*다항함수 세팅의 기본

1. $x=\alpha$에 대한 정보가 여러 개일 때

1) 주어진 값이 극값일 때

만약 $x=\alpha$에 대한 정보가 극값을 뜻한다면 함수를 쉽게 설정할 수 있을 것입니다.

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $x=3$에서 극댓값 1을 가진다.

$f(x)=(x-3)^2(x-k)+1$

2) 주어진 값이 극값이 아닐 때

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \rightarrow f(0)=d,\ f'(0)=c,\ f''(0)=b$와 같이 나타낼 수 있듯이 $g(x)=f(x-\alpha)=a(x-\alpha)^3+b(x-\alpha)^2+c(x-\alpha)+d$와 같이 x방향으로 평행이동시켜 함수를 세팅하게 되면 $g(\alpha),\ g'(\alpha),\ g''(\alpha)$에 대한 정보를 쉽게 쓸 수 있게 됩니다.

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)=1,\ f'(3)=-1$이다.

$f(x)=(x-3)^3+k(x-3)^2-(x-3)+1$

처럼 미지수 1개로 함수를 나타낼 수 있습니다.

200916(나)

16. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

최고차항 1, $f(-1)=0$, $f'(-1)=2$ → $f(x)=(x+1)^3+k(x+1)^2+2(x+1)$
$f(1)\le 12$ → $k\le 0$ → $f(2)\le 33$

25O615

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k\ge 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\le k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt\ge 0$이고
$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt\ge 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

(가) 조건까지만 해석하게 된다면 최고차항이 1, $f(k)=k$, $f'(k)=2$인 삼차함수
→ $f(x)=(x-k)^3+a(x-k)^2+2(x-k)+k$
구하고자 하는 값이 x에 $k+1$ 대입했을 때이므로 마무리 계산도 깔끔해질겁니다.

2. **차함수**

$f(x)$와 $g(x)$에 대한 정보가 동시에 주어졌을 때

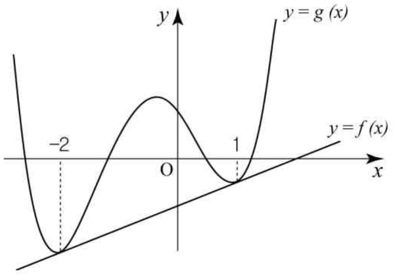
$h(x)=f(x)-g(x)$로 새로운 함수를 도입하여 미지수의 도입을 줄일 수 있습니다.

ex) $f(a)=g(a)$라면 $h(a)=0$이므로 $h(x)$는 $(x-a)$를 인수로 가질 것

추가로 $f'(a)=g'(a)$라면 $h'(a)=0$이므로 $h(x)$는 $(x-a)^2$를 인수로 가질 것

110720(나)

20. 그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은? [4점]



① $\frac{81}{16}$ ② $\frac{83}{16}$ ③ $\frac{85}{16}$ ④ $\frac{87}{16}$ ⑤ $\frac{89}{16}$

$g(-2)=f(-2)$, $g'(-2)=f'(-2)$이므로 $h(x)$는 $(x+2)$의 인수를 두 개 가질 것이고, $x=1$일 때 또한 마찬가지로 $(x-1)$의 인수를 두 개 가질 것입니다.

또한 $g(x)-f(x)$는 사차함수에서 일차함수를 뺀 함수이므로 최고차항의 계수는 그대로 1인 사차함수일 것입니다.

$\therefore h(x)=(x+2)^2(x-1)^2$

151121(A)

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (나) $f(0)=f'(0)$ (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

$h(x)=f(x)-f'(x)$

(나)+(다) 조건에 의해 $h(x)$는 $x=0$에서 접할 것이고 나머지 근은 $x \leq -1$일 것입니다.

$\therefore h(x)=x^2(x-k)\,(k \leq -1)$

이후 $h(x)$를 다시 $f(x)-f'(x)$로 치환하여 계산해 주시면 됩니다.

25O519

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 점 $(1,0)$에서 만난다. $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

접선을 $g(x)$로 둔다면 $h(x)=f(x)-g(x)=x^2(x-1)$

$g(x)$는 일차함수이므로 점 두 개에 대한 정보가 있기 때문에 함수가 확정됩니다

$g(x)$를 이항 후 $x=3$을 대입해주면 아주 간단하게 풀 수 있습니다

250515

15. 최고차항의 계수가 1이고 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $\frac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은? [4점]

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값은 존재하지 않는다.
(나) $x \ge a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

① $-\frac{41}{3}$ ② -13 ③ $-\frac{37}{3}$ ④ $-\frac{35}{3}$ ⑤ -11

(가)까지만 해석하게 된다면 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f(2)=2$를 얻을 수 있습니다
저 세 정보 모두 $y=x$로 나타낼 수 있으므로 차함수를 적용시켜보면
$f(x)-x=x^2(x-2)(x-k)$

(나)를 해석해보면 $k=\pm 4$라는 걸 얻을 수 있어서 한 줄의 계산만으로 15번을 쳐낼 수 있었습니다.

※차함수 심화: 세 근의 합은 일정

삼차함수의 이차항의 계수는 삼차함수의 근과 계수와의 관계에 의해 $-$(세 근의 합)입니다.
따라서 일차함수를 빼서 차함수를 쓴다면 세 근의 합은 항상 일정할 것입니다.

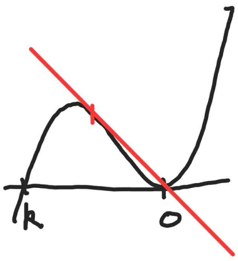
221020

20. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\lvert f(x)-1 \rvert}{x}$의 값이 존재한다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \ge -4x^2+x$이다.

(가) 조건에 의해 $f(0)=1,\ f'(0)=0\ \rightarrow\ x^2(x-k)+1$
(나) 조건에 의해 $f(x)\leq -4x+1\,(x<0),\ f(x)\geq -4x+1\,(x>0)$

$f(5)$가 커지기 위해선 k가 최소가 되어야 하므로



위 그림처럼 접하게 되는 상황일 것입니다.
접점의 좌표를 α라 한다면,
$f(x)$의 세 근의 합은 $(0+0+k)$이므로 $f(x)-(-4x+1)$의 세 근의 합이 $(0+\alpha+\alpha)=k$
$\therefore \alpha=\dfrac{k}{2}$
$f'(\dfrac{k}{2})=-4$의 식을 풀거나, $f(x)-(-4x+1)$에서 판별식을 써서 중근을 가지도록 하면 정답이 나오게 될 것입니다.

22사관22

22. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)\,ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

이건 한번 여러분이 도전해보시길 바랍니다 화이팅