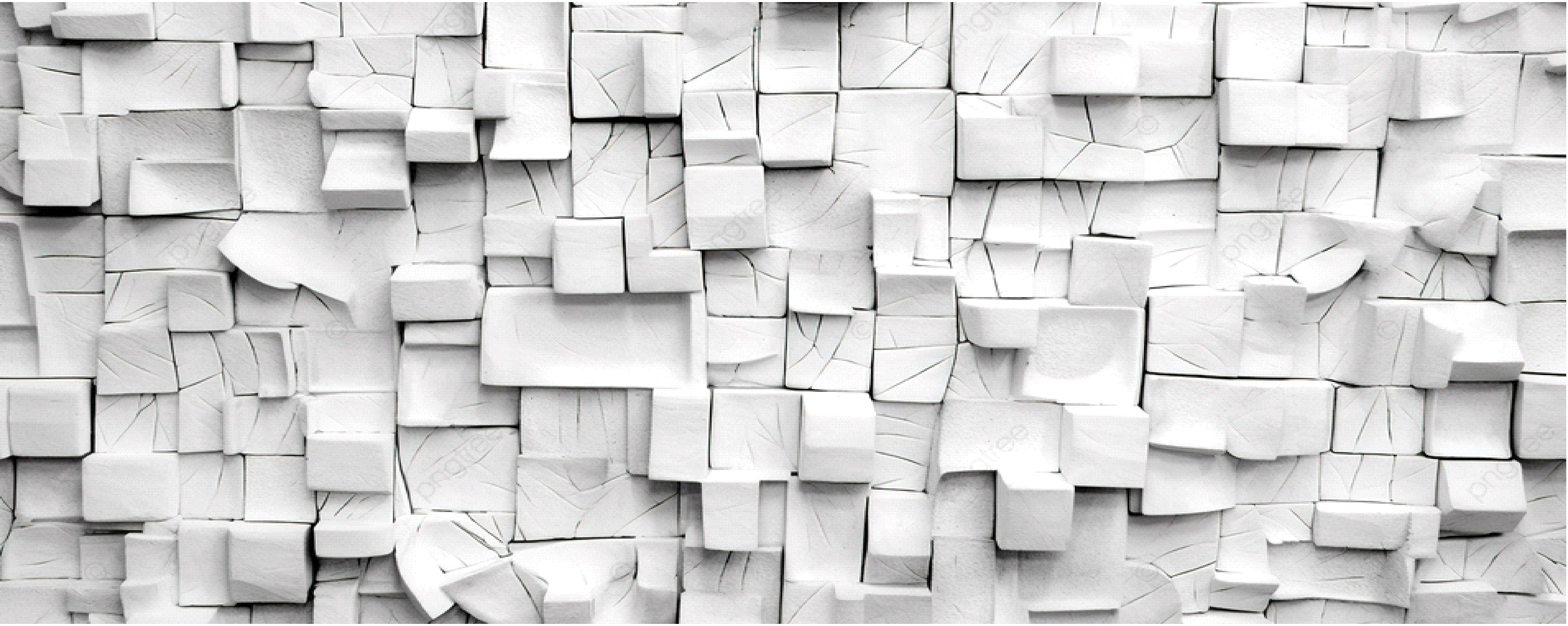
"유일하게 부족한 것은 노력뿐!"

2025년 5모 보충프린트

ver.미적분



유성민T

대치명인학원

실전같이 풀어라 !!!!

5월 모의고사 보충프린트 ver. 미적분

■ 실시일: 2024년 5월 11일 (일)

001 2025년 고3 5월 교육청 미적분

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고, 모든 실수 x에 대하여

$$e^{2f(x)} - e^{f(2x)} - 2e^{3x} = 0$$

을 만족시킨다. $g'(f(0))$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[정답률 : 64%]

002

068 2023년 고3 10월 교육청 미적분

함수 $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

003

077 2025학년도 사관학교 미적분

함수 $f(x) = \ln(e^{x} + 2)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x) = \{g(x)\}^2$에 대하여 $h'(\ln 4)$의 값은? [3점]

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $4\ln 2$

④ $5\ln 2$ ⑤ $6\ln 2$

004 2025년 고3 5월 교육청 미적분

28. 7π보다 작은 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\sin(a+b\cos x)$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 방정식 $f'(x)=b$의 해가 존재한다.

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\frac{b}{a}$

① 5π ② $\frac{25}{4}\pi$ ③ $\frac{15}{2}\pi$ ④ $\frac{35}{4}\pi$ ⑤ 10π

[정답률 : 26.8%]

005

148 2025학년도 수능 미적분

두 상수 $a(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수 $f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

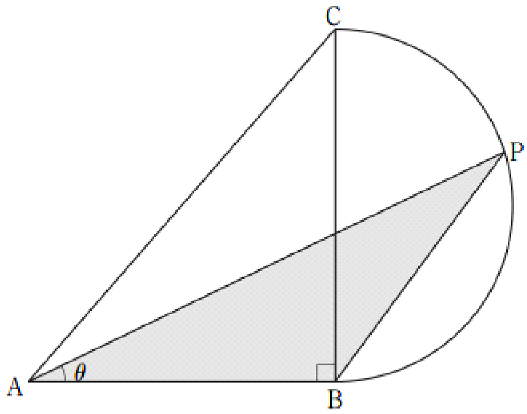
(가) $f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi a+b$

(나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,\ 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

006 2025년 고3 5월 교육청 미적분

29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$이고 $\angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 BC 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{BAP}=\theta$일 때, 삼각형 ABP의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 점 B가 아니다.) [4점]

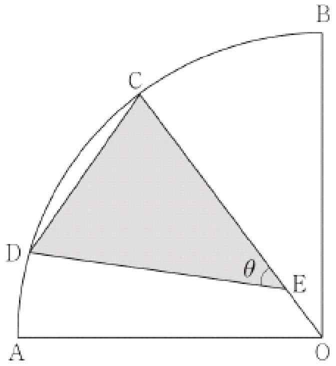


[정답률 : 5%]

007 2025년 고3 5월 규토 미적분

30. 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 선분 OC 위의 점 E를 $\overline{\mathrm{CE}}=4$가 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 D를 $\angle\mathrm{CED}=\theta$가 되도록 잡을 때, 삼각형 CED의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



008 2025년 고3 5월 교육청 미적분

30. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} (-1)^n & (a_n < 1) \\ a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n})$은 수렴한다.
>
> (나) $b_5^{\,2} = b_4 b_6 - \frac{9}{4}$

$90a_3$의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 8.1%]

009 2025년 고3 5월 규토 미적분

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} |a_n| & (|a_n| \leq 6) \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n| > 6) \end{cases}$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $b_5 = 6$
>
> (나) $\sum_{n=5}^{\infty}(a_n - |a_n|) = -8$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = S$일 때, $-20 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

010

081 2025학년도 수능 미적분

등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

<답>

1. ④
2. ⑤
3. ③
4. ③
5. 17
6. 45
7. 55
8. 15
9. 24
10. 25

<해설>

1. ④

27. **[출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기**

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)e^{2f(x)}-2f'(2x)e^{f(2x)}-6e^{3x}=0$

$x=0$을 대입하면

$2f'(0)e^{2f(0)}-2f'(0)e^{f(0)}-6=0$

$f'(0)(e^{2f(0)}-e^{f(0)})=3$ ⋯ ㉠

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$에 $x=0$을 대입하면

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}=2$

이므로 ㉠에서 $f'(0)=\dfrac{3}{2}$

따라서 $g'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{2}{3}$

2. ⑤

068

$f(x)=e^{2x}+e^x-1$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$

$g(5f(x))$을 x에 대해 미분하면

$\{g(5f(x))\}'=5f'(x)g'(5f(x))$

$f'(0)=3$, $f(0)=1$이므로

$5f'(0)g'(5f(0))=15g'(5)$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$의 양변에 $x=5$을 대입하면

$g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}$

$f(g(x))=x$의 양변에 $x=5$을 대입하면 $f(g(5))=5$이고,

$e^{2x}+e^x-1=5 \Rightarrow e^{2x}+e^x-6=0$

$\Rightarrow (e^x+3)(e^x-2)=0 \Rightarrow e^x=2 \ (\because\ e^x>0)$

$\Rightarrow x=\ln 2$

이므로 $g(5)=\ln 2$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$

$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}=8+2=10$

$g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}=\dfrac{1}{f'(\ln 2)}=\dfrac{1}{10}$

따라서 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는

$15g'(5)=15\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{2}$이다.

답 ⑤

3. ③

077

$f(x)=\ln(e^x+2)$, $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$

$h(x)=\{g(x)\}^2$, $h'(x)=2g'(x)g(x)$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 의 양변에 $x=\ln4$을 대입하면

$g'(\ln4)=\dfrac{1}{f'(g(\ln4))}$

$f(g(x))=x$ 의 양변에 $x=\ln4$을 대입하면

$f(g(\ln4))=\ln4$ 이므로 $g(\ln4)=\ln2$

$\therefore g'(\ln4)=\dfrac{1}{f'(g(\ln4))}=\dfrac{1}{f'(\ln2)}=\dfrac{1}{\frac{2}{4}}=2$

따라서

$h'(\ln4)=2g'(\ln4)g(\ln4)=2\times2\times\ln2=4\ln2$ 이다.

답 ③

4. ③

28. [출제의도] 삼각함수의 미분을 이용하여 추론하기

$f(x)=\sin(a+b\cos x)$에서

$f'(x)=\cos(a+b\cos x)\times(-b\sin x)$

$f'(x)=b$에서

$-b\sin x\cos(a+b\cos x)=b$

$\sin x\cos(a+b\cos x)=-1$

$-1\le\sin x\le1$, $-1\le\cos(a+b\cos x)\le1$이므로

$\sin x=1$, $\cos(a+b\cos x)=-1$이거나

$\sin x=-1$, $\cos(a+b\cos x)=1$이다.

이때 $\sin x=1$ 또는 $\sin x=-1$이면

$\cos x=0$이므로

$\cos a=-1$ 또는 $\cos a=1$

$a=(2n-1)\pi$ 또는 $a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)

조건 (나)에서

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)}{x}=\frac{b}{a}$이고 $\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\sin(f(a)\pi)=0$

$-1\le f(a)\le1$이므로

$f(a)=-1$ 또는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=1$

(i) $f(a)=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi+\frac{x}{4}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\frac{x}{4}}{x}=-\frac{1}{4}<0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a)=0$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a)=-1$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(-\pi-\frac{x}{4}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{1}{4}$$

이므로 조건 (나)에서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$, $a=4b$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(a)=-1$이고, $b=\dfrac{a}{4}$

$a=(2n-1)\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a-\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{6n-3}{4}\pi$

이므로 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(a)\ne-1$

$a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a+\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{5n}{2}\pi$

이므로 $n=3$일 때, $f(a)=-1$을 만족시킨다.

그러므로 $a=6\pi$, $b=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $a+b=\dfrac{15}{2}\pi$

5. 17

148

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$

$f(0)=0 \Rightarrow \sin b=0 \Rightarrow b=m\pi$ (m은 정수)
$f(2\pi)=2\pi a+b \Rightarrow \sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$
방정식 $\sin x=x$의 실근은 0뿐이므로
$2\pi a+b=0 \Rightarrow 2\pi a+m\pi=0 \Rightarrow a=-\frac{m}{2}$ (m은 정수)
$1\le a\le 2$이므로 $a=1$ or $a=\frac{3}{2}$ or $a=2$

$f(x)=\sin(ax-2\pi a+\sin x)$
$f'(x)=(a+\cos x)\cos(ax-2\pi a+\sin x)$

$f'(0)=(a+1)\cos(-2\pi a)=(a+1)\cos 2\pi a$
$f'(2\pi)=a+1$
$f'(4\pi)=(a+1)\cos 2\pi a$

(나) 조건에 의해 $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값이 4π이어야 한다.
만약 $a=1$ or $a=2$이면 $f'(0)=f'(2\pi)$가 성립하므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $a=\frac{3}{2}$, $b=-3\pi$이어야 한다.

$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

$f'(x)=\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로
$x=\alpha$에서 극대이면 $f'(\alpha)=0$이고, $x=\alpha$의 좌우에서
$f'(x)$의 부호가 $+$ $-$로 변해야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $\frac{3}{2}+\cos x>0$이므로
$f'(x)=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)=0$
$g(x)=\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$라 하면
$g'(x)=\frac{3}{2}+\cos x>0$이므로 $g(x)$는 증가함수이고,
$g(0)=-3\pi$, $g(4\pi)=3\pi$이다.

$\cos\{g(x)\}=0 \Rightarrow g(x)=\pm\frac{k}{2}$ (k는 홀수)을 만족시키는 x의 값이 α의 후보가 된다.

$g(x)=-\frac{5}{2}\pi$, $g(x)=-\frac{3}{2}\pi$, $g(x)=-\frac{\pi}{2}\pi$,

$g(x)=\frac{\pi}{2}$, $g(x)=\frac{3}{2}\pi$, $g(x)=\frac{5}{2}\pi$
를 만족시키는 x의 값을 각각 β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6라 하자.

이제 $f'(x)=\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$의 부호변화를 살펴보자.

$\frac{3}{2}+\cos x$는 항상 양수이므로
$\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)=\cos\{g(x)\}$의 부호만 따지면 된다.

$x\to\beta_1- \Rightarrow g(\beta_1-)\to-\frac{5}{2}\pi- \Rightarrow \cos\left(-\frac{5}{2}\pi-\right)<0$
$x\to\beta_1+ \Rightarrow g(\beta_1+)\to-\frac{5}{2}\pi+ \Rightarrow \cos\left(-\frac{5}{2}\pi+\right)>0$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta_1$에서 극소이다.

$x\to\beta_2- \Rightarrow g(\beta_2-)\to-\frac{3}{2}\pi- \Rightarrow \cos\left(-\frac{3}{2}\pi-\right)>0$
$x\to\beta_2+ \Rightarrow g(\beta_2+)\to-\frac{3}{2}\pi+ \Rightarrow \cos\left(-\frac{3}{2}\pi+\right)>0$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta_2$에서 극대이다.

마찬가지 방법으로 $f'(x)$의 부호변화를 살펴보면
함수 $f(x)$는 $x=\beta_1$, $x=\beta_3$, $x=\beta_5$에서 극소이고,
$x=\beta_2$, $x=\beta_4$, $x=\beta_6$에서 극대이다.

$\therefore A = \{\beta_2, \beta_4, \beta_6\}$

즉, 집합 A의 원소의 개수는 3이므로 $n = 3$이다.

집합 A의 원소 중 가장 작은 값은 β_2이므로

$\alpha_1 = \beta_2$이다.

$g(\beta_2) = -\frac{3}{2}\pi \Rightarrow \frac{3}{2}\beta_2 - 3\pi + \sin\beta_2 = -\frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow \sin\beta_2 = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\beta_2 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2}(x-\pi)$

방정식 $\sin x = -\frac{3}{2}(x-\pi)$의 실근은 π뿐이므로

$\beta_2 = \pi \Rightarrow \alpha_1 = \pi$

$n\alpha_1 - ab = 3\times\pi - \frac{3}{2}\times(-3\pi) = \frac{15}{2}\pi$이므로

$p = 2,\ q = 15$이다.

따라서 $p + q = 2 + 15 = 17$이다.

답 17

6. 45

29. [출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AP}} = t$라 하면 삼각형 ABP의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}t\sin\theta$ ⋯ ㉠

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은

반원의 중심이고, 직각삼각형 ABM에서

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BM}} = 1$이므로 $\angle\mathrm{BAM} = \frac{\pi}{6}$

$\theta \neq \frac{\pi}{6}$일 때, $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$이므로

삼각형 APM에서 코사인법칙에 의하여

$1^2 = 2^2 + t^2 - 2\times2\times t\times\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$

$t^2 - 4t\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + 3 = 0$ ⋯ ㉡

$\theta = \frac{\pi}{6}$일 때, $t = \overline{\mathrm{AM}} + \overline{\mathrm{MP}} = 2 + 1 = 3$이므로

$\theta = \frac{\pi}{6}$일 때도 ㉡이 성립한다.

㉡의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2t\frac{dt}{d\theta} - 4\frac{dt}{d\theta}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - 4t\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 0$

$\theta = \frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\frac{dt}{d\theta} = 0$

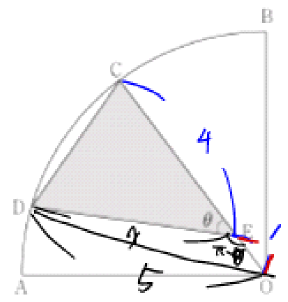
㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}t\cos\theta$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times0\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$

따라서 $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 20\times\frac{9}{4} = 45$

7. 55



$f'(\theta) = 2\frac{dx}{d\theta}\sin\theta + 2x\cos\theta$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\frac{dx}{d\theta} + 6\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\frac{dx}{d\theta} + 6$

$= \frac{6}{7} + 6 = \frac{48}{7}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times x\times4\times\sin\theta = 2x\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta) = \frac{1+x^2-25}{2x}$

$-\cos\theta = \frac{x^2-24}{2x}$

$-\cos\theta = \left(\frac{x}{2} - \frac{12}{x}\right)$

θ에 대해 미분

$-\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x^2-24}{2x}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\sqrt{2}x = x^2 - 24$

$x^2 + \sqrt{2}x - 24 = 0$

$(x+4\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) = 0$

$x = 3\sqrt{2}$

$\sin\theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{12}{x^2}\right)\frac{dx}{d\theta}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{7}{6}\right)\frac{dx}{d\theta}$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$

55

8. 15

30. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이므로 $a_1 > 0$, $r > 0$

(ⅰ) $0 < r < 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

$a_{3n-2} < 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n \ge 3k-2$일 때 $b_n = (-1)^n$이므로

n이 k 이상의 짝수이면

$3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n} = 3+7+2 = 12$,

n이 k 이상의 홀수이면

$3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n} = -3-7-2 = -12$

수열 $\{3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n}\}$이 발산하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r = 1$일 때

(a) $0 < a_1 < 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n = (-1)^n$이므로

n이 짝수이면

$3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n} = 3+7+2 = 12$,

n이 홀수이면

$3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n} = -3-7-2 = -12$

수열 $\{3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n}\}$이 발산하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_1 \ge 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n = a_n = a_1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n})$

$= \lim_{n\to\infty}(3a_1 - 7a_1 + 2a_1) = -2a_1 \ne 0$

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r > 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

$a_{3n} \ge 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n \ge k$일 때 $b_n = a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n})$$

$$= \sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n}) + \sum_{n=k+1}^{\infty}(3a_{3n-2} - 7a_{3n-1} + 2a_{3n})$$

$$= \sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n}) + \sum_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2} \times (3 - 7r + 2r^2)\}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2} - 7b_{3n-1} + 2b_{3n})$이 수렴하므로

급수 $\sum_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2} \times (3 - 7r + 2r^2)\}$이 수렴한다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\{a_{3n-2} \times (3 - 7r + 2r^2)\} = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_{3n-2} = \infty$이므로 $3 - 7r + 2r^2 = 0$

$2r^2 - 7r + 3 = (2r-1)(r-3) = 0$

$r > 1$이므로 $r = 3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $r = 3$

조건 (나)에서 $b_5^2 \ne b_4 b_6$이므로 세 수 b_4, b_5, b_6은 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

이때 두 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$$b_n = \begin{cases} (-1)^n & (n \le 4) \\ a_n & (n \ge 5) \end{cases} \text{ 또는 } b_n = \begin{cases} (-1)^n & (n \le 5) \\ a_n & (n \ge 6) \end{cases}$$

이다.

$$b_n = \begin{cases} (-1)^n & (n \le 5) \\ a_n & (n \ge 6) \end{cases} \text{일 때,}$$

$a_5 < 1$, $a_6 = 3a_5 \ge 1$이므로 $\frac{1}{3} \le a_5 < 1$ ⋯ ㉠

$b_5^2 = b_4 b_6 - \frac{9}{4}$에서 $(-1)^2 = 1 \times a_6 - \frac{9}{4}$, $a_6 = \frac{13}{4}$

$a_5 = \frac{13}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$$b_n = \begin{cases} (-1)^n & (n \le 4) \\ a_n & (n \ge 5) \end{cases} \text{일 때,}$$

$a_4 < 1$, $a_5 = 3a_4 \ge 1$이므로 $\frac{1}{3} \le a_4 < 1$ ⋯ ㉡

$b_5^2 = b_4 b_6 - \frac{9}{4}$에서 $a_5^2 = 1 \times a_6 - \frac{9}{4}$

$4a_5^2 - 12a_5 + 9 = (2a_5 - 3)^2 = 0$이므로 $a_5 = \frac{3}{2}$

$a_4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 $90a_3 = 90 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = 15$

9. 24

29. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}|a_n| & (|a_n|\le 6)\\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & (|a_n|>6)\end{cases}$$

r

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5=6$
(나) $\sum_{n=5}^{\infty}(a_n-|a_n|)=-8$

$a_n\ge0 \Rightarrow 0$

$a_n<0 \Rightarrow 2a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=S$일 때, $-20\times S$의 값을 구하시오. [4점]

24

$\Rightarrow |a_5|=6 \Rightarrow a_5=6$ or $a_5=-6$

$|r|>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 수렴 X

$r=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 수렴 X

$r=-1 \Rightarrow$ 수렴 X

$\therefore |r|<1$

① $a_5=6$

$0<r<1 \Rightarrow a_n-|a_n|=0$ 모순 X

$-1<r<0 \Rightarrow \dfrac{2\times 6r}{1-r^2}=-8$, $-\frac{3}{2}r=1-r^2$, $r=-\frac{1}{2}$

② $a_5=-6$

$0<r<1 \Rightarrow \dfrac{-12}{1-r}=-8$ 모순

$-1<r<0 \Rightarrow \dfrac{-12}{1-r^2}=-8$, $\frac{3}{2}=1-r^2$ 모순

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	6	$\lvert a_6\rvert$	$\lvert a_7\rvert$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
96	-48	24	-12	6	-3	$\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -48+24-12+6 \quad 36 \quad -9 \quad \frac{9}{4}$

$-30+\dfrac{36}{1+\frac{1}{4}}=-30+\dfrac{36}{\frac{5}{4}}$

$-30+\dfrac{144}{5}=-\dfrac{6}{5} \quad \therefore -20\times-\dfrac{6}{5}=24$

10. 25

081

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

a, r의 부호에 따라 case분류하면

① $a>0$, $r>0$일때

$a_n>0 \Rightarrow |a_n|-a_n=0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

② $a<0$, $r>0$일때

$a_n<0 \Rightarrow |a_n|+a_n=0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

③ $a>0$, $r<0$일 때

$$|a_n|+a_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\ge0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\ge0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n})=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3},\quad \frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$\Rightarrow r=-\frac{1}{2}$, $a=5$

④ $a<0$, $r<0$일 때

$$|a_n|+a_n=\begin{cases}2a_n & (a_n\ge0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\ge0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})=\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3},\ \frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$\Rightarrow r=-2$

$r^2>1$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$

모두 수렴하지 않는다.

①, ②, ③, ④에 의해 $a=5,\ r=-\frac{1}{2}$이므로

$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+k-1}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow 5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)>\frac{1}{700}$$

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$에서 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$을 대입하면

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^6=-\frac{1}{64}$

$\vdots\qquad\vdots$

k가 홀수이면 $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{32}\ \cdots$ 이고,

k가 짝수이면 $-\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{64}\ \cdots$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}+\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{5}$$

$$5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\right)>\frac{1}{700}$$

$$\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

를 만족시키는 모든 자연수 m은

$m=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$이다.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$이다.

답 25