

제 2 교시

2028학년도 수학능력시험 예시문항-싱크로울99%

수학 영역

성명

수험 번호

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

랑데뷰 수학 - 싱크로울99%

3. 공통수학1/2/ 대수/미적분 내신대비 고난이도 문제집 ⇨ 랑데뷰
상수 ⇨ <https://cafe.naver.com/rmath/350>

4. 고교 수학의 모든 것 ⇨ 랑데뷰 세미나 2022교육 과정 개정판 곧
출시 예정

5. 랑데뷰수학 시리즈 판매중 ⇨ 오르비/yes24/알라딘/교보문고 등 검색

6. 2026학년도 수능특강 수1/수2/미적분 lev2/lev3 전문항 변형 ⇨ 문의
카톡 : hbb100

cafe.naver.com/Rmath

랑데뷰수학시리즈 카페에 오시면 풀이 및 정답 받으실 수 있습니다!

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

랑데뷰 상수

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 5 ③ 10 ④ 20 ⑤ 40

2. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$(x-1)f(x) = x^2 - 3x + 2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 선택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는? [2점]

- ① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

4. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_7 = 36, \quad \frac{a_{10}}{a_7} = 12$$

가 성립할 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

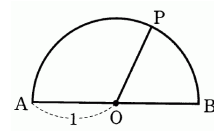
5. 함수 $f(x) = (2x^3 + 1)(x-1)^2$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은?
[3점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

6. 어떤 제품의 불량률은 2%라고 한다. 100개의 제품을
임의추출할 때, 표본비율 $\hat{p}$ 의 표준편차는? [3점]

- ① 0.014 ② 0.015 ③ 0.016 ④ 0.017 ⑤ 0.018

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 반원에서 호 AP의 길이와
지름 AB의 길이가 같도록 원의 둘레 위에 점 P를 잡을 때,
부채꼴 BOP의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2} - 1$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ 2

8. 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x) = f(x+4)$ 를 만족하고

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$ ④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

9. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 에 대하여 $f(a) - f(b) \neq 0$ 이 성립할 확률은? [3점]

- ① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{18}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

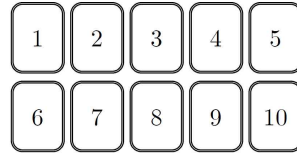
10. 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M+m=20$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 좌표평면 위의 점 $(1, k)$ 에서 곡선 $y = x^3 + x + 1$ 에 서로 다른 3개의 접선을 그을 수 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

12. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드 중에서 임의로 선택한 서로 다른 3장의 카드에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

13. 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 실수 a, b 에 대하여 $P(X < a-3) = P(X > b+2)$ 가 성립한다.

$Y = \frac{1}{3}X + 1$ 일 때, 확률변수 Y 의 평균은 51, 분산은 $\frac{4}{9}$ 이다.

이때, $a+b+\sigma$ 의 값은? [3점]

- ① 299 ② 300 ③ 301 ④ 302 ⑤ 303

14. 실수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_5 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - k & (n \leq 4) \\ \frac{a_n}{k} + 1 & (n \geq 5) \end{cases}$$

이다. $a_2 - a_7 = 1$ 일 때, $a_1 + a_8$ 의 값은? [4점]

- ① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

15. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^3 - 4t^2 + 2t + 1, \quad x_2 = 5t^2 - t$$

이다. 점 Q의 가속도가 점 P의 속도의 2배가 되는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

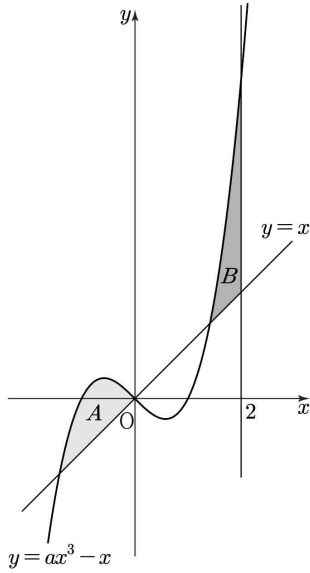
16. 두 자연수 a, b 에 대하여 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = |2\cos ax + b|$$

가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 개수가 10일 때, $a+b$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

17. 함수 $f(x)=ax^3-x$ ($a>0$)와 함수 $g(x)=x$ 가 있다.
 $x \leq 0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A 라 하고 $x > 0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=g(x)$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A=B$ 일 때, a 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+g(3)$ 의 최댓값은? [4점]

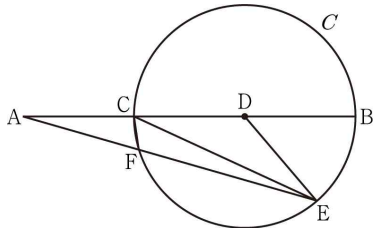
(가) 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 모두 곡선 $y=x^2$ 위의 서로 다른 두 점 A, B를 지난다.

(나)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)-x^2\}\{g(x)-x^2\}}{x^3} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+x^2\}\{g(x)+x^2\}}{x^3} \right| = 2$$

- ① 6 ② 18 ③ 24 ④ 42 ⑤ 48

19. 그림과 같이 선분 AB를 삼등분하는 점 중 점 A에 가까운 점을 C, 점 B에 가까운 점을 D라 하자. 점 D를 중심으로 하고 두 점 B, C를 지나는 원 C가 있다. $\overline{CE} = \sqrt{3}$, $\cos(\angle ACE) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 점 E가 원 C 위의 점일 때, 직선 AE와 원 C와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CF의 길이는? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{7}}{21}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{4\sqrt{7}}{21}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{21}$

20. 이차함수 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ ($0 < \alpha < \beta$)와 상수 k ($k \neq 0$)에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < \beta) \\ kf(2\beta - x) & (x \geq \beta) \end{cases}$$

라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$h(x) = \int_0^x g(t) dt$$

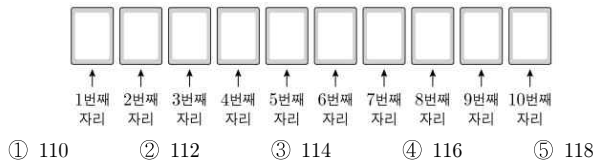
가 있다. 함수 $h(x)$ 가 두 극댓값을 갖고 두 극댓값의 차가

$\frac{(\beta - \alpha)^3}{3}$ 일 때, k 의 값은? [4점]

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

21. 숫자 0이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 1이 적혀 있는 6장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 2장이 있다. 이 10장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 10개의 자리에 다음 조건을 만족시키도록 각각 한 장씩 놓는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

n ($1 \leq n \leq 10$)번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수를 a_n 이라 할 때, $a_k \neq a_{k+1}$ 이고, 행렬 $\begin{pmatrix} a_k & -a_{k+1} \\ -a_{k+1} & a_{k+2} \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합이 0을 만족시키는 자연수 k ($1 \leq k \leq 8$)의 개수는 2이다.



단답형

22. $\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 x 의 합을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x^3 + x, \quad f(0) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 20$, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 10$ 일 때,
 a_{20} 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + kx + a$ (k 는 상수)이 $x = k$ 에서
 극값 k 를 갖는다고 할 때, 자연수 a 의 값을 구하시오.
 [3점]

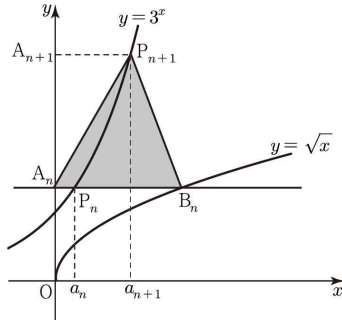
26. 자연수 k 에 대하여 이산확률변수 X 가 가질 수 있는 값은
 0부터 k 까지의 정수이고, X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = \begin{cases} a & (x=0) \\ bx & (1 \leq x \leq k) \end{cases}$$

이고 $E(X^2) = \frac{9}{5}E(X)$ 이다. $V(X)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 a 의

값이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 양수이고,
 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 n 에 대하여 직선 $x=a_n$ 이 곡선 $y=3^x$ 와 만나는 점을 P_n 이라 하자. 점 P_n 을 지나고 y 축에 수직인 직선이 y 축 및 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 만나는 점을 각각 A_n , B_n 이라 하고, 삼각형 $A_nB_nP_{n+1}$ 의 넓이를 T_n 이라 하자.



다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 9$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{10} \log_3 \frac{T_n}{4}$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, 0는 원점이다.)

P_n 의 x 좌표가 a_n 이므로 y 좌표는 3^{a_n} 이다.
 $\therefore P_n(a_n, 3^{a_n})$
 따라서 $\overline{OA_n} = 3^{a_n}$, $\overline{OA_{n+1}} = 3^{a_{n+1}}$ 이고
 $\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 9$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고 공차가
 $\boxed{(가)}$ 인 등차수열이다.
 $\therefore a_n = 2n - 1$
 B_n 의 좌표는 $(3^{2a_n}, 3^{a_n})$ 이므로
 $T_n = \frac{1}{2} \times \overline{A_nB_n} \times \overline{A_nA_{n+1}}$
 $= \boxed{(나)} \times 27^{a_n}$
 따라서
 $\sum_{n=1}^{10} \log_3 \frac{T_n}{4} = \boxed{(다)}$
 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 이라 할 때,
 $p+q+r$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

의 최솟값이 -4 이다. 함수 $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \frac{|g(x) - g(1)|}{|x| - 1}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(a^2)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

29. 검은 공 3개, 흰 공 2개가 들어있는 주머니와 숫자 카드 1, 2, 3이 들어있는 주머니가 있다. 갑과 을이 공이 들어있는 주머니에서 공을 2개 꺼내어 색을 확인한 후 다시 집어 넣는다. 갑, 을 순서로 2개의 공을 꺼낼 때 흰공의 개수만큼 숫자 카드 주머니에서 카드를 하나씩 뽑아 확인하고 다시 집어 넣는다. 갑이 꺼내어 확인한 수의 합이 을이 꺼내어 확인한 수의 합보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드의 개수가 2개가 될 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, 만약 카드를 뽑을 기회가 없는 경우 합은 0으로 한다.) [4점]

30. 두 양수 a ($a > 1$), b 에 대하여 $x > -b$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2\log_a(x+b) - b & (-b < x \leq 0) \\ \frac{x}{a^2} & (x > 0) \end{cases}$$

- 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 개수는 4이고 교점의 x 좌표를 크기가 작은 순서대로 나열하면 x_1, x_2, x_3, x_4 이고 $x_1 + x_3 = 0$ 이다. $f(0)=0$ 일 때, $f(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2028학년도 수학능력시험 예시문항-싱크로율99%

1	④	2	②	3	③	4	①	5	⑤
6	①	7	③	8	②	9	①	10	④
11	②	12	④	13	⑤	14	⑤	15	①
16	③	17	④	18	④	19	③	20	②
21	②	22	18	23	7	24	11	25	1
26	73	27	306	28	120	29	239	30	8

황보백T의 공식 출간물 [오르비/ye24/알라딘 등에서 구매 가능]

랑데뷰세미나 [오르비]

랑데뷰 라이트N제 시리즈 [오르비]

랑데뷰 기출과 변형 시리즈 [오르비]

랑데뷰 N제 풀포 시리즈 [오르비]

랑데뷰 N제 쉬사준킬 시리즈 [오르비]

랑데뷰 N제 킬러극킬 시리즈 [오르비]

랑데뷰★수학 모의고사 시리즈 [오르비]

랑데뷰 평가원-싱크로율99% 모의고사 [오르비]

황보백T의 비공식 출간물 [제본책 주문 가능]

랑데뷰 콘텐츠 시리즈

랑데뷰 상수 시리즈

등

문의 카톡 : hbb100

랑데뷰 상수

공통수학1/ 공통수학2/대수/미적분I

상수는 상위권 수학의 줄임말입니다. (상위권 학생들의 수학 내신대비 교재 및 수학 사고력을 높여주는 고난이도 문항이 탑재된 교재)

다음과 같은 최상위권 학생들에게 추천하는 교재입니다.

- (1) 고1 1학기 중간고사 대비를 하는 학생 중 100점을 노리는 최상위권 내신대비 책
- (2) 과학고, 영재고, 자사고 학생들의 내신대비 필수 교재
- (3) 수학 선형을 하는 최상위권 학생들의 마지막 공통수학 교재

각 단원 목차

1. 개념 정리

교과서 개념을 일목요연하게 정리하였습니다.

2. 1등급 도전 문제

전국 주요 고등학교의 최근 출제 경향을 반영한 문제들이 배치되었습니다.

3. 심화 개념

최상위권의 필수 심화 개념교재 [랑데뷰 세미나]의 공통수학 부분을 심화개념으로 실었습니다.

4. 심화 유형 탐구

100점 방지용으로 나오는 심화 문제를 해결해 나갈 수 있는 유형 탐구 문제들이 마지막에 배치되었습니다.

상수 구매 정보 [랑데뷰수학 시리즈 카페 참고]

cafe.naver.com/Rmath

공지 사항에 있습니다.

2028학년도 수학능력시험 예시문항-싱크로율99%풀이

[출제자: 황보백 랑데뷰수학
010-5673-8601]

1) 정답 ④

$$\begin{aligned} 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}} &= 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} \\ &= 2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2^2 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

2) 정답 ②

 $x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

3) 정답 ③

백의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 4이고, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 수의 개수는

$$5 \cdot 10 = 5^2 = 25 \text{ 이므로}$$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$4 \times 25 = 100$$

4) 정답 ①

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$ar^6 = 36, \frac{a_{10}}{a_7} = \frac{ar^9}{ar^6} = r^3 = 12$$

$$a_4 = ar^3 = \frac{ar^6}{r^3} = \frac{36}{12} = 3$$

5) 정답 ⑤

$$f(x) = (2x^3 + 1)(x-1)^2$$

$$f'(x) = 6x^2(x-1)^2 + 2(x-1)(2x^3 + 1)$$

$$\therefore f'(-1) = 28$$

6) 정답 ①

$$E(\hat{p}) = p = 0.02 \text{ 이므로}$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{100}} = \frac{14}{1000} = 0.014$$

7) 정답 ③

부채꼴 AOP 의 중심각의 크기를 θ 라 하면 호 AP 의 길이가 지름 AB 의 길이와 같으므로

$$1 \cdot \theta = 2 \quad \therefore \theta = 2$$

$$\text{부채꼴 AOP 의 넓이는 } \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2 = 1$$

$$\text{반원의 넓이는 } \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 부채꼴 BOP 의 넓이는 } \frac{\pi}{2} - 1 \text{ 이다.}$$

8) 정답 ②

$$f(x) = f(x+4) \text{ 이므로 } f(0) = f(4) \text{ 이다.}$$

$$2 = 16 - 8 + a$$

$$a = -6$$

$$\int_9^{11} f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 (-4x+2) dx + \int_2^3 (x^2-2x-6) dx$$

$$= -\frac{26}{3}$$

9) 정답 ①

$$f(a) - f(b) = 0 \text{ 일 확률을 구하면}$$

$$f(a) - f(b) = 0 \text{ 에서}$$

$$(a^2 - 4a + 3) - (b^2 - 4b + 3) = 0$$

$$(a^2 - b^2) - 4(a - b) = 0$$

$$(a-b)(a+b-4) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a+b=4$$

(i) $a=b$ 가 나올 확률

$$\frac{6}{6 \times 6} = \frac{6}{36}$$

(ii) $a+b=4$ 가 나올 확률

$$a+b=4 \text{ 인 경우는 } a=1, b=3 \text{ 또는 } a=2, b=2 \text{ 또는 } a=3, b=1 \text{ 의 세 가지이므로}$$

$$\frac{3}{6 \times 6} = \frac{3}{36}$$

(i), (ii) 에서 $a=2, b=2$ 는 중복되므로

$$f(a) - f(b) = 0 \text{ 일 확률은}$$

$$\frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

따라서 $f(a) - f(b) \neq 0$ 이 성립할 확률은

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

10) 정답 ④

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

주어진 함수가 미분 가능하므로 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 최댓값, 최솟값은 양 끝값과 극값들 중에서 존재한다. $f(1) = -2 + a$, $f(2) = -4 + a$, $f(4) = 16 + a$ 이므로 최댓값

$$M = 16 + a, \text{ 최솟값 } m = -4 + a \text{ 이다.}$$

$$M + m = 20 \text{ 이므로 } 12 + 2a = 20$$

$$\therefore a = 4$$

11) 정답 ②

접점을 (a, a^3+a+1) 로 놓으면 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - (a^3+a+1) = (3a^2+1)(x-a)$$

$$y = (3a^2+1)x - 2a^3 + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

①이 점 $(1, k)$ 를 지나므로

$$k = -2a^3 + 3a^2 + 2$$

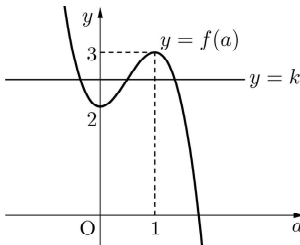
$f(a) = -2a^3 + 3a^2 + 2$ 로 놓으면 곡선 $y = f(a)$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수는 3이다.

$$f'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1) = 0 \text{에서}$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$$f(0) = 2, f(1) = 3 \text{이므로}$$

함수 $y = f(a)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 직선 $y = k$ 와 세 점에서 만날 조건은

$$2 < k < 3 \text{이므로}$$

$$\alpha = 2, \beta = 3 \text{이다.}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

12) 정답 ④

$$\text{전체 경우의 수는 } {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

구하고자 하는 경우의 수를 여사건을 이용하면

세 수의 곱이 4의 배수가 아닐 경우이고 이를 분류하면

(i) 2의 배수이고, 4의 배수가 아닌 경우

2, 6, 10중 1개를 뽑고 1, 3, 5, 7, 9에서 2개를 뽑으므로

$$\therefore {}_9C_1 \times {}_5C_2 = 30$$

(ii) 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 뽑으므로

$$\therefore {}_5C_3 = 10$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\therefore 1 - \frac{30+10}{120} = \frac{2}{3}$$

[다른 풀이]

$$\textcircled{1} \text{ 홀} \times \text{홀} \times (4 \text{ or } 8) : {}_5C_2 \times 2 = 20$$

$$\textcircled{2} \text{ 홀} \times \text{짝} \times \text{짝} : {}_5C_1 \times {}_5C_2 = 5 \times 10 = 50$$

$$\textcircled{3} \text{ 짝} \times \text{짝} \times \text{짝} : {}_5C_3 = 10$$

$$\therefore \frac{20+50+10}{120} = \frac{2}{3}$$

13) 정답 ⑤

확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고

$$P(X < a-3) = P(X > b+2) \text{이므로}$$

$$\frac{(a-3) + (b+2)}{2} = m$$

$$m = \frac{a+b-1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$Y = \frac{1}{3}X + 1, E(Y) = 51 \text{이므로}$$

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{3}X + 1\right) = \frac{1}{3}m + 1$$

$$m = 150 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } a+b = 301$$

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{3}X + 1\right) = \frac{1}{9}V(X)$$

$$\frac{1}{9}V(X) = \frac{4}{9} \text{이므로 } V(X) = 4, \sigma = 2$$

$$\therefore a+b+\sigma = 303$$

14) 정답 ⑤

[검토자 : 장세완T]

$$a_5 = a_4 - k \text{에서 } a_5 = 1 \text{이므로 } a_4 = k+1$$

같은 방법으로

a_1	a_2	a_3	a_4
$4k+1$	$3k+1$	$2k+1$	$k+1$

$$a_6 = \frac{a_5}{k} + 1 \text{에서 } a_5 = 1 \text{이므로 } a_6 = \frac{1}{k} + 1 = \frac{k+1}{k}$$

같은 방법으로

a_5	a_6	a_7	a_8
1	$\frac{k+1}{k}$	$\frac{k^2+k+1}{k^2}$	$\frac{k^3+k^2+k+1}{k^3}$

이다.

$$a_2 - a_7$$

$$= 3k+1 - \frac{k^2+k+1}{k^2} = 1$$

$$3k - \frac{k^2+k+1}{k^2} = 0$$

$$3k^3 - k^2 - k - 1 = 0$$

$$(k-1)(3k^2+2k+1) = 0$$

$$\therefore k = 1 (\because k \text{는 실수})$$

따라서 $a_1 = 5, a_8 = 4$ 으로 $a_1 + a_8 = 5+4 = 9$ 이다.

15) 정답 ①

[검토자 : 오정화T]

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하고 가속도를 각각 a_1, a_2 라 하자.

$$v_1 = 3t^2 - 8t + 2, v_2 = 10t$$

$$a_1 = 6t - 8, a_2 = 10$$

에서 $a_2 = 2 \times v_1$ 을 만족시키는 t 의 값을 구하자.

$$10 = 2(3t^2 - 8t + 2)$$

양변을 2로 나누면, $5 = 3t^2 - 8t + 2$ 이다.

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$(3t+1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=3 \quad (\because t \geq 0)$$

$t=3$ 일 때, a_1 의 값은 $18-8=10$ 이다.

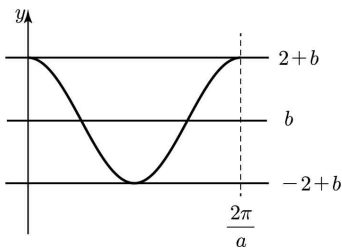
16) 정답 ③

[그림 : 최성훈T]

[검토자 : 한정아T]

곡선 $y=2\cos ax+b$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 최댓값이 $2+b$, 최솟값이

$-2+b$ 이므로 구간 $\left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 그래프는 다음과 같다.

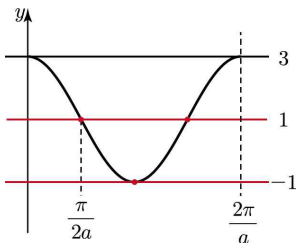


함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수는

$$|2\cos ax + b| = 1 \rightarrow 2\cos ax + b = 1, 2\cos ax + b = -1$$

에서 곡선 $y=2\cos ax+b$ 와 두 직선 $y=1, y=-1$ 이 만나는 점의 개수의 합과 같다. ㉠

(i) $b=1$ 일 때,



$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$ 에서 그림과 같이 ㉠의 개수가 3이므로

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{a} \text{ 일 때, } 6$$

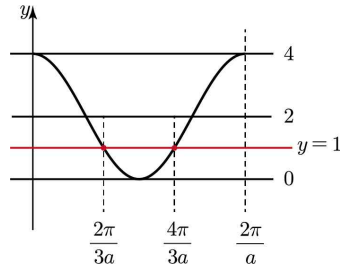
$$0 \leq x \leq \frac{6\pi}{a} \text{ 일 때, } 9$$

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 10이기 위해서는

$$\frac{6\pi}{a} + \frac{\pi}{2a} \leq 2\pi < \frac{6\pi}{a} + \frac{\pi}{a} \rightarrow \frac{13\pi}{2a} \leq 2\pi < \frac{7\pi}{a} \rightarrow \frac{13}{4} \leq a < \frac{7}{2}$$

이다. a 가 자연수이므로 모순이다.

(ii) $b=2$ 일 때,



$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$ 에서 그림과 같이 ㉠의 개수가 2이므로

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{a} \text{ 일 때, } 4$$

$$0 \leq x \leq \frac{6\pi}{a} \text{ 일 때, } 6$$

$$0 \leq x \leq \frac{8\pi}{a} \text{ 일 때, } 8$$

이고

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a} \text{에서 } 2\cos ax + 2 = 1 \rightarrow \cos ax = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3a}$$

$$\text{또는 } x = \frac{4\pi}{3a}$$

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 10이기 위해서는

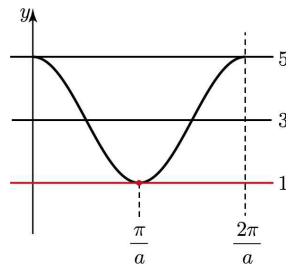
$$\frac{8\pi}{a} + \frac{4\pi}{3a} \leq 2\pi < \frac{10\pi}{a} + \frac{2\pi}{3a} \rightarrow \frac{28\pi}{3a} \leq 2\pi < \frac{32\pi}{3a} \rightarrow$$

$$\frac{14}{3} \leq a < \frac{16}{3}$$

이다. a 가 자연수이므로 $a=5$ 이다.

$$\therefore a+b=7$$

(iii) $b=3$ 일 때,



$$x = \frac{(2n-1)\pi}{a} \text{ 일 때마다 ㉠을 만족시키는 점의 개수가 1씩}$$

존재하므로 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 10이기 위해서는 $n=10$ 일 때,

$$\frac{19\pi}{a} \leq 2\pi < \frac{21\pi}{a} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\frac{19}{2} \leq a < \frac{21}{2}$$

a 가 자연수이므로 $a=10$ 이다.

$$\therefore a+b=13$$

(iv) $b \geq 4$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점이 존재하지 않는다.

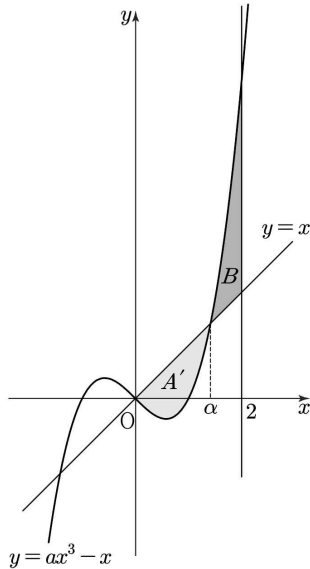
(i)~(iv)에서 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $13+7=20$ 이다.

17) 정답 ④

[그림 : 서태욱T]

[검토자 : 안형진T]

$x \geq 0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A' 라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모두 원점대칭이므로 $A=A'$ 이다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점을 $x=\alpha$ 라 하면

$$A' = \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$B = \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

이므로

$$A' - B$$

$$= \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx - \int_{\alpha}^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \{g(x) - f(x)\} dx + \int_{\alpha}^2 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 (2x - ax^3) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{a}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$= 4 - 4a = 0$$

이다.

$$\therefore a = 1$$

18) 정답 ④

[검토자 : 최현정T]

두 점 A, B의 x 좌표를 a , b 라 하면

(가)에서

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x+c) + x^2$$

$$g(x) = -(x-a)(x-b)(x+d) + x^2$$

라 할 수 있다.

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) - x^2\} \{g(x) - x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{(x-a)(x-b)(x+c)\} \{-(x-a)(x-b)(x+d)\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-a)^2(x-b)^2(x+c)(x+d)}{x^3} = 2 \neq 0 \text{ 이므로}$$

a 와 b 의 값 중 하나가 0이고 c 와 d 의 값 중 하나가 0이어야 한다.

(i) $a=0$, $b \neq 0$ 이고 $c=0$, $d \neq 0$ 일 때,

$$f(x) = x^2(x-b) + x^2, \quad g(x) = -x(x-b)(x+d) + x^2$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) - x^2\} \{g(x) - x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3(x-b)^2(x+d)}{x^3} = -b^2d$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + x^2\} \{g(x) + x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x^2(x-b) + 2x^2\} \{-x(x-b)(x+d) + 2x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \{(x-b) + 2\} \{-(x-b)(x+d) + 2x\}}{x^3}$$

$$= (2-b)bd$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } |-b^2d| = |(2-b)bd| = 2$$

$$-b^2d = (2-b)bd \rightarrow -b = 2-b \quad (\text{모순})$$

$$-b^2d = -(2-b)bd \rightarrow b = 2-b \rightarrow b = 1$$

따라서 $b=1$ 일 때, $|d|=2$ 에서 $d=2$ 또는 $d=-2$ 이다.

$\textcircled{1} \quad b=1$, $d=-2$ 일 때,

$$f(x) = x^2(x-1) + x^2, \quad g(x) = -x(x-1)(x-2) + x^2$$

에서

$$f(3) + g(3) = 27 + 3 = 30$$

$\textcircled{2} \quad b=1$, $d=2$

$$f(x) = x^2(x-1) + x^2, \quad g(x) = -x(x-1)(x+2) + x^2$$

에서

$$f(3) + g(3) = 27 - 21 = 6$$

(ii) $a=0$, $b \neq 0$ 이고 $c \neq 0$, $d=0$ 일 때,

$$f(x) = x(x-b)(x+c) + x^2, \quad g(x) = -x^2(x-b) + x^2$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) - x^2\} \{g(x) - x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3(x-b)^2(x+c)}{x^3} = -b^2c$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + x^2\} \{g(x) + x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x(x-b)(x+c) + 2x^2\} \{-x^2(x-b) + 2x^2\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \{(x-b)(x+c) + 2x\} \{-(x-b) + 2\}}{x^3}$$

$$= -(2+b)bc$$

①, ②에서 $|-b^2c| = |-(2+b)bc| = 2$

$b^2c = (2+b)bc \rightarrow b = 2+b$ (모순)

$b^2c = -(2+b)bc \rightarrow b = -2-b \rightarrow b = -1$

따라서 $b = -1$ 일 때, $|c| = 2$ 에서 $c = 2$ 또는 $c = -2$ 이다.

㉠ $b = -1$, $c = 2$ 일 때,

$f(x) = x(x+1)(x+2) + x^2$, $g(x) = -x^2(x+1) + x^2$

$f(3) + g(3) = 69 - 27 = 42$

㉡ $b = -1$, $c = -2$ 일 때,

$f(x) = x(x+1)(x-2) + x^2$, $g(x) = -x^2(x+1) + x^2$

$f(3) + g(3) = 21 - 27 = -6$

(i), (ii)에서 $f(3) + g(3)$ 의 최댓값은 42이다.

19) 정답 ③

[그림 : 이정배T]

[검토자 : 최병길T]

$\cos(\angle ACE) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\angle ACE = \frac{5}{6}\pi$ 이다.

따라서 $\angle BCE = \frac{\pi}{6}$, $\angle BDE = \frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 BDE는 정삼각형이다.

이등변삼각형 DCE에서 $\angle CDE = \frac{2}{3}\pi$, $\overline{CE} = \sqrt{3}$ 이므로

$\overline{CD} = \overline{DE} = x$ 라 하고 코사인법칙을 적용하면

$3 = x^2 + x^2 - 2x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\overline{CD} = x = 1$

이다.

$\overline{AC} = 1$ 이므로 삼각형 ACE에서

$\overline{AE}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + 3 + 3 = 7$

따라서 $\overline{AE} = \sqrt{7}$ 이다.

사각형 BCFE가 원에 내접하므로

$\angle ACF = \angle AEB$, $\angle AFC = \angle ABE$

따라서 $\triangle ACF \sim \triangle AEB$ 이고 $\overline{BE} = 1$ 이므로

$\overline{AC} : \overline{CF} = \overline{AE} : \overline{BE} \rightarrow 1 : \overline{CF} = \sqrt{7} : 1$

$\therefore \overline{CF} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

20) 정답 ②

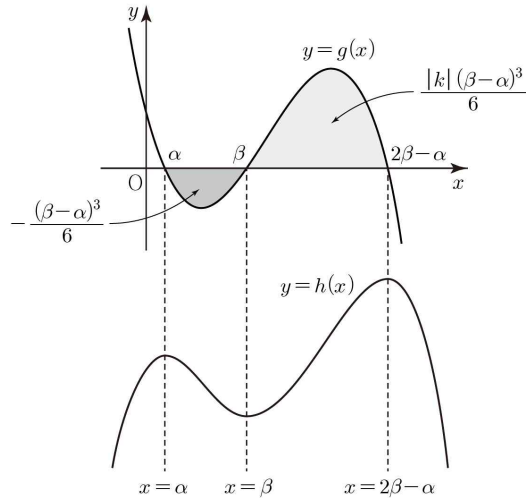
[그림 : 도정영T]

[검토자 : 정찬도T]

함수 $f(2\beta - x)$ 는 함수 $f(x)$ 를 직선 $x = \beta$ 에 대칭이동한

함수이므로 그림과 같이 함수 $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ 가 두 극댓값을

갖기 위해서는 $k < 0$ 이어야 하고 $x = \alpha$ 와, $x = 2\beta - \alpha$ 에서 극댓값을 갖는다.



$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

이므로

$\int_{\beta}^{2\beta-\alpha} k f(2\beta-x)dx = -k \times \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

이다.

$h(\beta) = h(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$h(2\beta-\alpha) = h(\beta) - k \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$h(2\beta-\alpha) - h(\alpha)$

$= -k \times \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$= (-k-1) \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$

에서 $k = -3$ 이다.

[다른 풀이]-정찬도T

$h(2\beta-\alpha) - h(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\beta-\alpha} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx + \int_{\beta}^{2\beta-\alpha} g(x)dx$

$= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx + \int_{\beta}^{2\beta-\alpha} k\{x-(2\beta-\alpha)\}(x-\beta)dx$

$= -k \times \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$= (-k-1) \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$

에서 $k = -3$ 이다.

[랑데뷰팁]

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

$\int_{\beta}^{2\beta-\alpha} k f(2\beta-x)dx = -k \times \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

21) 정답 ②

[출제자 : 황보성호T]

[검토자 : 정찬도T]

행렬 $\begin{pmatrix} a_k & -a_{k+1} \\ -a_{k+1} & a_{k+2} \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합이 0이므로

$$a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} = 0, \quad 2a_{k+1} = a_k + a_{k+2}$$

즉, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ($a_k \neq a_{k+1}$)가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

조건을 만족하는 자연수 k 가 2개이므로

(i) 012, 012, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우

$$A \mid 1 \mid B \mid 1 \mid C \mid 1 \mid D \mid 1 \mid E$$

1, 1, 1, 1을 우선 배치한 뒤 A, ..., E에 012, 012를 배치하면 되므로

① 같은 자리에 배치 : 5

② 다른 자리에 배치 : ${}_5C_2 - 4 = 10 - 4 = 6$

($\because$ A, B와 같이 이웃한 자리에 012, 012를 배치하면 조건을 만족하는 자연수 k 의 개수가 3이므로 불가능)

$$\therefore 5 + 6 = 11$$

(ii) 012, 210, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우

$$A \mid 1 \mid B \mid 1 \mid C \mid 1 \mid D \mid 1 \mid E$$

1, 1, 1, 1을 우선 배치한 뒤 A, ..., E에 012, 210을 배치하면 되므로

① 같은 자리에 배치 : $5 \times 2! = 10$

② 다른 자리에 배치 : ${}_5C_2 \times 2! = 20$

$$\therefore 10 + 20 = 30$$

(iii) 210, 210, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우

(i)과 동일

(iv) 01210, 1, 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우

$$A \mid 1 \mid B \mid 1 \mid C \mid 1 \mid D \mid 1 \mid E \mid 2$$

1, 1, 1, 1, 2를 우선 배치 : $\frac{5!}{4!} = 5$

A, ..., F에 01210을 배치 : 6

$$\therefore 5 \times 6 = 30$$

(v) 21012, 1, 1, 1, 1, 0을 나열하는 경우

(iv)와 동일

(i) ~ (v)에서 구하고자 하는 경우의 수는

$$11 + 30 + 11 + 30 + 30 = 112$$

[다른 풀이]-정찬도T

조합 또는 같은 것을 포함하는 경우의 순열을 활용

(i) 012 012 1 1 1 1을 나열하는 경우

012를 A라 놓으면, AA1111을 나열하는 것과 같으므로

$$\text{경우의 수는 } {}_6C_2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

그런데 012 012 사이에 1이 하나 있으면

0121012 조건을 만족하는 자연수 k 의 개수가 3이 되므로 조건에 맞지 않는다.

0121012를 C라 놓으면 C111을 나열하는 경우의 수

$${}_4C_1 = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \text{ 는 제외한다.}$$

$$\therefore 15 - 4 = 11$$

(ii) 012, 210, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우

012를 A라 놓고 201를 B라 놓으면 AB1111을 나열하는 것과 같으므로

$${}_6C_2 \times 2! = \frac{6!}{4!} = 30$$

(iii) 210, 210, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우

(i)과 동일

(iv) 01210, 1, 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우

01210을 A라 놓으면 A21111을 나열하는 것과 같으므로

$${}_6C_2 \times 2! = \frac{6!}{4!} = 30$$

(v) 21012, 1, 1, 1, 1, 0을 나열하는 경우

(iv)와 동일

그러므로 (i) ~ (v)에서 구하고자 하는 경우의 수는

$$11 + 30 + 11 + 30 + 30 = 112$$

※참고 (조합을 이용하여 같은 것이 포함된 순열의 수)

a, a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수

a, a, a, b, b, c 를 일렬로 나열할 때,

6개의 자리 중 a 는 세 자리, b 는 두 자리, c 는 한 자리만 차지하므로 경우의 수는

a 가 들어갈 자리 3개 뽑고, 남은 세 자리에서 b 가 들어갈 자리 2개 뽑고 마지막 자리에 c 를 넣으면 되므로 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{1}{1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} \text{ 이다.}$$

F 순서를 바꾸어서

b 가 들어갈 자리 2개 뽑고, 남은 네 자리에서 c 가 들어갈 자리 1개 뽑고 남은 세 자리에 a 를 넣으면 되므로 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} \text{ 이다.}$$

22) 정답 18

밑 $x-3 > 0$ 이고 $x-3 \neq 1$ 이므로

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4 \text{ 이다.}$$

진수 $-x^2 + 11x - 24 > 0$ 이므로

$$3 < x < 8 \text{ 이다.}$$

두 조건을 동시에 만족하는 정수는 5, 6, 7이다.

$$\therefore 5 + 6 + 7 = 18$$

23) 정답 7

$$f(x) = \int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$f(0) = 1$ 에서 $C = 1$ 이므로

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \text{ 이다.}$$

$$f(2) = 4 + 2 + 1 = 7$$

24) 정답 11

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$ 인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a , 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 20 \text{ 에서 } \frac{10 \times \{2(a+d) + 18d\}}{2} = 20$$

$$\therefore a + 10d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 10 \text{ 에서 } \frac{10 \times (2a + 18d)}{2} = 10$$

$$\therefore a + 9d = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -8, d = 1$ 이다.

$$\therefore a_{20} = -8 + 19 \times 1 = 11$$

25) 정답 1

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극값 k 를 가지므로 $f(k) = k, f'(k) = 0$ 이어야 한다.

$f(k) = k$ 에서

$$k^4 - k^3 - k^2 + k^2 + a = k$$

$$k^4 - k^3 - k + a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f'(k) = 0$ 에서

$$4k^3 - 3k^2 - 2k + k = 0$$

$$k(k-1)(4k+1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } k = 0 \text{ 또는 } k = 1$$

$$\text{이때, } \textcircled{1} \text{에서 } k = -\frac{1}{4} \text{ 이면 } a = -\frac{69}{256},$$

$$k = 0 \text{ 이면 } a = 0, k = 1 \text{ 이면 } a = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 자연수 a 의 값은 $k=1$ 일 때의 $a=1$ 이다.

26) 정답 73

[출제자 : 강동희T]

[검토자 : 김영식T]

$$E(X^2) = b + 2^3b + 3^3b + \cdots + k^3b$$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3)b$$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 b$$

$$E(X) = b + 2^2b + 3^2b + \cdots + k^2b$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2)b$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} b$$

$$E(X^2) = \frac{9}{5} E(X) \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 b = \frac{9}{5} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} b$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} = \frac{9}{5} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$5k(k+1) = 12k+6$$

$$5k^2 - 7k - 6 = 0$$

$$(k-2)(5k+3) = 0$$

따라서 $k=2$ ($\because k$ 는 정수)

$$E(X) = 0 + b + 4b = 5b$$

$$E(X^2) = \frac{9}{5} E(X) = 9b$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 9b - 25b^2$$

$$= -25 \left(b - \frac{9}{50} \right)^2 + \frac{81}{100}$$

$V(X)$ 는 $b = \frac{9}{50}$ 일 때 최대

$$a + b + 2b = 1$$

$$a = \frac{23}{50}$$

따라서 $p+q=73$

27) 정답 306

[그림 : 이정배T]

[검토자 : 이지훈T]

P_n 의 x 좌표가 a_n 이므로 y 좌표는 3^{a_n} 이다.

$$\therefore P_n(a_n, 3^{a_n})$$

$$\text{따라서 } \overline{OA_n} = 3^{a_n}, \overline{OA_{n+1}} = 3^{a_{n+1}}$$

$$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 9 \text{ 에서 } 3^{a_n} : 3^{a_{n+1}} = 1 : 9$$

$$3^{a_{n+1}} = 9 \times 3^{a_n}$$

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

에서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고 공차가 $\boxed{p=2}$ 인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = 2n - 1$$

B_n 의 좌표는 $(3^{2a_n}, 3^{a_n})$ 이므로

$$T_n = \frac{1}{2} \times \overline{A_n B_n} \times \overline{A_n A_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^{2a_n} \times (3^{a_{n+1}} - 3^{a_n})$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^{4n-2} \times (3^{2n+1} - 3^{2n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \times 3^{4n-2} \times 3^{2n-1} (3^2 - 1)$$

$$= 4 \times 3^{6n-3} = 4 \times 27^{2n-1} = \boxed{q=4} \times 27^{a_n}$$

$$\log_3 \frac{T_n}{4} = \log_3 3^{6n-3} = 6n - 3 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \log_3 \frac{T_n}{4} = \sum_{n=1}^{10} (6n - 3) = \frac{10 \times (3 + 57)}{2} = \boxed{r=300}$$

따라서 $p+q+r=306$ 이다.

28) 정답 120

[검토자 : 이지훈T]

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ 에서 } g(a) = 0, g'(x) = f(x) \text{ 이다.}$$

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $g(x)$ 는

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 이고 최솟값이 -4 인 사차함수이다.

$$h(x) = \frac{|g(x) - g(1)|}{|x - 1|} = \begin{cases} \frac{|g(x) - g(1)|}{x - 1} & (x \geq 0) \\ \frac{|g(x) - g(1)|}{-x - 1} & (x < 0) \end{cases}$$

이고 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 과 $x=-1$ 에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) \text{ 이어야 한다.}$$

$$g(x) - g(1) = (x-1)i(x) \text{ 라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|g(x) - g(1)|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|(x-1)i(x)|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1||i(x)|}{x - 1} = -|i(1)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|g(x) - g(1)|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x-1)i(x)|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1||i(x)|}{x - 1} = |i(1)|$$

$$-|i(1)| = |i(1)| \text{ 이므로 } i(1) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서 함수 $g(x) - g(1)$ 은 $(x-1)^2$ 을 인수로 가진다.

(ii) 함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) \text{ 이어야 한다.}$$

$$g(x) - g(1) = (x+1)j(x) \text{ 라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|g(x) - g(1)|}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|(x+1)j(x)|}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1||j(x)|}{-x - 1} = |(j(-1))|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|g(x) - g(1)|}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|(x+1)j(x)|}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1||j(x)|}{-x - 1} = -|(j(-1))|$$

$$|(j(-1))| = -|(j(-1))| \text{ 이므로 } j(-1) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서 함수 $g(x) - g(1)$ 은 $(x+1)^2$ 을 인수로 가진다.

$$(i), (ii) \text{ 에서 } g(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)^2 + g(1) \text{ 이다.}$$

함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(-1) = g(1)$ 이므로 $g(1) = -4$ 이다.

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{4} - 4$$

$$g(a) = 0 \rightarrow (a^2 - 1)^2 = 16 \rightarrow a^2 = 5$$

$$g'(x) = f(x) = x^3 - x$$

$$\text{이므로 } f(a^2) = f(5) = 125 - 5 = 120 \text{ 이다.}$$

29) 정답 239

[출제자 : 이소영T]

[검토자 : 이지훈T]

갑이 꺼내어 확인한 수의 합이 을이 꺼내어 확인한 수의 합보다 큰 확률을 구해보자.

(i) 갑이 흰 공 2개, 을이 흰 공 2개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{100}$$

숫자 카드의 합 중 갑이 클 확률

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 3인 경우 : } \frac{2}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{81}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 4인 경우 : } \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{81}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 5인 경우 : } \frac{2}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{12}{81}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 6인 경우 : } \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}$$

$$\text{이므로 이 경우의 확률은 } \frac{1}{100} \times \frac{31}{81} = \frac{31}{8100} \text{ 이다.}$$

(ii) 갑이 흰 공 2개, 을이 흰 공 1개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{100}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 2인 경우 : } \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 3인 경우 : } \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 4 이상인 경우 : } \frac{6}{9} \times 1 = \frac{6}{9}$$

$$\text{이므로 이 경우의 확률은 } \frac{6}{100} \times \frac{23}{27} = \frac{46}{900} \text{ 이다.}$$

(iii) 갑이 흰 공 2개, 을이 흰 공 0개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{100}$$

이때는 을이 꺼낸 수 카드의 합은 0이 되므로 항상 성립한다.

$$\text{따라서 이 경우의 확률은 } \frac{3}{100} \text{ 이다.}$$

(iv) 갑이 흰 공 1개, 을이 흰공 1개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{36}{100}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 2인 경우 : } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 3인 경우 : } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{이므로 이 경우의 확률은 } \frac{36}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{100} \text{ 이다.}$$

(v) 갑이 흰 공 1개, 을이 흰 공 0개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{18}{100}$$

이때는 을이 꺼낸 수 카드의 합은 0이 되므로 항상 성립한다.

$$\text{따라서 이 경우의 확률은 } \frac{18}{100} \text{ 이다.}$$

(vi) 갑이 흰공 1개, 을이 흰 공 2개를 꺼낼 경우

$$\text{공을 꺼내는 확률 : } \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{6}{100}$$

$$\text{갑이 꺼낸 카드의 합이 3인 경우 : } \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

$$\text{따라서 이 경우의 확률은 } \frac{6}{100} \times \frac{1}{27} = \frac{2}{900} \text{ 이다.}$$

갑이 꺼낸 수의 합이 을이 꺼낸 수의 합 보다 클 확률은

$$(i) + (ii) + (iii) + (iv) + (v) + (vi)$$

이고 그 중 갑이 꺼낸 카드의 개수가 2가 될 확률은

$$(i) + (ii) + (iii) \text{ 이다.}$$

따라서
$$\frac{\frac{31}{8100} + \frac{46}{900} + \frac{3}{100}}{\frac{31}{8100} + \frac{46}{900} + \frac{3}{100} + \frac{12}{100} + \frac{18}{100} + \frac{2}{900}}$$

$$= \frac{31 + 46 \times 9 + 3 \times 81}{31 + 46 \times 9 + 33 \times 81 + 2 \times 9}$$

$$= \frac{31 + 414 + 243}{31 + 414 + 2673 + 18}$$

$$= \frac{688}{3136}$$

$$= \frac{43}{196} \text{ 이므로 } p+q=239 \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

합	원공 0개		원공 1개		원공 2개	
	경우의 수	확률	경우의 수	확률	경우의 수	확률
0	1	1	0		0	
1	0		(1) 1가지	$\frac{1}{3}$	0	
2	0		(2) 1가지	$\frac{1}{3}$	(1, 1) 1가지	$\frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$
3	0		(3) 1가지	$\frac{1}{3}$	(1, 2), (2, 1) 2가지	$\frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$
4	0		0		(1, 3), (2, 2), (3, 3) 3가지	$\frac{3}{3 \times 3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
5	0		0		(2, 3), (3, 2) 1가지	$\frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$
6	0		0		(3, 3) 1가지	$\frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

30) 정답 8

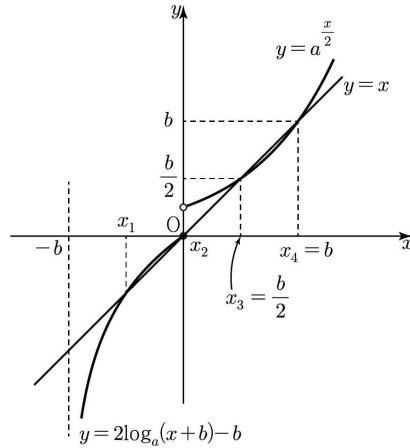
[그림 : 최성훈T]

[검토자 : 최병길T]

함수 $y = a^{\frac{x}{2}}$ 의 역함수는 $y = 2\log_a x$ 이고 함수 $y = 2\log_a x$ 를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼 평행이동하면 $y = 2\log_a(x+b) - b$ 이다. ㉠

곡선 $y = a^{\frac{x}{2}}$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 개수가 4이므로

곡선 $y = a^{\frac{x}{2}}$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 개수는 2이어야 한다.
따라서 $x > 0$ 에서 만나는 점의 x 좌표가 x_3, x_4 이고 $f(0) = 0$ 이므로 $x_2 = 0$ 이다.

㉠에서 $x_4 = b$ 이고 $x_1 = x_3 - b$ 이다.

$$x_1 + x_3 = 0 \rightarrow 2x_3 = b \rightarrow \therefore x_3 = \frac{b}{2}$$

$$(x_3, x_3) \rightarrow \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{가 } y = a^{\frac{x}{2}} \text{ 위에 있으므로 } \frac{b}{2} = a^{\frac{b}{4}} \dots\dots ㉡$$

$$(x_4, x_4) \rightarrow (b, b) \text{가 } y = a^{\frac{x}{2}} \text{ 위에 있으므로 } b = a^{\frac{b}{2}} \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = b \rightarrow b^2 = 4b \rightarrow b = 4 \quad (\because b > 0)$$

 $b = 4$ 이므로 ㉢에서 $a = 2$ 이다.

$$f(x) = \begin{cases} 2\log_2(x+4) - 4 & (-4 < x \leq 0) \\ \frac{x}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $f(a+b) = f(6) = 2^3 = 8$ 이다.

