"유일하게 부족한 것은 노력뿐!"

2025년 5모 보충프린트

ver.수1수2

유성민T

대치명인학원

5월 모의고사 보충프린트 ver. 수1수2

■ 실시일: 2024년 5월 10일 (토)

001 2025년 고3 5월 교육청 공통

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=ax^3+2x-3+\int_0^1 f'(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

[정답률 : 63.4%]

002

100 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?

(단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

003

101 2020학년도 수능 나형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx=5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

004 2025년 고3 5월 교육청 공통

10. 모든 항이 자연수이고 공차가 같은 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\times b_k}=\frac{n}{8n+4}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)$의 값은? [4점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

[정답률 : 56.9%]

005

081 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

006

093 2025학년도 수능 공통

$a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130

④ 135 ⑤ 140

007 2025년 고3 5월 교육청 공통

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = kt^3 - 6t^2 + t$$

이다. 양수 k에 대하여 시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1일 때, 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는? [4점]

① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

008

150 2025학년도 수능 공통

시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12

④ 15 ⑤ 18

009

052 2022학년도 고3 9월 평가원 공통

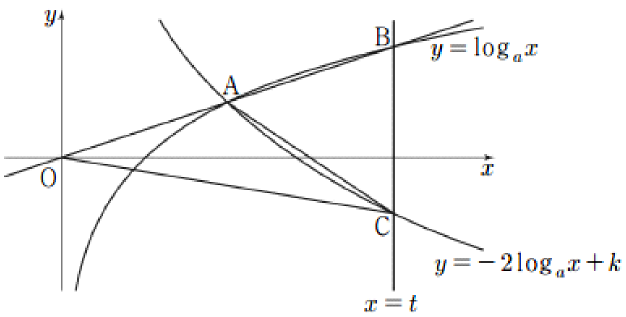
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 $v(t) = -4t^3 + 12t^2$이다. 시각 $t = k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t = 3k$에서 $t = 4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27

④ 29 ⑤ 31

010 2025년 고3 5월 교육청 공통

12. 그림과 같이 세 상수 $a\,(a>1)$, k, t에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=-2\log_a x+k$가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=-2\log_a x+k$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 AB가 원점 O를 지나고 두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 2로 같을 때, $a\times k\times t$의 값은? (단, $k>0$이고, t는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $8\sqrt{2}$ ② 16 ③ $16\sqrt{2}$ ④ 24 ⑤ $24\sqrt{2}$

[정답률 : 46.8%]

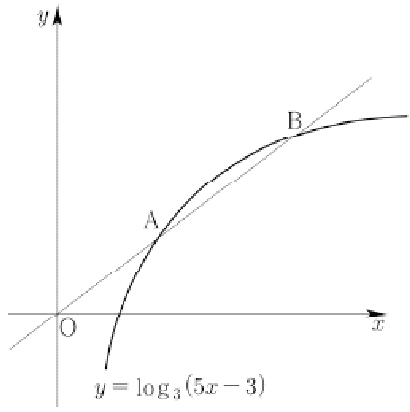
011

090 2019년 고2 9월 교육청 가형

곡선 $y=\log_3(5x-3)$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.
(나) $\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

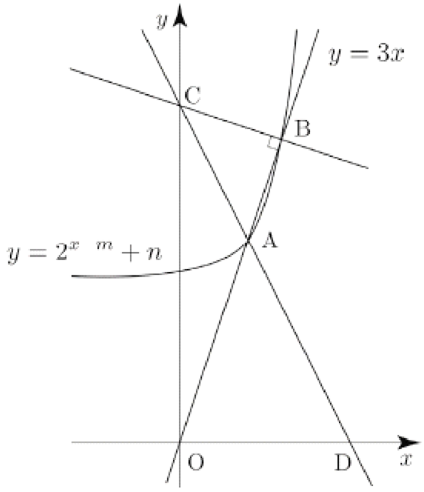
직선 AB의 기울기가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



012

110 2023년 고3 7월 교육청 공통

그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n$ $(m>0,\ n>0)$과 직선 $y=3x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



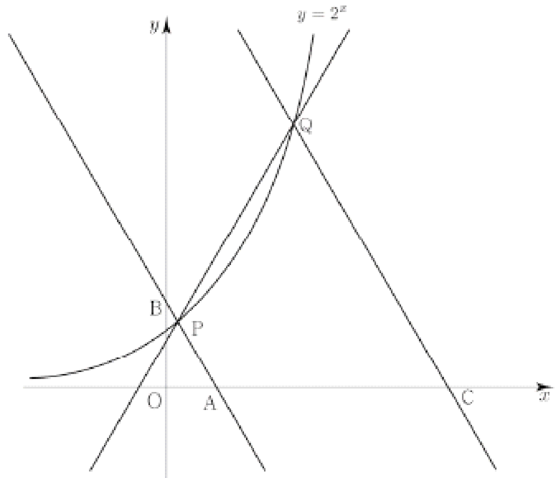
013

112 2023학년도 고3 9월 평가원 공통

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

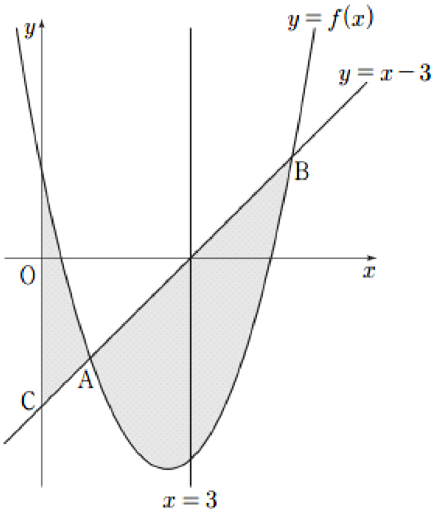
일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



014 2025년 고3 5월 교육청 공통

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-3$이 x좌표가 양수인 두 점 A, B에서 만난다. 직선 $y=x-3$과 y축이 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=3$이 이등분하고, $S_2-2S_1=6$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 3보다 작고, 점 B의 x좌표는 3보다 크다.) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

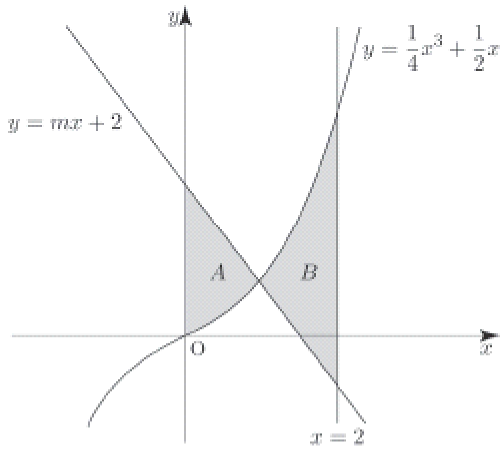


[정답률 : 34.3%]

015

090 2025학년도 고3 6월 평가원 공통

곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]



① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

016

091 2025학년도 고3 9월 평가원 공통

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$

④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

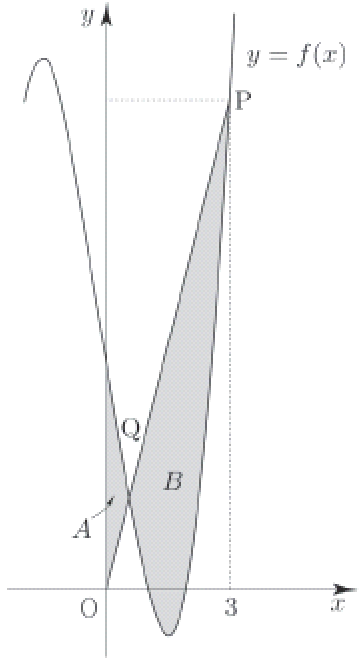
017

099 2025학년도 수능 공통

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 P$(3,\ f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]



① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$

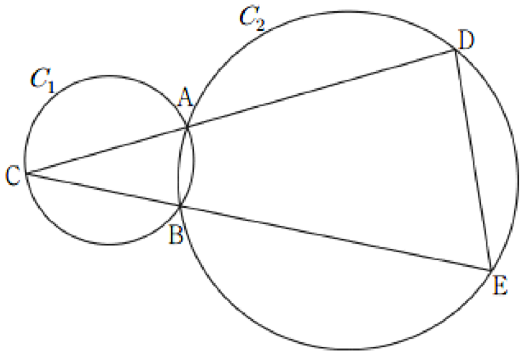
④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$

018 2025년 고3 5월 교육청 공통

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원 C_1, C_2가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 원 C_1 위의 점 C와 원 C_2 위의 두 점 D, E에 대하여 세 점 C, A, D와 세 점 C, B, E가 각각 한 직선 위에 있다.

$$r_1 : r_2 = 1 : 2,\quad \overline{AC} = 3,\quad \overline{AD} = 5,\quad \overline{DE} = 4$$

일 때, 선분 CE의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{7}$ ② $\sqrt{66}$ ③ $\sqrt{69}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

[정답률 : 39.3%]

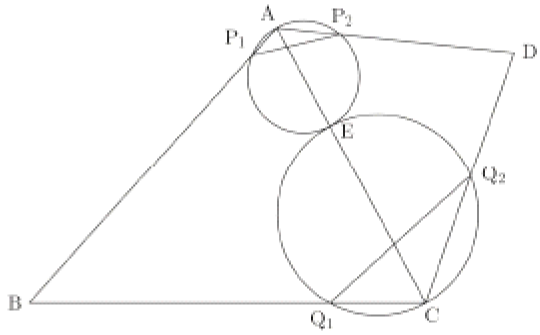
019

068 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

그림과 같이

$$\overline{BC} = 3,\ \overline{CD} = 2,\ \cos(\angle BCD) = -\frac{1}{3},\ \angle DAB > \frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB} + \overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB} > \overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$

④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

020 2025년 고3 5월 교육청 공통

15. 최고차항의 계수가 1이고 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $\frac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은? [4점]

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값은 존재하지 않는다.
(나) $x \geq a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

① $-\frac{41}{3}$ ② -13 ③ $-\frac{37}{3}$ ④ $-\frac{35}{3}$ ⑤ -11

[정답률 : 18.4%]

021

040 2022학년도 수능 공통

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

022

195 2024년 고3 7월 교육청 공통

두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a \neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m < a < M$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10 \times (M-m)$의 값을 구하시오. [4점]

023 2025년 고3 5월 교육청 공통

20. 양수 t에 대하여 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2}{t}\right]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sqrt{3}\sin(t\pi x),\quad g(x)=-3\cos(t\pi x)$$

가 있다. $0<k<\frac{2}{t}$인 상수 k에 대하여 $f(k)=g(k)=3k$일 때, $60(t+k)$의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 19.3%]

024 2025년 고3 5월 규토 공통

20. $0 \le x \le \frac{1}{12}$일 때, x에 대한 방정식

$$(\sqrt{3}\sin a\pi x-\cos a\pi x)(\sin a\pi x+\sqrt{3}\cos a\pi x)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 7이 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

025 2025년 고3 5월 교육청 공통

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 양수 a와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이다.

$f(a)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 7.2%]

026

212 2025학년도 수능 공통

상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

027 2025년 고3 5월 교육청 공통

22. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \times a_2 > 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^{\ 2} & (a_n \le 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 = a_5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답률 : 2.7%]

026

072 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18
④ 22 ⑤ 26

<답>

1. ④
2. ④
3. 7
4. ③
5. ①
6. ①
7. ①
8. ②
9. ③
10. ③
11. 11
12. 13
13. 220
14. ②
15. ③
16. ④
17. ⑤
18. ④
19. ①
20. ⑤
21. ③
22. 35
23. 110
24. 243
25. 200
26. ②
27. 71
28. ②

<해설>

1. ④

9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$xf(x)=ax^3+2x-3+\int_0^1 f'(t)dt$의 양변에

$x=0$을 대입하면

$0\times f(0)=-3+\int_0^1 f'(t)dt$에서 $\int_0^1 f'(t)dt=3$

$xf(x)=ax^3+2x$, $f(x)=ax^2+2$

$\int_0^1 f'(t)dt=f(1)-f(0)=a=3$

그러므로 $f(x)=3x^2+2$

따라서 $\int_0^2 f(x)dx=\left[x^3+2x\right]_0^2=12$

2. ④

100

다항함수 $f(x)$에 대하여

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$ ⋯ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a=2+4a$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)dt$

$\Rightarrow 0=3a-\int_0^1 f(t)dt \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt=3a$

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$

$\Rightarrow 2+4a=3a \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow f(1)=\int_0^1 f(t)dt=-6,$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$\Rightarrow xf'(x)=6x^2-4x$

$\Rightarrow f'(x)=6x-4$

$f(x)=3x^2-4x+c$

$f(1)=-6$이므로 $3-4+c=-6 \Rightarrow c=-5$

$f(x)=3x^2-4x-5$

따라서 $a+f(3)=-2+(27-12-5)=8$이다.

답 ④

3. 7

101

다항함수 $f(x)$에 대하여

(가) 모든 실수 x에 대하여

$\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

$\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$

양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$

양변에 2를 곱하면

$2f(x)=f(x)+f(1)+(x-1)f'(x)$

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=ax^n+\cdots$

① $n\geq 1$

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$

우변의 최고차항은 anx^n이므로

$n=1$이다.

② $n=0$ ($f(x)$가 상수함수)

$f(x)=a$

$a=a$이므로 (가)조건을 만족시킨다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx=5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

만약 $f(x)$가 상수함수이면 $f(0)=1$이므로

$f(x)=1$이다.

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 1dx=2$

$5\int_{-1}^1 xf(x)dx=5\int_{-1}^1 x\,dx=0$

$f(x)=1$이면 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^2$$

$$= 2a + 2b$$

$$5\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 5\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)\,dx = 5\int_{-1}^{1} ax^2 dx$$

$$= 10\int_0^1 ax^2 dx = 10\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}a$$

$2a+2b = \frac{10}{3}a \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$

$f(x) = ax + \frac{2}{3}a$

$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{3}{2}x + 1$ 이므로 $f(4) = 7$ 이다.

답 7

4. ③

10. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$\frac{1}{a_1 \times b_1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{a_k \times b_k} = \frac{1}{12}$

$n \geq 2$일 때

$\frac{1}{a_n \times b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k \times b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k \times b_k}$

$= \frac{n}{8n+4} - \frac{n-1}{8n-4} = \frac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{a_n \times b_n} = \frac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 같으므로

공차를 d라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 + (n-1)d$

$a_n \times b_n = (dn + a_1 - d)(dn + b_1 - d)$

$= \frac{(8n+4)(8n-4)}{4} = (4n+2)(4n-2)$

에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이

자연수이므로 $a_n = 4n+2$, $b_n = 4n-2$ 또는

$a_n = 4n-2$, $b_n = 4n+2$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} 8k = 8\sum_{k=1}^{5} k = 8 \times \frac{5 \times 6}{2} = 120$

5. ①

081

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = b_n$ 이라 하면

$b_n = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$ 이다.

$\frac{1}{(2n-1)a_n} = 2n+1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{10}{21}$ 이다.

답 ①

6. ①

093

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$ 의 양변에 $n=1$을 대입하면

$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{b_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = 4$

$b_1 = 2,\ b_2 = 4 \Rightarrow b_n = 2n$

$\frac{a_n}{b_{n+1}} = n - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)(2n+2) = 2n^2 + n - 1$

(등차수열 가이드스텝에서 S_n을 바탕으로

a_n을 빨리 구하는 방법에 대해 학습한 바 있다.

이전의 수많은 문제들에서 이를 적용한 바 있다.)

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k - 1)$

$= 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} - 5$

$= 110 + 10 = 120$

이다.

답 ①

7. ①

11. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v = 3kt^2 - 12t + 1$

시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1이므로

$3k^3 - 12k + 1 = 1$에서

$3k^3 - 12k = 0$, $3k(k+2)(k-2) = 0$

$k > 0$이므로 $k = 2$

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 가속도를 a라 하면

$a = 6kt - 12$

따라서 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는

$12k^2 - 12 = 12 \times 4 - 12 = 36$

8. ②

150

$x(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$

$v(t) = 3t^2 - 3t - 6 = 3(t^2 - t - 2) = 3(t-2)(t+1) = 0$

$\Rightarrow t = 2 \ (\because \ t > 0)$

$v'(t) = 6t - 3$

따라서 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P 의 가속도는 $12 - 3 = 9$이다.

답 ②

9. ③

052

$v(t) = -4t^3 + 12t^2$

$v'(t) = -12t^2 + 24t$

$v'(k) = 12 \Rightarrow -12k^2 + 24k = 12 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

$\Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$

닫힌구간 $[3, 4]$에서 $v(t) = -4t^2(t-3) < 0$이므로

$|v(t)| = -v(t)$ 이다.

따라서 시각 $t = 3$에서 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4 |v(t)|dt = \int_3^4 -v(t)dt$$

$$= \int_3^4 (4t^3 - 12t^2)dt$$

$$= [t^4 - 4t^3]_3^4$$

$$= 0 - (81 - 108) = 27$$

이다.

답 ③

10. ③

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$\overline{OA} = \overline{AB}$이다.

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x좌표가

t이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{t}{2}$이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\dfrac{\log_a \frac{t}{2} - 0}{\frac{t}{2} - 0} = \dfrac{\log_a t - 0}{t - 0}$에서

$\log_a t = \log_a 4$, $t = 4$

점 A는 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$가

만나는 점이므로 $\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$에서

$k = 3\log_a 2$

점 B의 좌표는 $(4, 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4, -\log_a 2)$에서

$\overline{BC} = 2\log_a 2 - (-\log_a 2) = 3\log_a 2$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times 2 = 3\log_a 2 = 2$에서 $a = 2\sqrt{2}$, $k = 2$

따라서 $a \times k \times t = 2\sqrt{2} \times 2 \times 4 = 16\sqrt{2}$

11. 11

090

$y = \log_3(5x - 3)$ 위의 서로 다른 두 점 A, B

(가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.

(나) $\overline{OA} : \overline{OB} = 1 : 2$

에 의해서 $\overline{OA} = \overline{AB}$이므로 점 A 의 x좌표를 t라 하면

B 의 x좌표는 $2t$이다.

$A(t, \log_3(5t-3))$, $B(2t, \log_3(10t-3))$

점 O와 B의 중점이 A이므로

$\log_3(10t-3) = 2\log_3(5t-3) \Rightarrow 10t - 3 = (5t-3)^2$

$\Rightarrow 25t^2 - 40t + 12 = 0 \Rightarrow (5t-6)(5t-2) = 0$

$\Rightarrow t = \frac{6}{5} \left(\because \ t > \frac{3}{5}\right)$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\log_3 9 - \log_3 3}{\frac{12}{5} - \frac{6}{5}} = \dfrac{1}{\frac{6}{5}} = \dfrac{5}{6}$

이므로 $p + q = 11$이다.

답 11

12. 13

110

점 D의 좌표를 $(t,\ 0)$ $(t>0)$라 하자.
선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이 D이므로

$$\mathrm{D}=\frac{3\mathrm{C}-5\mathrm{A}}{3-5} \Rightarrow t=\frac{0-5\mathrm{A}}{-2} \Rightarrow \mathrm{A}=\frac{2}{5}t$$

점 A의 좌표는 $\frac{2}{5}t$이고, 점 A는 $y=3x$ 위의 점이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{2}{5}t,\ \frac{6}{5}t\right)$이다.

$$\mathrm{D}=\frac{3\mathrm{C}-5\mathrm{A}}{3-5} \Rightarrow 0=\frac{3\mathrm{C}-6t}{-2} \Rightarrow \mathrm{C}=2t$$

점 C의 y좌표는 $2t$이므로 $\mathrm{C}(0,\ 2t)$이다.

점 B는 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x+2t$의 교점이므로

$\mathrm{B}\left(\frac{3}{5}t,\ \frac{9}{5}t\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{10}}{5}t$이므로
삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\frac{t^2}{5}=20 \Rightarrow t=10$$

$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$이고 두 점은 $y=2^{x-m}+n$ 위의 점이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m} \Rightarrow 2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$\Rightarrow 64\times2^{-m}-16\times2^{-m}=6 \Rightarrow 48\times2^{-m}=6$

$\Rightarrow 2^{-m}=\frac{1}{8} \Rightarrow m=3,\ n=10$

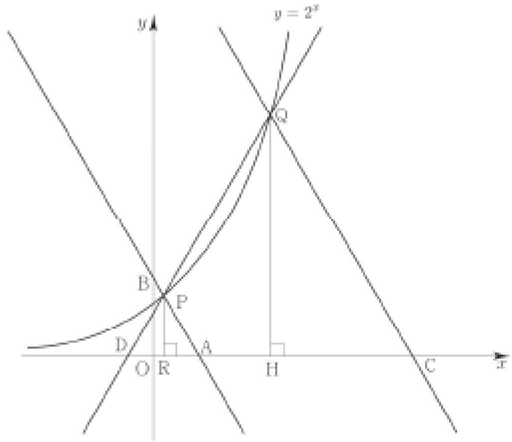
따라서 $m+n=13$이다.

답 13

13. 220

112

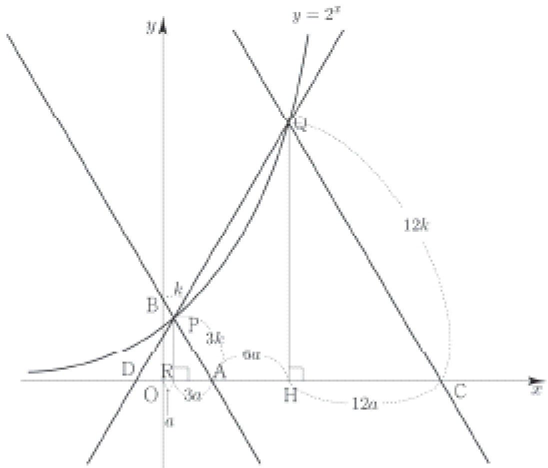
직선 PQ가 x축과 만나는 점을 D라 하고,
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, H라 하자.



직선 PQ의 기울기가 m이고 직선 QC의 기울기가 $-m$
이므로 삼각형 CQD는 $\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$인 이등변삼각형이다.
또한 직선 PA 역시 기울기가 $-m$이므로
삼각형 APD는 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{AP}}$인 이등변삼각형이다.

점 P의 x좌표가 a이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=a$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{RA}}=3a$이다.

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:3$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=4k$라 하면 $\overline{\mathrm{CQ}}=12k$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AP}}=4:3$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=3k$이다.
즉, 두 삼각형 APD, CQD는 $1:4$ 닮음이다.



$\overline{RA}=3a$이므로 $\overline{HC}=12a$이고,
$\overline{AH}=\overline{DH}-\overline{AD}=12a-2\times 3a=6a$

점 Q의 x좌표가 b이므로 $\overline{OH}=b$이고,
$\overline{OH}=\overline{OR}+\overline{RA}+\overline{AH}=a+3a+6a=10a$이다.
즉, $b=10a$ ⋯ ㉠

$\overline{PR}=2^a$, $\overline{QH}=2^b$이고, 두 삼각형 APD, CQD는 1 : 4 닮음이므로 $\overline{PR}:\overline{QH}=1:4 \Rightarrow 2^a\times 4=2^b$
$\Rightarrow 2^{a+2}=2^b$이다.
즉, $a+2=b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=\frac{2}{9}$, $b=\frac{20}{9}$이다.

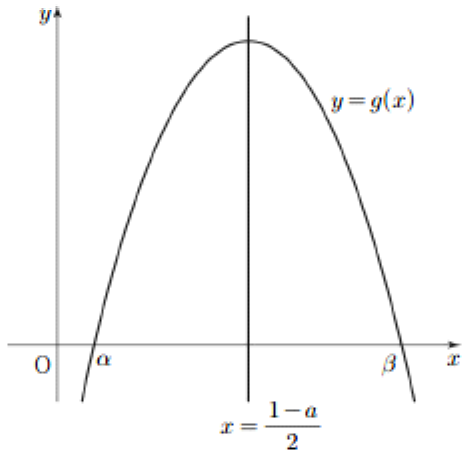
따라서 $90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)=220$이다.

답 220

14. ②

13. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를
$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수),
$g(x)=x-3-f(x)$라 하자.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<3<\beta)$라 하면 $g(\alpha)=g(\beta)=0$



$S_2=\int_\alpha^\beta |f(x)-(x-3)|dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$이므로
직선 $x=3$은 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이등분한다.
이때 $g(x)=-x^2+(1-a)x-3-b$에서
이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1-a}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{1-a}{2}=3$, $a=-5$

$S_2-2S_1=6$에서 $\frac{1}{2}S_2-S_1=3$

$\frac{1}{2}S_2-S_1$

$=\int_\alpha^3 |f(x)-(x-3)|dx-\int_0^\alpha |f(x)-(x-3)|dx$

$=-\int_\alpha^3 \{f(x)-(x-3)\}dx-\int_0^\alpha \{f(x)-(x-3)\}dx$

$=-\int_0^3 \{f(x)-(x-3)\}dx$

$=-\int_0^3 (x^2-6x+b+3)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+(b+3)x\right]_0^3$

$=18-3(b+3)=9-3b=3$
$b=2$
따라서 $f(x)=x^2-5x+2$이므로 $f(-1)=8$

15. ③

090

$2m+2+k>0$ 인 실수 k에 대하여

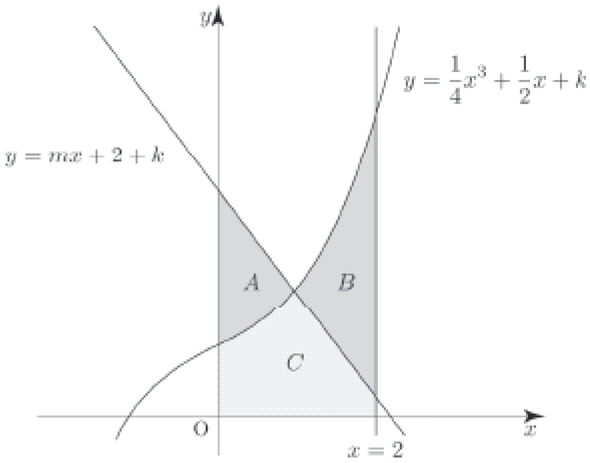
곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$ 와 직선 $y=mx+2$ 을

y축의 방향으로 k만큼 평행이동하더라도

둘러싸인 부분의 넓이는 변하지 않는다.

곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x+k$, 직선 $y=mx+2+k$와

x축, y축, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하자.



$$\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x+k\right)dx=B+C \cdots ㉠$$

$$\int_0^2(mx+2+k)dx=A+C \cdots ㉡$$

두 식을 빼면 ㉠ - ㉡

$$\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x+k\right)dx-\int_0^2(mx+2+k)dx=B-A$$

$$\Rightarrow \int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -2m-2=\frac{2}{3} \Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

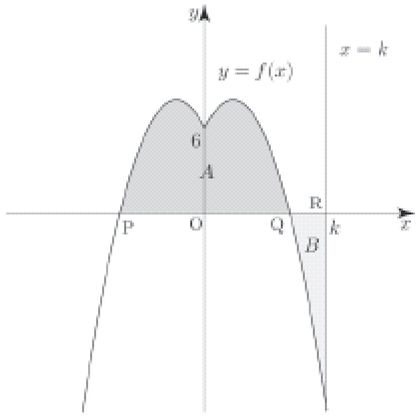
따라서 $m=-\frac{4}{3}$ 이다.

답 ③

16. ④

091

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

곡선 $y=f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

y축에 의하여 이등분된다.

$A=2B \Rightarrow \frac{A}{2}=B$이므로

$$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$$

$\Rightarrow k=6$ ($\because$ $k>4$)

따라서 k의 값은 6이다.

답 ④

17. ⑤

099

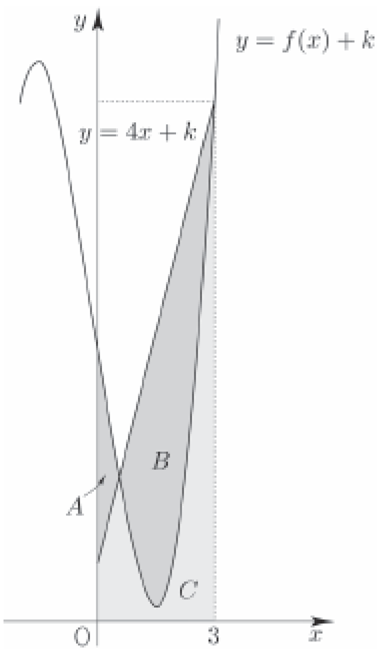
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고
$f(1)=f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$라 하면
$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$

$f'(0)=-7$이므로 $2a+a+2=-7 \Rightarrow a=-3$
$\therefore\ f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\qquad =x^3-7x+6$

$f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는 P$(3,\ 12)$
즉, 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이다.

삼차함수 $f(x)$의 극솟값을 m이라 할 때,
$m+k>0$인 실수 k에 대하여
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x$을
y축의 방향으로 k만큼 평행이동하더라도
둘러싸인 부분의 넓이는 변하지 않는다.
곡선 $y=f(x)+k$, 직선 $y=4x+k$와
x축, y축, $x=3$로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하자.



$$\int_0^b (4x+k)dx=B+C \cdots ㉠$$

$$\int_0^3 (f(x)+k)dx=A+C \cdots ㉡$$

두 식을 빼면 ㉠ - ㉡이므로

$$\int_0^3 (4x+k)dx-\int_0^3 (f(x)+k)dx=B-A$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (4x-f(x))dx=B-A$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (-x^3+11x-6)dx=B-A$$

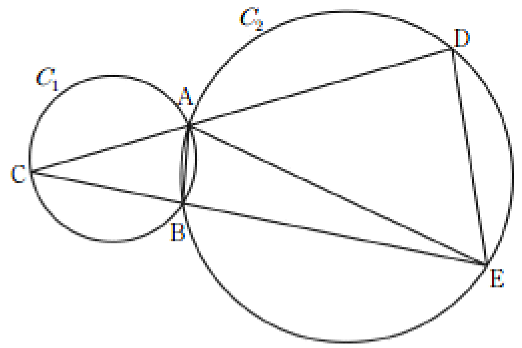
$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3=\frac{45}{4}=B-A$$

따라서 $B-A=\dfrac{45}{4}$이다.

답 ⑤

18. ④

14. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기



사각형 ABED가 원 C_2에 내접하므로

$\angle EBA = \pi - \angle ADE$에서 $\angle ABC = \angle ADE$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{3}{\sin(\angle ABC)} = 2r_1$$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} = 2r_2$$

$r_1 : r_2 = 1 : 2$에서

$$\frac{3}{\sin(\angle ABC)} : \frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} = 2r_1 : 2r_2 = 1 : 2$$

이므로 $\overline{AE} = 6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ADE) = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2\times 5\times 4} = \frac{1}{8}$$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CE}^2 = 8^2 + 4^2 - 2\times 8\times 4\times \frac{1}{8} = 72$$

따라서 선분 CE의 길이는 $6\sqrt{2}$

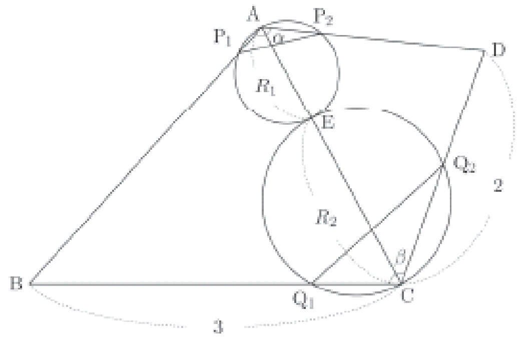
19. ①

068

$\angle P_1AP_2 = \alpha$, $\angle Q_1CQ_2 = \beta$라 하고,

$\overline{AE} = 2R_1$, $\overline{CE} = 2R_2$라 하자.

$\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 2$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$



삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\alpha} = 2R_1 \Rightarrow \overline{P_1P_2} = 2R_1\sin\alpha$$

삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\beta} = 2R_2 \Rightarrow \overline{Q_1Q_2} = 2R_2\sin\beta$$

선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이 E이므로

$R_2 = 2R_1$이고, $\overline{Q_1Q_2} = 4R_1\sin\beta$이다.

$\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\,\overline{P_1P_2} = 3\overline{Q_1Q_2}$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\times 2R_1\sin\alpha = 3\times 4R_1\sin\beta$

$\Rightarrow 5\sqrt{2}\sin\alpha = 6\sin\beta$

$\cos\beta = -\frac{1}{3}$ 이므로 $\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 사용하면

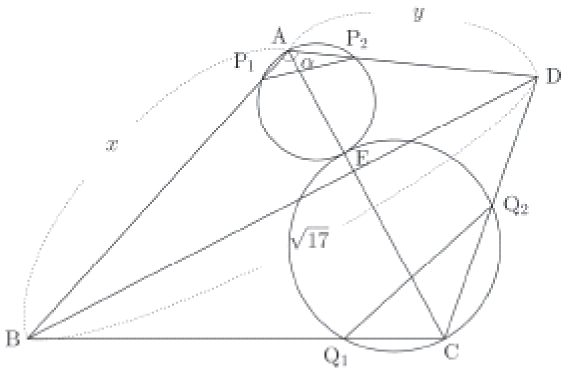
$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{CD}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{3^2 + 2^2 - \overline{BD}^2}{2\times 3\times 2}$$

$$\Rightarrow -4 = 13 - \overline{BD}^2$$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{17}$$

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$라 하자.



삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\alpha=2 \Rightarrow \frac{1}{2}xy\times\frac{4}{5}=2 \Rightarrow xy=5$

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$이고, $\alpha>\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\alpha=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$\Rightarrow -\frac{3}{5}=\dfrac{x^2+y^2-(\sqrt{17})^2}{2\times x\times y}$

$\Rightarrow -\frac{6}{5}xy=(x+y)^2-2xy-17$

$\Rightarrow 21=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=\sqrt{21}$

따라서 $\overline{AB}+\overline{AD}=\sqrt{21}$ 이다.

답 ①

20. ⑤

15. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$이므로

$g(x)=x$ 또는 $g(x)=f(x)$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서 연속이다.

$g(2)=2$ 또는 $g(2)=f(2)$에서

$f(2)\neq2$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가

$x=2$에서 만나지 않으므로

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-2}=1$ 또는

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(2)=2$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의

접선의 방정식은 $y=x$이다.

$h(x)=f(x)-x$라 하면

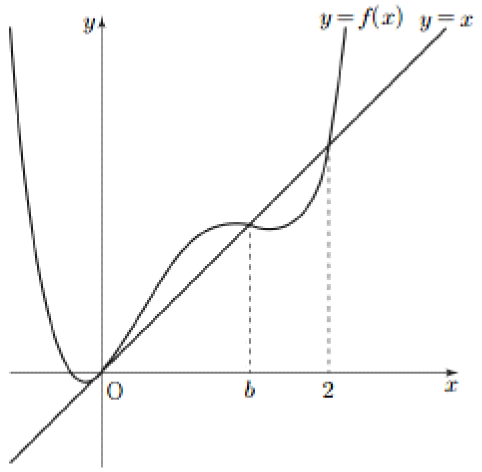
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$h(0)=h'(0)=h(2)=0$이므로

$h(x)=x^2(x-2)(x-b)$ (b는 상수)

$h(b)=0$이므로 $f(b)=b$

(i) $0\le b\le2$일 때



조건 (나)에 의하여 $g(-4)=-g(4)$이므로

$g(4)=4$, $g(-4)=-4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x\le0$ 또는 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

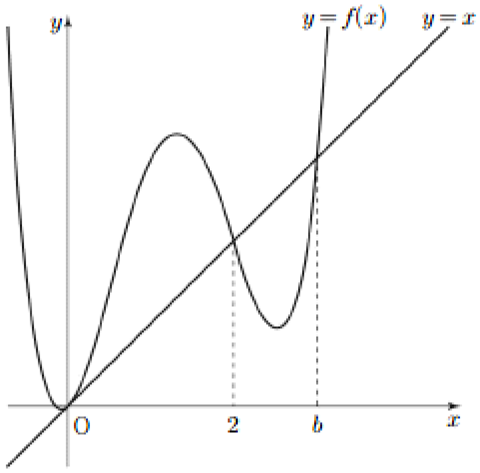
$g(x)=x$이다.

이때 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b>2$일 때

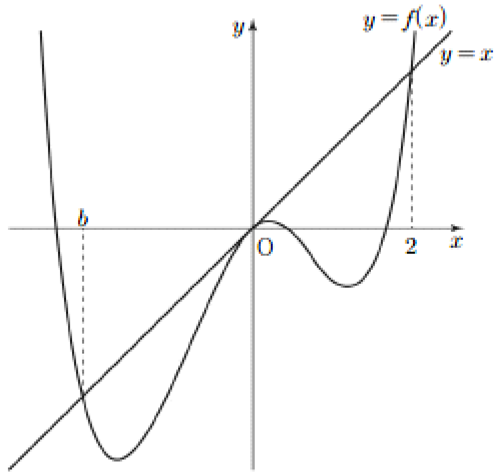


(i)과 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면
$x \le 0$ 또는 $x \ge b$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=x$이다.
$2 \le x \le b$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x$이면
$x \ge 2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=-g(x)$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $2 \le x \le b$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=f(x)$이다.
이때 $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=f(x)$이면 $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어
조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=x$이다.
$x \ge b$인 모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=4$
$f(x)=x^2(x-2)(x-4)+x$

$$g(x)=\begin{cases} x & (x \le 2 \text{ 또는 } x \ge 4) \\ x^2(x-2)(x-4)+x & (2<x<4) \end{cases}$$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

(iii) $b<0$일 때



(ii)와 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면
$x \le b$ 또는 $x \ge 2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=x$이고
$b<x<2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=f(x)$이다.
$-2 \le b<0$이면 $x \ge 2$인 모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=-g(x)$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $b<-2$
$x \ge -b$인 모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=-4$
$f(x)=x^2(x-2)(x+4)+x$

$$g(x)=\begin{cases} x & (x \le -4 \text{ 또는 } x \ge 2) \\ x^2(x-2)(x+4)+x & (-4<x<2) \end{cases}$$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-34}{3}=-\dfrac{34}{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여
모든 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{34}{3}\right)=-11$

21. ③

040

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$

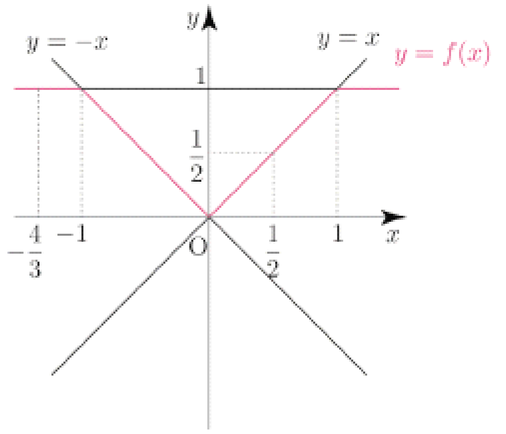
$\Rightarrow \{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}[\{f(x)\}^2-x^2]=0$

$\Rightarrow \{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$

$\Rightarrow f(x)=1$ or $f(x)=x$ or $f(x)=-x$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고, 최솟값이 0이므로 이를 만족시키도록 교차점에서 $y=1$, $y=x$, $y=-x$ 중 $f(x)$를 선택하면 다음 그림과 같다.



$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ or } x>1) \\ x & (0\le x\le 1) \\ -x & (-1\le x<0) \end{cases}$$

따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

답 ③

22. 35

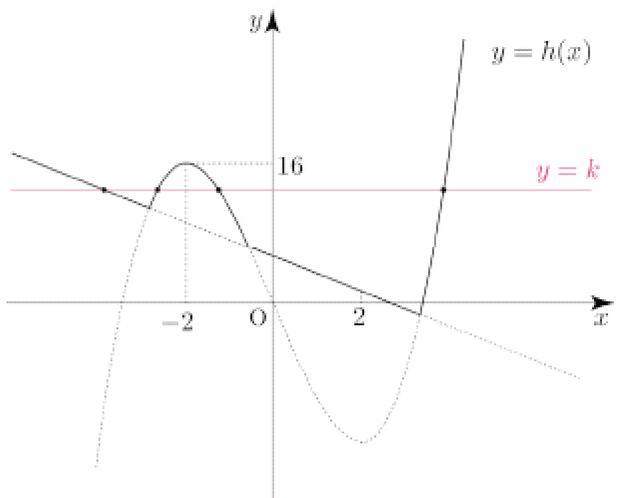
195

직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이다.

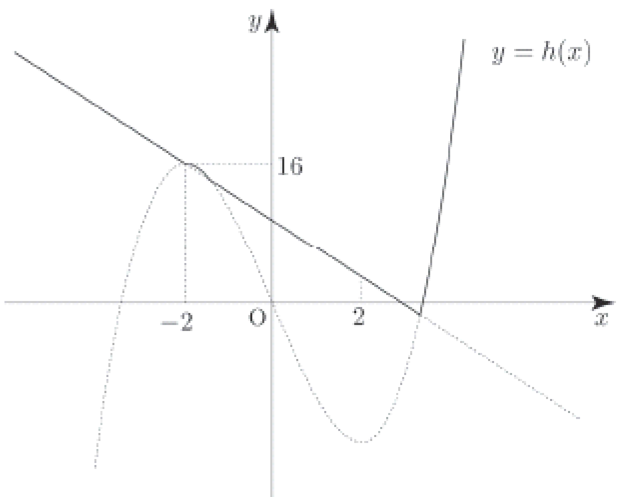
즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$는 한 점에서 만나야 한다. 또한 이 네 점이 모두 서로 다른 점이어야 한다.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

직선 $y=g(x)$는 a에 상관없이 $(2,\ 2)$를 반드시 지난다. 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재하려면 다음 그림과 같이 $a<0$이어야 한다.



직선 $y=g(x)$가 $(-2,\ 16)$을 지나면 다음 그림과 같다.



즉, 조건을 만족하려면 $f(-2) > g(-2)$ 이어야 한다.

$$f(-2) > g(-2) \Rightarrow 16 > -4a+2 \Rightarrow -\frac{7}{2} < a$$

$a<0$이고 $-\frac{7}{2}<a$이므로 $-\frac{7}{2}<a<0$

$\therefore\ m=-\frac{7}{2},\ M=0$

따라서 $10\times(M-m)=10\times\frac{7}{2}=35$이다.

답 35

23. 110

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0<k<\frac{2}{t}$에서 $0<tk\pi<2\pi$

$f(k)=3k$에서 $\sin(tk\pi)=\sqrt{3}k>0$이고

$g(k)=3k$에서 $\cos(tk\pi)=-k<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<tk\pi<\pi$

$f(k)=g(k)$에서 $\tan(tk\pi)=-\sqrt{3}$이므로

$tk\pi=\frac{2}{3}\pi,\ tk=\frac{2}{3}$

$f(k)=3k$에서 $\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}=3k$이므로

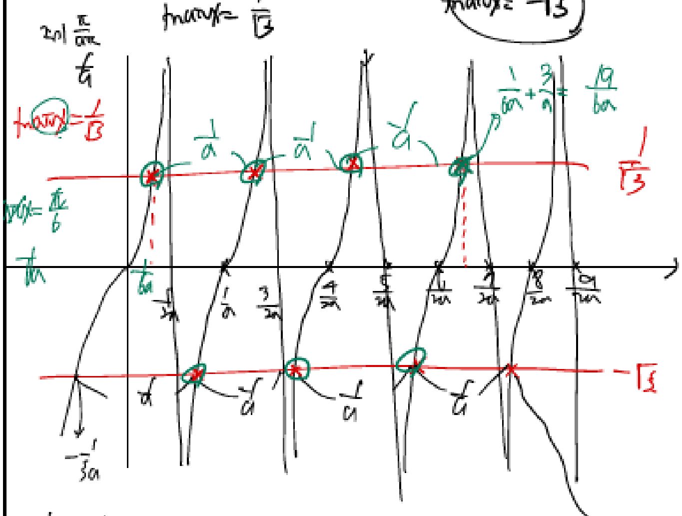
$k=\frac{1}{2},\ t=\frac{4}{3}$

따라서 $60(t+k)=60\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=110$

24. 243

$\sqrt{3}\sin a\pi x=\cos a\pi x$ $\quad$ $\sin a\pi x=-\sqrt{3}\cos a\pi x$

$\tan a\pi x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\tan a\pi x=-\sqrt{3}$



$\tan a\pi x=-\sqrt{3}$

$a\pi x=-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{1}{3a}$

$-\frac{1}{3a}+\frac{4}{a}=\frac{-1+12}{3a}=\frac{11}{3a}$

$\frac{19}{6a}\le\frac{1}{12}<\frac{11}{3a}$

$19\le\frac{6a}{2}<22$

$38\le a<44$

$38,39,40,41,42,43$

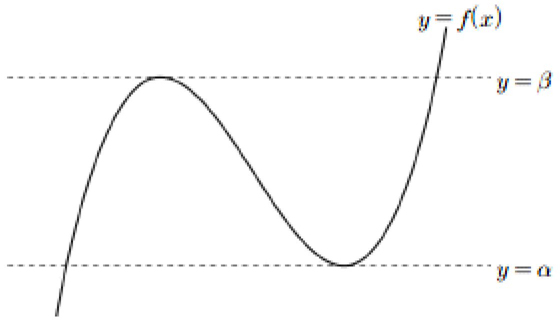
$\frac{6(38+43)}{2}$ $\quad$ $81\times 3 = 243$

20

25. 200

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 실수 전체의 집합에서 증가한다.
$g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$
그러므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)+g(t-4)=2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.



삼차함수 $f(x)$의 극솟값을 α, 극댓값을 β라 하자.
(α, β는 $\alpha<\beta$인 상수)

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<\alpha \text{ 또는 } t>\beta)\\ 2 & (t=\alpha \text{ 또는 } t=\beta)\\ 3 & (\alpha<t<\beta)\end{cases}$$

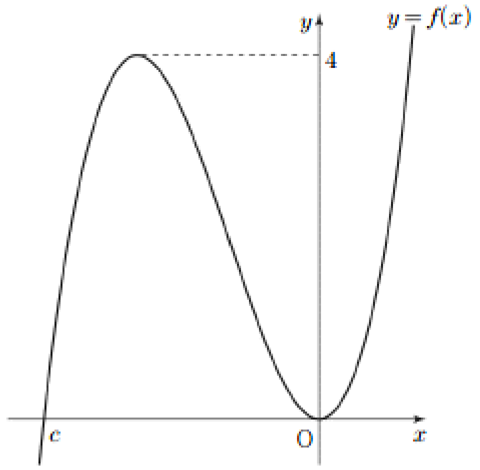
함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 불연속이고,
함수 $g(t-4)$는 $t=\alpha+4$와 $t=\beta+4$에서만 불연속이다.

$\lim\limits_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to\alpha+}g(t)+\lim\limits_{t\to\alpha+}g(t-4)=3+1=4$,
$\lim\limits_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to\alpha-}g(t)+\lim\limits_{t\to\alpha-}g(t-4)=1+1=2$
이므로
$\lim\limits_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim\limits_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$이고,
$\lim\limits_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to(\beta+4)+}g(t)+\lim\limits_{t\to(\beta+4)+}g(t-4)=1+1=2$,
$\lim\limits_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to(\beta+4)-}g(t)+\lim\limits_{t\to(\beta+4)-}g(t-4)=1+3=4$
이므로
$\lim\limits_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim\limits_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
에서 함수 $g(t)+g(t-4)$는
$t=\alpha$, $t=\beta+4$에서 불연속이다.
조건에 의하여 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이고 $a>0$이므로
$\alpha=0$, $\beta+4=a$ ⋯ ㉠

함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=\alpha$, $t=\beta+4$에서만 불연속이므로 $t=\alpha+4$에서 연속이다.

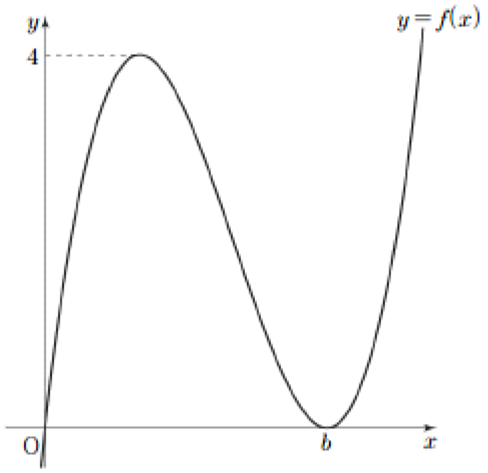
$\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=g(\alpha+4)+g(\alpha)$

$\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}g(t-4)=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3$,
$\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}g(t-4)=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1$,
$g(\alpha+4)+g(\alpha)=g(\alpha+4)+2$이므로
$\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3=\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1=g(\alpha+4)+2$
이때 모든 실수 t에 대하여
$g(t)=1$ 또는 $g(t)=2$ 또는 $g(t)=3$이므로
$\lim\limits_{t\to(\alpha+4)+}g(t)=1$, $\lim\limits_{t\to(\alpha+4)-}g(t)=3$, $g(\alpha+4)=2$
그러므로 $\beta=\alpha+4$
㉠에 의하여 $\beta=4$, $a=8$
그러므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 4이다.
함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 b라 하자.
(i) $b=0$일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 $c(c<0)$이라 하자.
$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2(x-c)$
$f'(x)=3x^2-2cx=x(3x-2c)$에서 $f'\left(\frac{2}{3}c\right)=0$
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}c$에서 극댓값 4를 갖는다.
$f\left(\frac{2}{3}c\right)=-\frac{4}{27}c^3=4$이므로 $c=-3$에서
$f(x)=x^2(x+3)$
그러므로 $f(a)=f(8)=704$

(ii) $b \neq 0$일 때



$f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-b)^2$

$f'(x)=3x^2-4bx+b^2=(3x-b)(x-b)$에서

$f'\left(\dfrac{b}{3}\right)=0$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값 4를 갖는다.

$f\left(\dfrac{b}{3}\right)=\dfrac{4}{27}b^3=4$이므로 $b=3$에서

$f(x)=x(x-3)^2$

그러므로 $f(a)=f(8)=200$

(i), (ii)에 의하여 $f(a)$의 최솟값은 200

26. ②

212

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

$g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=7$

$g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $f'(0)=15$

$\therefore\ f(x)=px^2+15x+7\ (p<0)$

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ px^2+15x+7 & (x>0) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+15 & (x \le 0) \\ 2px+15 & (x>0) \end{cases}$$

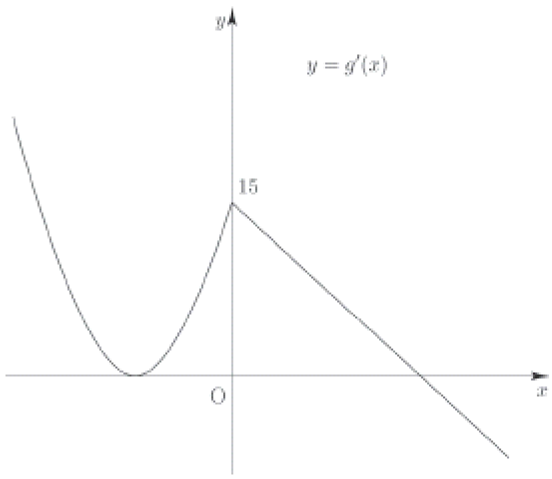
$g'(0)=15$

만약 방정식 $g'(x)=0\ (x<0)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이라고 가정해보자.

이차방정식 $3x^2+2ax+15=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-45=0 \Rightarrow a=3\sqrt{5}$이므로 $a \neq 3\sqrt{5}$에 모순이다.

($a=-3\sqrt{5}$이면 방정식 $g'(x)=0\ (x<0)$의 실근이 존재하지 않는다.)



만약 방정식 $g'(x)=0\ (x<0)$이 실근을 갖지 않는다면 (나) 조건을 만족시킬 수 없어 모순이다.

즉, 방정식 $g'(x)=0\ (x<0)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이어야 하고 서로 다른 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하자.

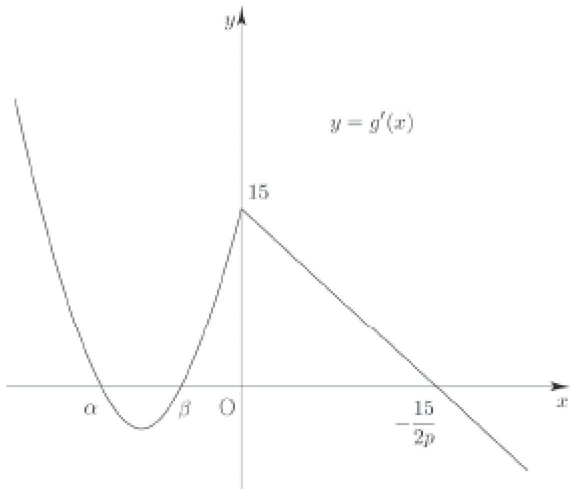
이차방정식 $3x^2+2ax+15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-45>0 \Rightarrow a^2>45$

또한 함수 $y=3x^2+2ax+15$의 대칭축은

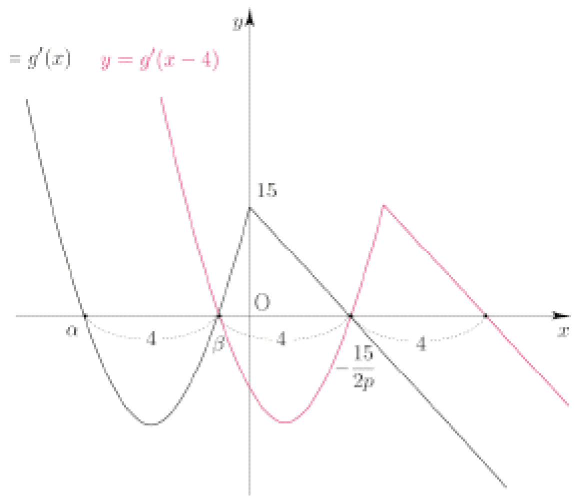
음수이어야 하므로 $-\frac{a}{3}<0 \Rightarrow a>0$

$\therefore\ a>3\sqrt{5}$



함수 $y=g'(x-4)$의 그래프는 함수 $y=g'(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

즉, $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 아래 그림과 같이 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ -\frac{15}{2p}$가 이 순서대로 공차가 4인 등차수열을 이루어야 한다.



$\beta-\alpha=4,\ -\frac{15}{2p}-\beta=4$

방정식 $3x^2+2ax+15=0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3},\ \alpha\beta=5$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta \Rightarrow 16=\frac{4a^2}{9}-20$

$\Rightarrow a^2=81 \Rightarrow a=9\ (\because\ a>3\sqrt{5})$

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2+18x+15 & (x\le 0)\\ 2px+15 & (x>0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}3(x+1)(x+5) & (x\le 0)\\ 2px+15 & (x>0)\end{cases}$$

$\alpha=-5,\ \beta=-1$

$-\frac{15}{2p}-\beta=4 \Rightarrow p=-\frac{5}{2}$

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}x^3+9x^2+15x+7 & (x\le 0)\\ -\frac{5}{2}x^2+15x+7 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g(-2)+g(2)=5+27=32$이다.

답 ②

27. 71

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_1 \times a_2 > 0$이므로

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$ 또는 $a_1 < 0$, $a_2 < 0$

$a_1 < 0$이면 $a_2 = a_1^2 > 0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$a_1 > 0$이므로 $a_2 = -2a_1 + 3$

$a_2 > 0$이므로 $a_3 = -2a_2 + 3 = 4a_1 - 3$ ⋯ ㉠

(i) $a_3 < 0$일 때

$a_4 = a_3^2 > 0$이므로

$a_5 = -2a_3^2 + 3 = a_3$에서 $(2a_3 + 3)(a_3 - 1) = 0$

$a_3 < 0$이므로 $a_3 = -\frac{3}{2}$

㉠에 의하여 $a_1 = \frac{3}{8}$

(ii) $a_3 = 0$일 때

$a_4 = a_3^2 = 0$, $a_5 = a_4^2 = 0$이므로 $a_3 = a_5 = 0$

㉠에 의하여 $a_1 = \frac{3}{4}$

(iii) $a_3 > 0$일 때

(a) $0 < a_3 < \frac{3}{2}$일 때

$a_4 = -2a_3 + 3 > 0$이므로

$a_5 = -2a_4 + 3 = 4a_3 - 3 = a_3$에서 $a_3 = 1$

㉠에 의하여 $a_1 = 1$

(b) $a_3 \ge \frac{3}{2}$일 때

$a_4 = -2a_3 + 3 \le 0$이므로

$a_5 = a_4^2 = (-2a_3 + 3)^2 = a_3$에서

$(4a_3 - 9)(a_3 - 1) = 0$

$a_3 \ge \frac{3}{2}$이므로 $a_3 = \frac{9}{4}$

㉠에 의하여 $a_1 = \frac{21}{16}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{21}{16} = \frac{55}{16}$이므로 $p = 16$, $q = 55$

따라서 $p + q = 71$

28. ②

072

$a_1 = k$ (k는 자연수)

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이려면

$a_3 \ne 0$, $a_4 \ne 0$, $a_5 \ne 0$, $a_6 \ne 0$이어야 한다.

$a_2 = k - 2 - k = -2$

$a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$

① $a_3 < 0 \Rightarrow 2 - k < 0 \Rightarrow k > 2$

$a_4 = a_3 + 6 - k = 2 - k + 6 - k = 8 - 2k$

①- i) $a_4 < 0 \Rightarrow 8 - 2k < 0 \Rightarrow k > 4$

$a_5 = a_4 + 8 - k = 8 - 2k + 8 - k = 16 - 3k$

①- i) - ❶ $a_5 = 16 - 3k < 0 \Rightarrow k > \frac{16}{3}$

$a_6 = a_5 + 10 - k = 16 - 3k + 10 - k = 26 - 4k$

$a_3 < 0$, $a_4 < 0$, $a_5 < 0$ 이므로

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이려면 $a_6 > 0$이어야 한다.

$26 - 4k > 0 \Rightarrow k < \frac{13}{2}$

즉, $\frac{16}{3} < k < \frac{13}{2}$

$\therefore k = 6$

①- i) - ❷ $a_5 = 16 - 3k > 0 \Rightarrow 4 < k < \frac{16}{3}$

(①- i)의 전제조건이 $k > 4$임을 잊어서는 안 된다.)

$k = 5$이므로

$a_6 = a_5 - 10 - k = 16 - 3k - 10 - k = -14$

$a_3 < 0$, $a_4 < 0$, $a_5 > 0$, $a_6 < 0$이므로

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$를 만족한다.

$\therefore k = 5$

①- ii) $a_4 > 0 \Rightarrow 8 - 2k > 0 \Rightarrow 2 < k < 4$

$k = 3$이므로

$a_5 = a_4 - 8 - k = 2 - 8 - 3 = -9$

$a_6 = a_5 + 10 - k = -9 + 10 - 3 = -2$

$a_3 < 0,\ a_4 > 0,\ a_5 < 0,\ a_6 < 0$이므로
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$를 만족한다.

$\therefore\ k = 3$

② $a_3 > 0 \Rightarrow 2 - k > 0 \Rightarrow k < 2 \Rightarrow k = 1$
$a_3 = 2 - k = 1$
$a_4 = a_3 - 6 - k = 1 - 6 - 1 = -6$
$a_5 = a_4 + 8 - k = -6 + 8 - 1 = 1$
$a_6 = a_5 - 10 - k = 1 - 10 - 1 = -10$

$a_3 > 0,\ a_4 < 0,\ a_5 > 0,\ a_6 < 0$이므로
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$를 만족시키지 않는다.

따라서 모든 k의 값의 합은 $6 + 5 + 3 = 14$이다.

답 ②