.

$f(8) = 8$ 이므로 $[4, 12]$ 에서 $f(x)$ 는 $f(x) = 16 - x$ 혹은

$f(x) = \frac{64}{x}$ 이다.

$\int_6^{12} f(x) dx$ 가 최대이므로 $f(x) = \frac{64}{x}$ 이다.

$4 \leq x \leq 12$ 에서 $g(x) = \frac{64}{x}$ 이라면 함수 $f(x)$ 는

$4 \leq x \leq 16$ 에서 $f(x) = \frac{64}{x}$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 $\int_2^4 f(x) dx$ 가 최소이라면

$(0, 4]$ 에서 $f(x)$ 는 직선이다.

$$\therefore f(x) = -4x + 32 \quad (0 < x \leq 4)$$

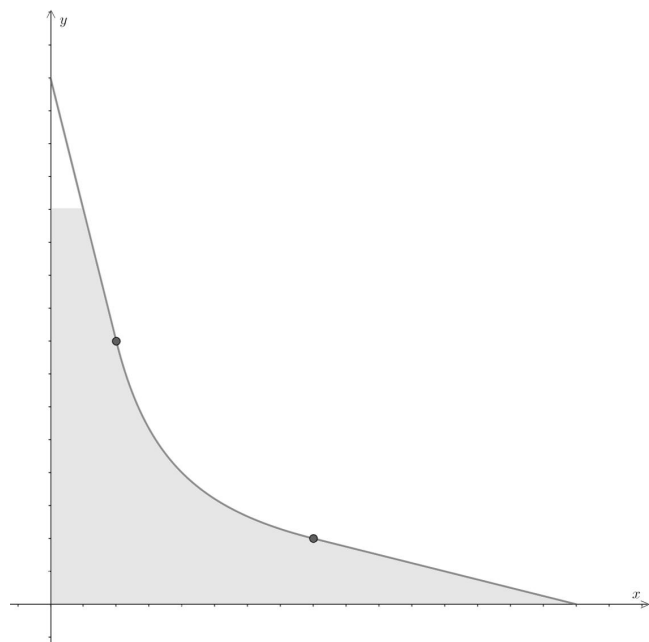
$\int_{16}^{32} f(x) dx$ 가 최소이라면 $(16, 32]$ 에서 $f(x)$ 는 직선이다.

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{4}x + 8 \quad (16 < x \leq 32)$$

구간 $(0, 32]$ 에서의 $f(x)$ 의 식은 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 32 & (0 < x < 4) \\ \frac{64}{x} & (4 \leq x \leq 16) \\ -\frac{1}{4}x + 8 & (16 < x \leq 32) \end{cases}$$

구간 $(0, 32]$ 에서의 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$\int_0^{24} g(x) dx = (\text{위 그림의 색칠된 넓이}) = 120 + 128 \ln 2$$

$$\therefore |a - b| = |120 - 128| = 8$$

기하

기하 23 ③

점 A(3, a, b)를 xy 평면에 내린 수선의 발은 (3, a, 0)이다.

$$\therefore a = 2$$

$$\overline{AH} = 2 = |b| \rightarrow b = \pm 2$$

$\therefore a+b$ 의 최댓값은 $2+2=4$ 이고 최솟값은 $2-2=0$ 이다.

기하 24 ⑤

선분 AF의 길이를 $3k$, 선분 BF의 길이를 k 라고 하자.

점 A에서 포물선의 준선인 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 H_1 ,

점 B에서 포물선의 준선인 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH_1} = 3k$, $\overline{BH_2} = k$ 가 되고 따라서

점 A, B의 x 좌표는 각각 $3k-3$, $k-3$ 이다.

직선의 기울기가 양수이므로 점 A가 제 1사분면 위의 점이고

점 B가 제 4사분면 위의 점이다.

점 A에서 직선 BH_2 에 내린 수선의 발을 H_3 이라 하면

$$\overline{AB} = 4k, \overline{BH_3} = 3k - k = 2k$$

$$\therefore \overline{AH_3} = 2\sqrt{3}k$$

점 A의 y 좌표는 $6\sqrt{k-1}$, 점 B의 y 좌표는

$$-2\sqrt{3k-9} \text{ 이므로}$$

$$2\sqrt{3}k = 6\sqrt{k-1} + 2\sqrt{3k-9} \text{ 가 성립한다.}$$

$$\therefore k = 4$$

$$\therefore \overline{AB} = 4k = 4 \times 4 = 16$$

기하 25 ②

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라 하자.

$$\therefore |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{19}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 36 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 76$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}|^2 &= \left| \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \right|^2 = \left| \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 \\ &= \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 - \frac{3}{2}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = 81 - 18 + 4 = 67 \end{aligned}$$

{별해}

점 M은 선분 BC의 중점이므로 중선정리가 사용이 가능하다.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

$$4^2 + 6^2 = 2(\sqrt{19}^2 + \overline{BM}^2)$$

$$\therefore \overline{BM} = \sqrt{7}$$

$\overline{BC} = 2\sqrt{7}$ 이므로 $\angle BAC = \theta$ 라 하고 삼각형 ABC에 대하여 코사인법칙을 적용하면

$$4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos \theta = (2\sqrt{7})^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}|^2 &= \left| \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right|^2 = \left| \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \right|^2 \\ &= \left| \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right|^2 = \frac{9}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \frac{9}{4} \times 36 - \frac{3}{2} \times 12 + \frac{1}{4} \times 16 = 81 - 18 + 4 = 67 \end{aligned}$$

기하 26 ④

점 P에서의 접선과 x 축이 이루는 각의 크기와 y 축이 이루는 각의 크기가 같다는 것은 점 P에서의 접선과 x 축이 이루는 각의 크기가 45° 라는 것이다.

점 P를 제1사분면 위의 점이라고 하면 삼각형 OAB의 넓이가

$$\frac{25}{2} \text{ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 } \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \text{ 이 된다.}$$

점 P의 좌표를 $P(p, q)$ 라 하면 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$\therefore \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

$$\text{점 P에서의 접선의 방정식 : } \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\therefore \frac{p}{a^2} = \frac{q}{b^2} = \frac{1}{5} \rightarrow a^2 = 5p, b^2 = 5q$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = \frac{p}{5} + \frac{q}{5} = 1 \rightarrow p + q = 5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5p + 5q = 5(p + q) = 25$$

기하 27 ⑤

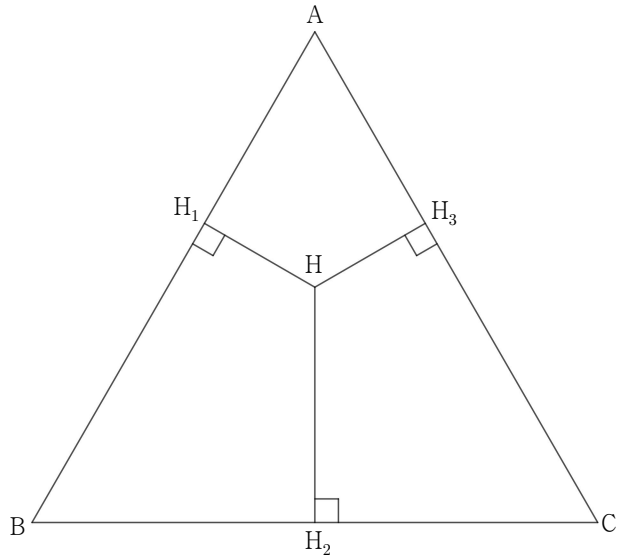
$\overline{PH} = h$ 라 하면

삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HH_1} = \overline{HH_3} = \sqrt{16-h^2}, \quad \overline{HH_2} = \sqrt{25-h^2}$$

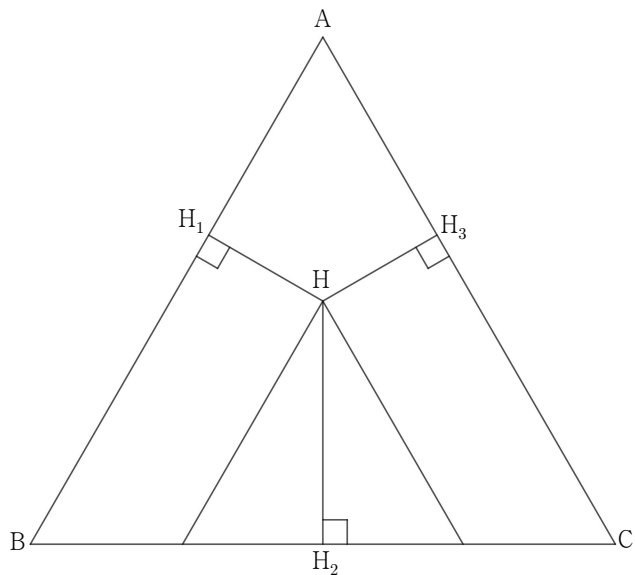
이다.

삼각형 ABC를 평면 α 에 대하여 수직인 방향으로 보면 다음과 같다.



$$\therefore \overline{BH_2} = \overline{CH_2}$$

점 H를 지나고 선분 AB, AC에 평행한 직선을 그리면 다음과 같다.



이를 통해서 $\overline{HH_1}$ 의 길이를 이용해서 h 의 값을 구해보자.

$$\frac{4 - \sqrt{\frac{25-h^2}{3}}}{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{16-h^2}$$

$$2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{25-h^2} = \sqrt{16-h^2}$$

$$h^2 = 13$$

$$\therefore \overline{PH}^2 = h^2 = 13$$

기하 28 ①

$$\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF'}) = 2\overrightarrow{PO}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PO}| = 5$$

$|\overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{OF'}| = 5 = |\overrightarrow{PO}|$ 이므로 점 P, F, F'은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.

$$\therefore \angle FPF' = 90^\circ$$

$\overline{F'P} = 2k$ 라 하면 $\overline{FP} = 2\sqrt{25-k^2}$ 이 된다.

선분 PF의 중점을 M이라 하자.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF} &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MF}) = |\overrightarrow{OM}|^2 - |\overrightarrow{MP}|^2 \\ &= k^2 - (25 - k^2) = 2k^2 - 25 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore k = 4 \rightarrow \overline{F'P} = 8, \quad \overline{FP} = 6$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{F'P} - \overline{FP} = 2a = 2$ 이다.

$$\therefore a = 1$$

$$a^2 + b^2 = 25 \rightarrow b^2 = 24$$

$$\therefore x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$$

점 P의 좌표를 구하기 위해서 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{PH} = \frac{24}{5}, \quad \overline{F'H} = \frac{32}{5} \rightarrow \overline{OH} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore P\left(\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 위의 점 $P\left(\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{7}{5}x - \frac{\frac{24}{5}y}{24} = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{접선의 방정식 : } y = 7x - 5$$

$y = 7x - 5$ 와 y 축이 만나는 점 A의 좌표는 $A(0, -5)$ 이므로

$$\overline{OA} = 5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \overline{OA}^2 = 5^2 = 25$$

기하 29 25

점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 H는 선분 AB위에 존재한다.

점 H는 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이므로 직선 PH는 평면 α 에 수직하고 평면 α 위에 있는 모든 직선과 수직이다.

$$\therefore \overline{PH} \perp \overline{AB}$$

이미 직선 PH와 직선 AB가 수직이기 때문에 직선 AB와 직선 CP가 서로 수직인 관계이기 위해선 직선 AB와 직선 CH도 수직이어야 합니다.

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{CH}$$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{4}{5} \text{ 이므로 } \sin(\angle ABC) = \frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

$$\overline{CH} = \overline{BC} \times \sin(\angle ABC) = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

$$\overline{BC} = 10, \quad \overline{CH} = 6, \quad \angle AHC = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{BH} = 8 \text{ 이다.}$$

점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H'이라 하자.

$$\overline{BH} \times \overline{CH} = \overline{BC} \times \overline{HH'}$$

$$\therefore \overline{HH'} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$$

점 P가 평면 α 와의 거리가 2이므로 $\overline{PH} = 2$ 이다.

$$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{HH'}} = \frac{2}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore 60 \tan \theta = 25$$

기하 30 80

조건 (가)에 의하여 점 P는 점 A를 중심으로 하는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원 밖의 점이며 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 위의 점이다.

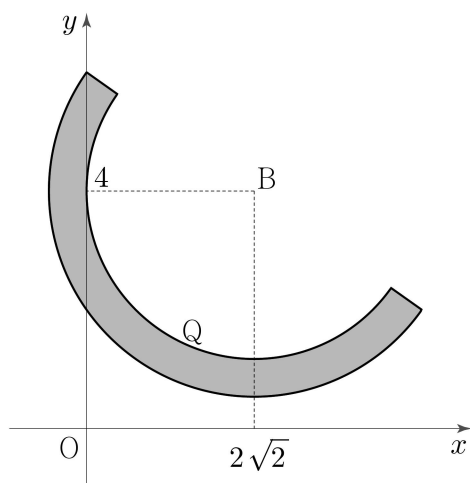
즉 점 P가 그리는 도형은 도넛 모양의 도형이 된다.

조건 (나)의 식을 변형을 하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

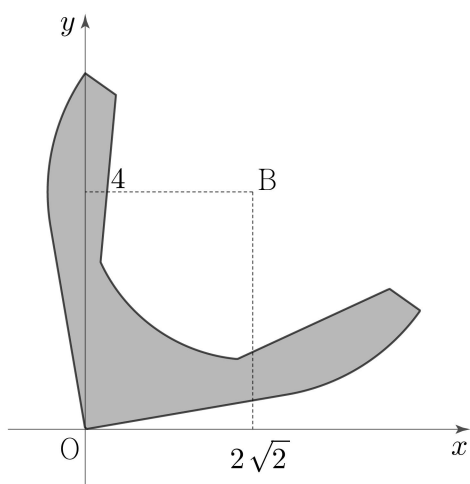
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AP} \leq 0$$

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AP}$ 이므로 점 Q는 점 A를 중심으로 하는 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원 밖의 점이며 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원 위의 점들 중 $\overrightarrow{OB}$ 와 이루는 각의 크기가 90° 이상 270° 이하인 점들이다.

따라서 점 Q가 그리는 도형을 그리면 다음과 같다.



점 Q를 움직이면서 선분 OQ를 관찰하여 점 X가 그리는 도형을 그리면 다음과 같다.



이 도형의 넓이를 구하면

$$S = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{4} - (2\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{6} - (2\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 12 + 3\pi - \frac{4}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

$$= 12 - 4\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore a = 12, b = -4, c = \frac{5}{3}$$

$$\therefore |abc| = \left| 12 \times (-4) \times \frac{5}{3} \right| = 80$$