우일신 又日新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 5월호

공통/수학2

미분 30제

정답 및 해설지

우일신又日新

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

파본형 월간 N제

25년 5월호

공통/수학2

미분 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌 넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ **13회 정답**

01 (9번)	02 (10번)	03 (11번)	04 (12번)	05 (13번)	06 (14번)	07 (15번)	08 (20번)	09 (21번)	10 (22번)
⑤	④	③	③	②	①	⑤	22	18	112

▶ **14회 정답**

11 (9번)	12 (10번)	13 (11번)	14 (12번)	15 (13번)	16 (14번)	17 (15번)	18 (20번)	19 (21번)	20 (22번)
③	⑤	③	①	③	②	④	97	17	157

▶ **15회 정답**

21 (9번)	22 (10번)	23 (11번)	24 (12번)	25 (13번)	26 (14번)	27 (15번)	28 (20번)	29 (21번)	30 (22번)
⑤	①	①	④	②	⑤	③	95	80	50

01

정답 ⑤

점 $(-1, 3)$ 이 곡선 $y=(2x-1)f(x)$ 위의 점이므로

$$3=(-3)\times f(-1) \quad \rightarrow \quad f(-1)=-1$$

$y=(2x-1)f(x)$를 미분하면 $y'=2f(x)+(2x-1)f'(x)$ 이므로 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $-3f'(-1)-2$ 이다.

점 $(-1, 3)$ 에서 곡선 $y=x^3+x$ 에 그은 접선의 접점의 x 좌표를 a 로 두면

$$\underbrace{\frac{a^3+a-3}{a+1}=3a^2+1}_{\text{평균변화율 = 접선의 기울기}} \quad \rightarrow \quad 2a^3+3a^2+4=0 \quad \rightarrow \quad a=-2$$

즉, 접선의 기울기는 13 $(a=-2$ 일 때, $3a^2+1)$이므로

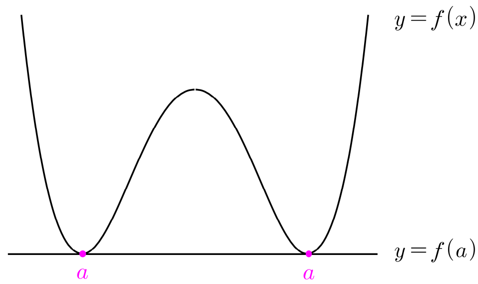
$$-3f'(-1)-2=13 \quad \rightarrow \quad f'(-1)=-5$$

$$\therefore \ -5$$

02

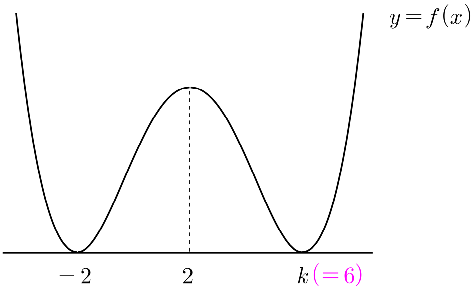
정답 ④

함수 $f(x)=x^4-\frac{4k}{3}x^3-8x^2+16kx$ 에 대하여 부등식 $f(x) \geq f(a)$ 가 항상 성립하도록 하는 실수 x 의 개수가 2 이므로 사차함수 $f(x)$ 는 다음 그림과 같이 동일한 극솟값을 가져야 한다.



즉, 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값이 등차수열을 이뤄야 한다. $f(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-4kx^2-16x+16k \\ &= 4(x+2)(x-2)(x-k) \end{aligned}$$



-2, 2, k가 이 순서대로 등차수열을 이뤄야 하므로($\because$ $k>0$) 양수 k의 값은 6이다.

$\therefore$ 6

03

정답 ③

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\{f'(a)x+f(a)\}}{(x-a)^2}=4 \quad : \quad \frac{0}{0} \text{ 꼴}$$

→ $f(x)$는 이차식, $f'(a)x+f(a)$는 일차식

의 값이 0이 아닌 값으로 수렴하려면 분자에 $(x-a)$ 인수가 2개 있어야 한다. (분모에 $(x-a)$ 인수가 2개 있으므로)

이때 만약 $f(x)$가 $(x-a)$ 인수를 2개 갖고 있다면,
$f'(a)=0$이므로 모순! 즉, $f(x)$는 $(x-a)$ 인수를 1개 갖고 있고,
$f'(a)x+f(a)$도 $(x-a)$ 인수를 1개 갖고 있어야 한다.

$$f(a)=0,\quad \underbrace{f'(a)a+f(a)=0}_{f(a)=0 \text{이고 } f'(a)>0} \quad\to\quad a=0$$

즉, 함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-k)$로 두면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{f'(0)x+f(0)\}}{x^2}=4$$

$f(0)=0$, $f'(0)=-k$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-kx^2(x-k)}{x^2}=4$$

$$\Leftrightarrow k=\pm 2$$

이때 $f'(0)(=-k)>0$이어야 하므로 $k=-2$
따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x+2)$이므로 $f(5)=35$이다.

$\therefore$ 35

04

정답 ③

모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=2x^3(x-1)$$

이므로 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수에 따라 케이스를 분류하자.
(상수함수가 아니라는 점에 주의!)

(1) $f(x)$가 삼차함수, $g(x)$가 일차함수인 경우

① $f(x)=mx^3$, $g(x)=\frac{2}{m}(x-1)$인 경우

함수 $f'(x)g(x)$는

$$f'(x)g(x)=6x^2(x-1) \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 X}$$

이므로 조건 (나)에 모순!

② $f(x)=mx^2(x-1)$, $g(x)=\frac{2}{m}x$인 경우

함수 $f'(x)g(x)$는

$$f'(x)g(x)=6x^2\left(x-\frac{2}{3}\right) \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 X}$$

이므로 조건 (나)에 모순!

(2) $f(x)$가 이차함수, $g(x)$가 이차함수인 경우

① $f(x)=mx^2$, $g(x)=\frac{2}{m}x(x-1)$인 경우

함수 $f'(x)g(x)$는

$$f'(x)g(x)=4x^2(x-1) \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 X}$$

이므로 조건 (나)에 모순!

② $f(x)=mx(x-1)$, $g(x)=\frac{2}{m}x^2$인 경우

함수 $f'(x)g(x)$는

$$f'(x)g(x)=4x^2\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 X}$$

이므로 조건 (나)에 모순!

(3) $f(x)$가 일차함수, $g(x)$가 삼차함수인 경우

① $f(x)=mx$, $g(x)=\frac{2}{m}x^2(x-1)$인 경우

함수 $f'(x)g(x)$는

$$f'(x)g(x)=2x^2(x-1) \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 X}$$

이므로 조건 (나)에 모순!

② $f(x)=m(x-1)$, $g(x)=\dfrac{2}{m}x^3$ 인 경우 (정답상황!)

함수 $f'(x)g(x)$ 는

$$f'(x)g(x)=2x^3 \quad \leftarrow \quad \text{일대일대응 O}$$

이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(1), (2), (3)에 의해 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는

$$f(x)=m(x-1),\quad g(x)=\frac{2}{m}x^3$$

이고, $f(2)+g(2)=8$ 이므로

$$f(2)+g(2)=8 \ \rightarrow\ m+\frac{16}{m}=8$$
$$\rightarrow\ m=4$$

따라서 $f(4)+g(4)=44$ 이다.

$\therefore\ 44$

05

정답 ②

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<1) \\ -x+4 & (x\geq 1)\end{cases} \quad : x=1\text{에서 불!}$$

는 $x=1$ 에서 불연속이다. 이때 조건 (가)에서 함수

$$h(x) = \underbrace{f(x)}_{x=1\text{에서 불!}} \times \underbrace{g(x)}_{\text{연!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 곱함수의 연속성에 의해 $g(1)=0$ 이다.

조건 (나)에서 함수 $|h(x)|$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1 이므로 $|h(x)|$ 의 미분가능성에 대해 판단해보자.
함수 $|h(x)|$ 의 미분불가능 점의 후보는

$h(x)$ 가 미분가능하지 않은 점 & $h(x)=0$ 인 점

(1) $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다면?
함수

$$h(x) = \underbrace{f(x)}_{x=1\text{에서 불!}} \times \underbrace{g(x)}_{\text{연!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곱함수의 미분가능성에 의해 $g(1)=0$, $g'(1)=0$ 이다. 이때 $h(x)=0$ 인 점이 $|h(x)|$ 의 미분불가능 점의 후보가 된다.

$$h(-3)=0,\quad h(4)=0 \quad (\because\ f(-3)=0,\ f(4)=0)$$

이므로 $h(x)$ 가 이 두 점 중에서 한 점에서만 미분불가능하려면 두 점 중 한 점만 인수를 2 개 이상 갖고 있어야 한다.
(그래야만 x 축과 접할 수 있음!)

① $|h(x)|$ 가 $x=-3$ 에서만 미분가능하지 않은 경우
$h(4)=0$ 임에도 $x=4$ 에서 미분가능해야 하므로 $h(x)$ 가 $(x-4)$ 인수를 2 개 이상 갖고 있어야 한다. 즉, $g(x)$ 는
$g(x)=(x-1)^2(x-4)$ 이어야 한다.

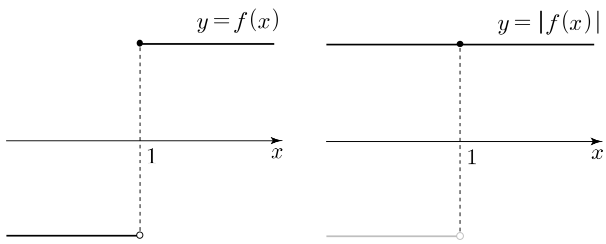
② $|h(x)|$ 가 $x=4$ 에서만 미분가능하지 않은 경우
$h(-3)=0$ 임에도 $x=-3$ 에서 미분가능해야 하므로 $h(x)$ 가 $(x+3)$ 인수를 2 개 이상 갖고 있어야 한다. 즉, $g(x)$ 는
$g(x)=(x-1)^2(x+3)$ 이어야 한다.

(2) $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다면?
$h(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않으면 $|h(x)|$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않으므로 (주의! Remark 꼭 읽어보기!)
$|h(x)|$ 는 $x=-3$, $x=4$ 에서 미분가능해야 한다.

$$h(-3)=0,\quad h(4)=0$$

임에도 두 점에서 모두 미분가능하려면 $h(x)$ 가 $(x+3)$ 과 $(x-4)$ 인수를 각각 2 개 이상 갖고 있어야 한다. 즉, $g(x)$ 는
$g(x)=(x-1)(x+3)(x-4)$ 이어야 한다.

* Remark (절댓값 함수의 미분가능성)
(우리 문제와는 무관한) 어떤 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다고 해서 $|f(x)|$ 가 $x=1$ 에서 항상 미분가능하지 않은 것은 아니다. 다음과 같이 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이지만, $|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능할 수 있다.



지금 우리 문제에선 이러한 상황이 펼쳐지지 않으므로 다소 생략하여 "$h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않으면 $|h(x)|$가 $x=1$에서 미분가능하지 않다."고 확정하여 서술하였지만, 오개념이 생기지 않도록 주의하자.

(1), (2), (3)에 의해 함수 $g(x)$는

$$g(x)=(x-1)^2(x-4) \quad \rightarrow \quad g(5)=16$$
$$g(x)=(x-1)^2(x+3) \quad \rightarrow \quad g(5)=128$$
$$g(x)=(x-1)(x+3)(x-4) \quad \rightarrow \quad g(5)=32$$

이므로 모든 $g(5)$의 값의 합은 176이다.

$\therefore\ 176$

06

정답 ①

함수 $g(x)=|f(x)|-|2x-2|$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left\{x\,g\left(p-\frac{1}{x}\right)+8x\right\}$$

이므로

㉠ : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$

㉡ : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x\,g\left(p-\frac{1}{x}\right)+8x\right\}$

의 값이 각각 존재하고 그 두 값이 같아야 한다. 두 값이 같다는 걸 활용하기에 앞서 먼저, ㉠, ㉡의 값이 존재하기 위한 조건부터 살펴보자.

Step 1 ㉠의 값이 존재한다.

먼저 ㉠의 값이 존재하기 위한 조건부터 살펴보자.

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1} \quad : \frac{0}{0}\text{꼴}$$

이므로 (분모)$\to0$일 때, (분자)$\to0$이어야 하므로 $g(1)=0$에서 $f(1)=0$이어야 한다.

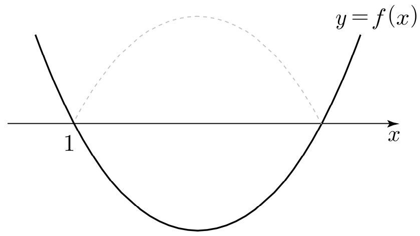
또한, 해당 극한 값이 존재하려면

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|-(2x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|}{x-1}-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|+(2x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|}{x-1}+2$$

의 값이 각각 존재하고 그 값이 같아야 한다. 이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 $x=1$에서 어떻게 만나느냐에 따라 케이스를 분류해보자.

(1) 대칭축이 1보다 오른쪽에 있다면?

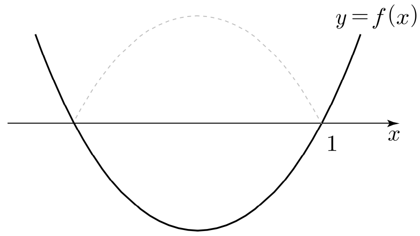


$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|}{x-1}-2=-f'(1)-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|}{x-1}+2=f'(1)+2$$

의 값이 서로 같으려면 $f'(1)=-2 \ \rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=0$

(2) 대칭축이 1보다 왼쪽에 있다면?



$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|}{x-1}-2=f'(1)-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|}{x-1}+2=-f'(1)+2$$

의 값이 서로 같으려면 $f'(1)=2 \ \rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=0$

(3) 대칭축이 1 이라면?

만약 $f(x)=(x-1)^2$ 이라면

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|}{x-1}-2$$
$$=-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|f(x)|}{x-1}+2$$
$$=2$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$ 의 값이 존재하지 않으므로 모순!

[Step 1]의 (1), (2), (3)에 의해 (1)과 (2) 중 어느 것이 정답인지는 아직 정확히 알 수 없으나, 어느 경우든 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=0$ 이다.

그러므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\,g\left(p-\frac{1}{x}\right)+8x\right\}=0$$

Step 2 ㉡의 값은 0 으로 수렴한다.

㉡의 극한 형태를 해석하기 위해 $x=\frac{1}{t}$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\,g\left(p-\frac{1}{x}\right)+8x\right\}=0$$
$$\Leftrightarrow\ \lim_{t\to0+}\frac{g(p-t)+8}{t}=0$$

: 좌미분계수를 의미!

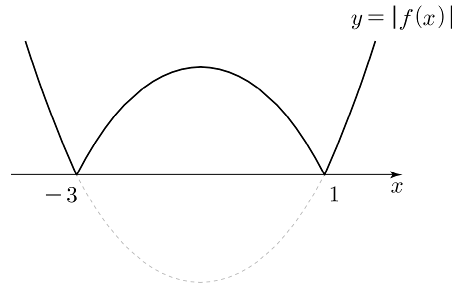
이므로 $g(p)=-8$ 이고,
함수 $g(x)$ 의 $x=p$ 에서의 좌미분계수가 0 이어야 한다.

이때 함수 $g(x)=|f(x)|-|2x-2|$ 의 좌미분계수가 0 이 되는 지점은 $f'(x)=\pm2$ 가 되는 상황이어야 한다.
즉, $f'(p)=\pm2$ 이어야 한다.
($g(1)=0$ 이고, $g(p)=-8$ 이므로 $p\neq1$ 이다.)

이때 [Step 1]의 (1), (2)와 이차함수의 대칭성에 의해 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=a(x-1)(x-p)$ 임을 알 수 있다. $g(p)=-8$ 이므로

$$g(p)=-8\ \to\ |2p-2|=8$$
$$\to\ p=-3\ \text{또는}\ p=5$$

(1) $p=-3$ 인 경우 (정답상황!)

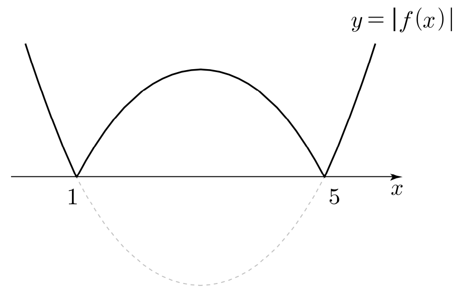


$p=-3$ 이면 함수 $g(x)$ 는

$$x<-3\text{일 때, } g(x)=f(x)+(2x-2)$$

이다. 이때 $g(x)$ 의 $x=-3$ 에서의 좌미분계수는 $f'(-3)+2=0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(2) $p=5$ 인 경우



$p=5$ 이면 함수 $g(x)$ 는

$$x<5\text{일 때, } g(x)=-f(x)-(2x-2)$$

이다. 이때 $g(x)$ 의 $x=5$ 에서의 좌미분계수는 $-f'(5)-2=-4\ (\neq0)$ 이므로 모순!

[Step 1]의 (1), (2)에 의해 $p=-3$ 이고 $f(x)$ 는 $f(x)=a(x+3)(x-1)$ 이다. 이때 $f'(1)=2$ 이어야 하므로 대입해서 계산하면 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$ 이므로 $f(p-4)=16$ 이다.
$(=f(-7))$

$\therefore\ 16$

07

정답 ⑤

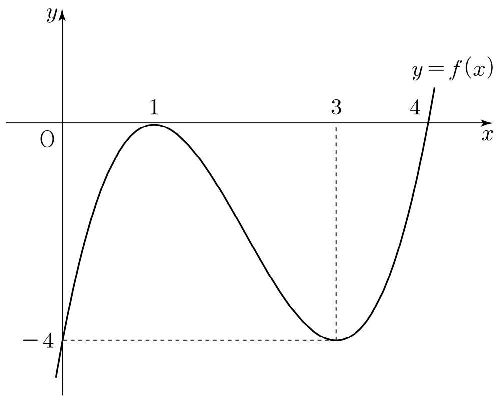
주어진 방정식의 형태를 변형하면

$$\begin{aligned} & \left|2f(x)-ax\right|+f(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3f(x)-ax=0 \quad \text{또는} \quad -f(x)+ax=0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x)=\frac{a}{3}x \quad \text{또는} \quad f(x)=ax \end{aligned}$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=\frac{a}{3}x$, $y=ax$ 가 만나는 점이 합쳐서 5 개가 되어야 한다. 함수 $f(x)$ 는

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3-6x^2+9x-4 \\ &=(x-1)^2(x-4) \end{aligned}$$

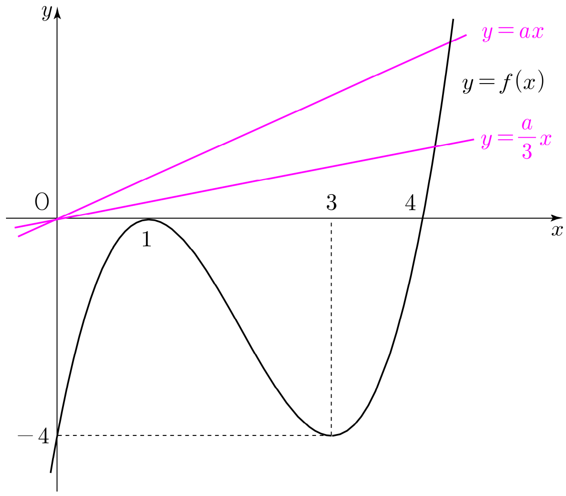
이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



두 직선의 기울기가 각각 $\frac{a}{3}$, a 이므로 a 의 값의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $a>0$ 인 경우

두 직선 $y=\frac{a}{3}x$, $y=ax$ 는 모두 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이다. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=\frac{a}{3}x$, $y=ax$ 을 그어보면 만나는 점이 합쳐서 5 개가 되는 상황이 절대 발생하지 않음을 알 수 있다.

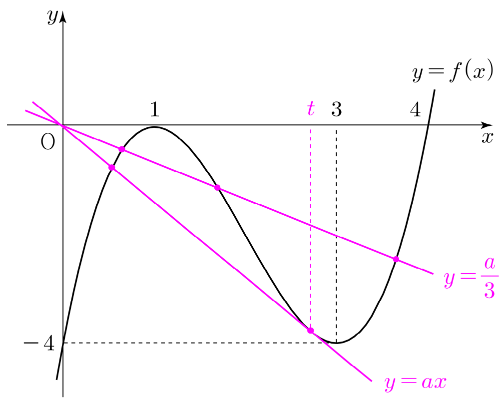


(2) $a=0$ 인 경우

$a=0$ 이면 두 직선은 모두 $y=0$ 이라는 x 축이 되므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 교점의 개수가 5 가 된다는 조건을 만족시킬 수 없다.

(3) $a<0$ 인 경우 (정답상황!)

두 직선 $y=\frac{a}{3}x$, $y=ax$ 는 모두 원점을 지나고 기울기가 음수인 직선이다. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=\frac{a}{3}x$, $y=ax$ 가 만나는 점이 합쳐서 5 가 되려면 직선 $y=ax$ 와는 $y=f(x)$ 의 그래프와 접해야 한다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 가 접하는 점의 x 좌표를 t 로 두면 (단, $t\neq1$)

두 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기와 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 서로 같다 활용!

$$\frac{f(t)}{t}=f'(t) \ \rightarrow\ (t-1)\left(t^2-2t-2\right)=0$$

$$\rightarrow\ t=1+\sqrt{3} \quad (\because\ t\neq1,\ t>0)$$

접점이므로 각각의 함수 식에 대입하면

$$f(1+\sqrt{3}) = a\times(1+\sqrt{3}) \ \rightarrow \ a=9-6\sqrt{3}$$

따라서 (1), (2), (3)에 의해 $a=9-6\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore\ 9-6\sqrt{3}$

08

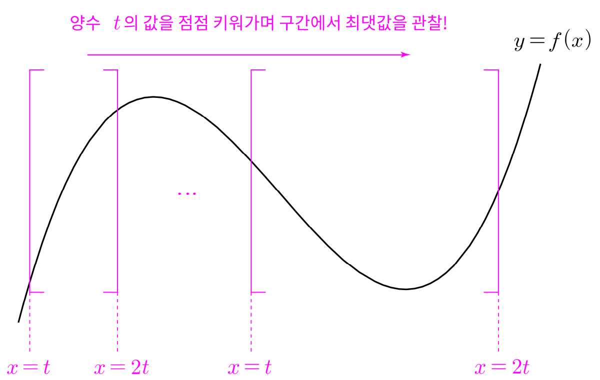
정답 22

닫힌구간 $[t,\,2t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $g(t)$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} < 0$$

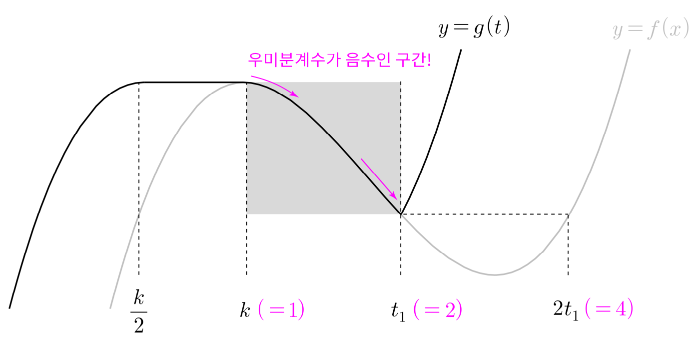
$\Leftrightarrow$ ($g(t)$의 우미분계수) < 0

를 만족시키려면 $g(t)$가 감소하는 구간이 발생해야 하므로 $f(x)$는 극대와 극소를 모두 가져야 한다.



이때 t의 값을 키워가며 닫힌구간 $[t,\,2t]$에서 $f(x)$의 최댓값인 $g(t)$를 관찰해보면 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

(함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극댓값을 갖는다고 가정)

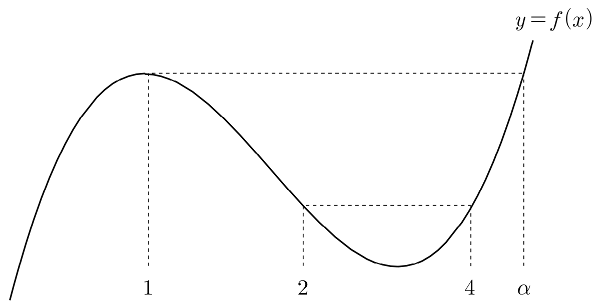


위의 그림과 같이

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} < 0$$

$\Leftrightarrow$ ($g(t)$의 우미분계수) < 0

를 만족시키는 구간은 $k<t<t_1$이므로 $k=1$, $t_1=2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)+f(1)$로 두면

$$f(2)=f(4) \ \rightarrow \ \alpha=\frac{17}{4}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{17}{4}\right)+f(1)$이므로

$f'(5)=22$이다. $f(1)$의 값을 몰라도 $f'(5)$의 값은 정해짐!

$\therefore\ 22$

09

정답 18

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f'(1)x & (x\le0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

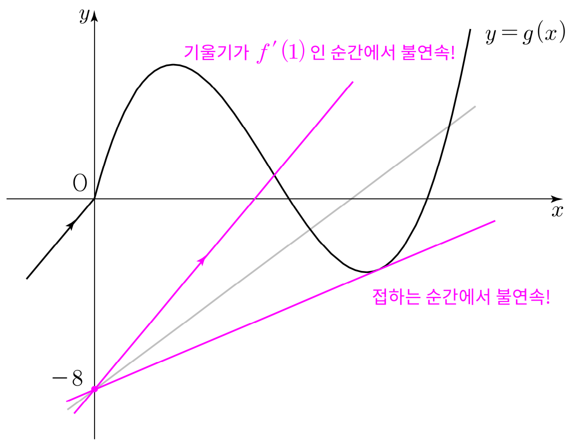
: $y=f'(1)x$는 기울기가 $f'(1)$이고 원점을 지나는 직선!

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(0)=0$이다.

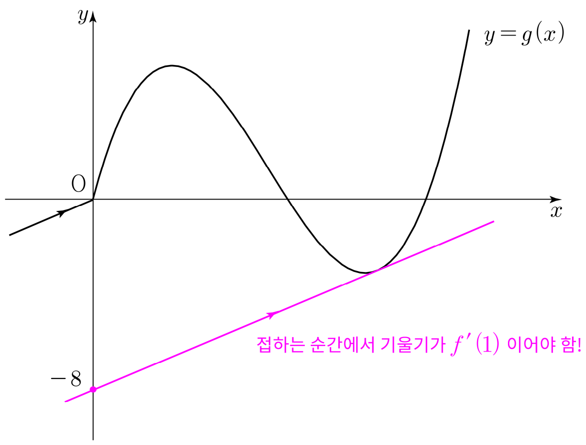
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=tx-8$이 만나는

$(0,\,-8)$을 지나는 직선

점의 개수인 $h(t)$를 관찰해보면 $h(t)$가 불연속이 되는 순간은 다음과 같다.

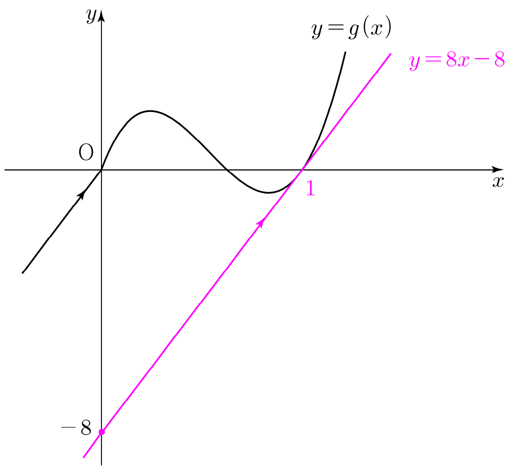


주어진 조건에 의해 $h(t)$ 는 오직 $t=8$ 에서만 불연속이므로 (불연속이 되는 t 의 개수가 1) 다음 그림과 같이 접하는 순간에서의 기울기가 $f'(1)$ 이어야 한다.



: 접점의 x 좌표가 1 일 수도 있고, 아닐 수도 있다!

(1) 접점의 x 좌표가 1 인 경우

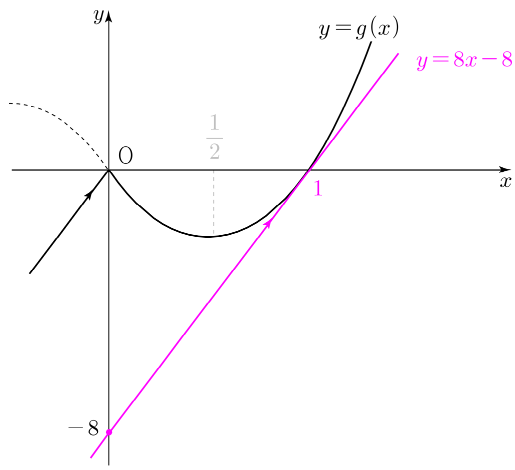


: 0과 1 사이에서 근의 존재성 유무는 식으로 확인해봐야 함!

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$ 임을 만족시켜야 한다는 사실에 주의!

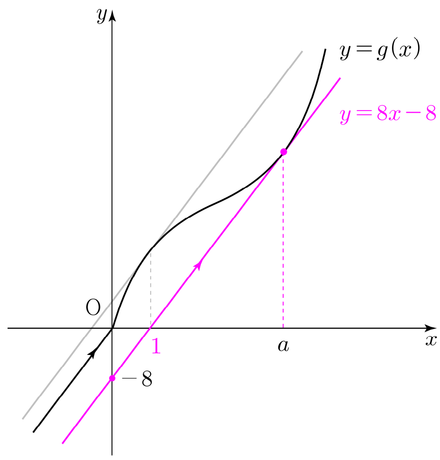
접점의 x 좌표가 1 이면 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f'(1)=8$ 을 만족시키므로

$$f(x)=x(x-1)(x+7)$$



이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. (모순!)

(2) 접점의 x 좌표가 1 이 아닌 경우 (정답상황!)



접점의 x 좌표를 a 로 두면 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(0)=0,\quad f'(1)=f'(a)=8,\quad f(a)=8a-8$$

을 만족시킨다. 도함수 $f'(x)$ 를

$$f'(x)=3(x-1)(x-a)+8$$

로 두면 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+1)x^2+(3a+8)x$$

이므로 $f(a)=8a-8 \to \quad a=4$

(1), (2)에 의해 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+20x$ 이므로

$f(2)=18$ 이다.

$\therefore$ 18

10

정답 112

최고차항의 계수가 2이고 극솟값이 0인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(f(x)+t) \geq f(t)$$

를 만족시키는 모든 t의 값의 범위가

$$-1 \leq t \leq 0 \quad \text{또는} \quad t \geq 1$$

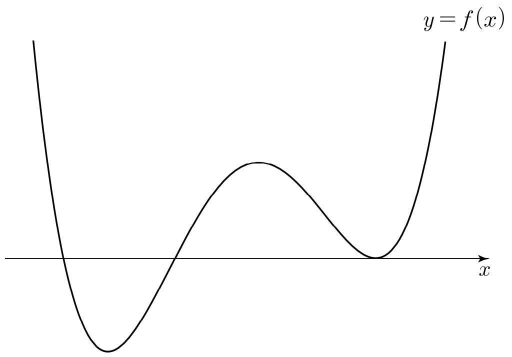
임을 해석하는 것은 부등식의 형태가 굉장히 낯설기에 접근 조차 쉽지 않다. 가장 먼저, 부등식의 좌변에서 f의 정의역인

$$f(x)+t$$

의 범위 판단을 하기 위해 $f(x)$의 최솟값을 따져봐야 한다.

Step 1 함수 $f(x)$의 극솟값에 따른 케이스 분류

(1) $f(x)$의 최솟값이 음수라면?



위의 그림과 같이 만약 $f(x)$의 최솟값이 음수라면, 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(f(x)+t) \geq f(t)$$

를 만족시키는 모든 t의 값의 범위가

$$-1 \leq t \leq 0 \quad \text{또는} \quad t \geq 1$$

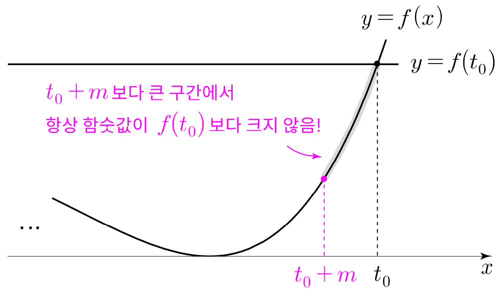
일 수 있는 지에 대해 판단해보자. 이 경우 극단적인 상황을 상상해보는 것이 편하다. $t \geq 1$인 모든 실수 t에 대해선 부등식이 다 성립하므로 t를 충분히 큰 양수 t_0라고 설정해보자.

직관적으로 t_0를 100, 1억과 같은 실제 엄청 큰 숫자로 가정해도 된다!

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f\left(f(x)+t_0\right) \geq f\left(t_0\right)$이 성립해야 하고, 좌변에서 f의 정의역인 $f(x)+t_0$의 범위를 살펴보면 ($f(x)$의 최솟값을 m으로 두자!)

$$f(x)+t_0 \geq t_0+m$$

이 성립한다. 이때 최솟값 m이 음수이므로 $t_0+m < t_0$이다.



모든 실수 x에 대하여 부등식 $f\left(f(x)+t_0\right) \geq f\left(t_0\right)$이 성립한다는 것은, t_0+m보다 큰 구간에서 f의 함숫값이 항상 $f\left(t_0\right)$보다 커야한다는 것인데, 위의 그림과 같이 항상 성립하는 것은 아님을 알 수 있다. (정확히 표현하자면 크거나 같은 순간이지만, 서술의 편의를 위해 지금부터 그냥 크다고만 표현하도록 하겠다.)

즉, $f(x)$의 최솟값은 음수일 수 없다.

(2) $f(x)$의 최솟값이 0인 경우

$f(x)$의 최솟값이 0이라면 부등식 $f(f(x)+t) \geq f(t)$의 좌변에서 f의 정의역인 $f(x)+t$의 범위는

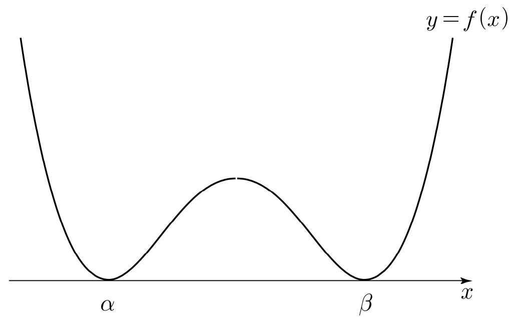
$$f(x)+t \geq t$$

이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(f(x)+t) \geq f(t)$이 성립한다는 것은, t보다 큰 구간에서 f의 함숫값이 항상 $f(t)$보다 커야 한다는 것이고, 이를 만족시키는 t의 범위가

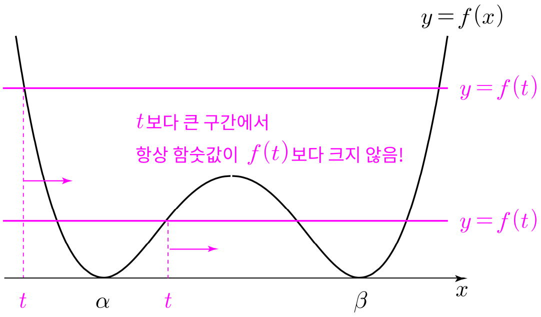
$$-1 \leq t \leq 0 \quad \text{또는} \quad t \geq 1$$

라는 것이다. 이때 우린 $f(x)$의 최솟값이 0인 2가지 상황을 나누어서 상황을 관찰해봐야 한다.

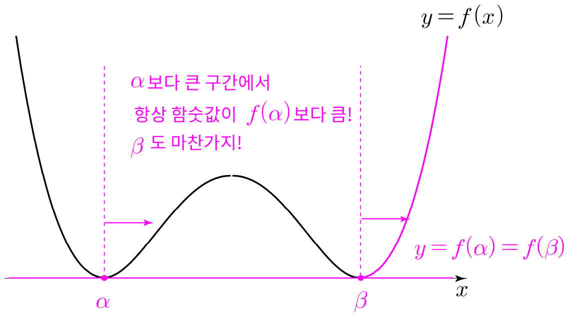
① $f(x)$가 동일한 극솟값 0을 2개 갖는 경우



$f(x)$가 $x=\alpha$, β에서 각각 최솟값 0을 갖는다고 가정하자. 이때 t를 움직여가면서, t보다 큰 구간에서 f의 함숫값이 항상 $f(t)$보다 큰 구간을 살펴보자.



위의 그림과 같이 $t<\alpha$, $\alpha<t<\beta$일 땐, 조건을 만족시키지 않고, $t=\alpha$, $t\geq\beta$일 때 조건을 만족시킨다는 사실을 도출할 수 있다.



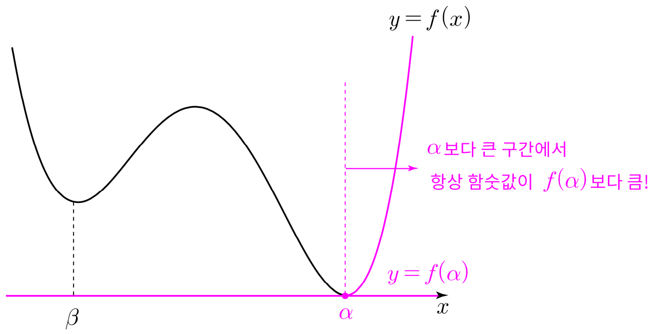
하지만, 문제에선 조건을 만족시키는 t의 값의 범위가

$$-1\leq t\leq 0 \quad \text{또는} \quad t\geq 1$$

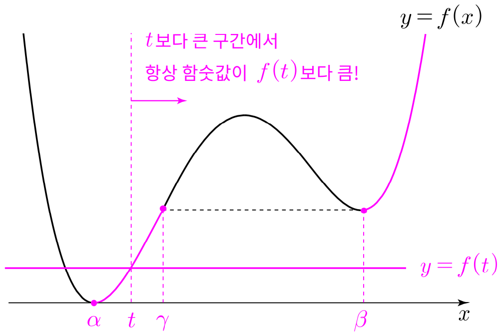
라고 했으므로 우리가 원하는 상황이 아니다.

② $f(x)$가 극솟값 0을 갖고, 양의 극솟값 하나를 갖는 경우

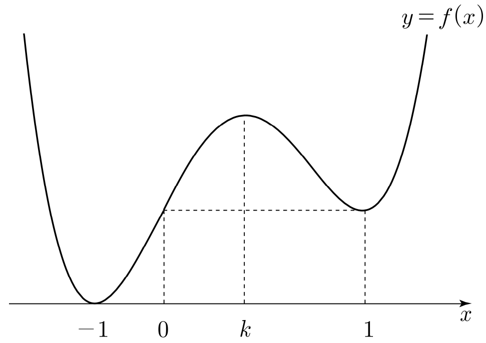
만약, $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극솟값 0, $x=\beta$에서 양의 극솟값을 갖는다고 가정하자. 만약, $\alpha>\beta$이면 다음 그림과 같이 조건을 만족시키는 t의 값의 범위가 $t\geq\alpha$이므로 우리가 원하는 상황이 아니다.



만약, $\alpha<\beta$이면 다음 그림과 같이 조건을 만족시키는 t의 값의 범위는 $\alpha\leq x\leq\gamma$, $x\geq\beta$이다.



그러므로 $\alpha=-1$, $\gamma=0$, $\beta=1$이다.



함수 $f(x)$가 극대가 되는 x의 값을 $x=k$로 두면

$$f'(x)=8(x+1)(x-1)(x-k)$$

부정적분!

$$f(x)=2x^4-\frac{8}{3}kx^3-4x^2+8kx+C$$

이때 $f(-1)=0$, $f(0)=f(1)$이므로 연립해서 계산하면

$k=\dfrac{3}{8}$, $C=4$이다.

따라서 $f(x)$는 $f(x)=2x^4-x^3-4x^2+3x+4$이므로 $f(3)=112$이다.

$\therefore\ 112$

11

정답 ③

최고차항의 계수가 모두 1인 이차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{1-x}$$: $\frac{0}{0}$ 꼴

이므로 두 극한 값이 각각 존재해야 한다. 즉,

$f(1)=0,\quad f'(1)g(1)=0$: 케이스 분류 시작!

(1) $f(1)=0$, $f'(1)=0$인 경우

함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-1)^2$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{1-x}=0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\frac{f'(x)g(x)}{x-1}=0$에서 $g(1)=0$

(2) $f(1)=0$, $g(1)=0$인 경우

$f(1)=0$, $g(1)=0$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{1-x}\quad\Leftrightarrow\quad f'(1)=-f'(1)$$

이므로 $f'(1)=0$

(1), (2)에 의해 $f(1)=f'(1)=g(1)=0$이므로

$$f(x)=(x-1)^2,\quad g(x)=x-1$$

이다. 따라서 $h(x)=(x-1)^3$이므로 $h'(3)=12$이다.

$\therefore\ 12$

12

정답 ⑤

함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge5)\\ 5 & (f(x)<5)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$f(a)=5 \text{인 모든 } a\text{에 대하여 } f'(a)=0$$

을 만족시켜야 한다. 즉, 방정식 $f(x)=5$는 삼중근을 가져야 한다. 이때 $f(x)$는

$$f(x)=x^3+6x^2+12x+k$$
$$=(x+2)^3+5$$: 이차/일차항의 계수를 통해 식 결정 가능!

이므로 $k=13$이다.

$\therefore\ 13$

13

정답 ③

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)-(x+f(0))$로 두면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고, $g(0)=0$이다.

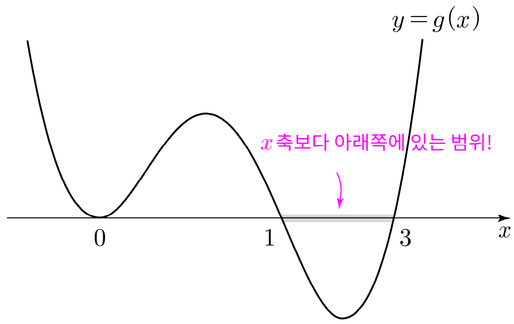
$x=0$에서 x축과 만남!

주어진 조건에 의해 부등식

$g(x)<0$: $y=g(x)$의 그래프가 x축보다 아래 쪽에 있는 범위!

을 만족시키는 x의 값의 범위가 $1<x<3$ … ㉠

이때 $g(0)=0$에서 $x=0$일 때도 x축과 만난다는 사실을 알 수 있는데, ㉠의 범위에 $x=0$이 포함되지 않으므로 $y=g(x)$는 $x=0$에서 x축과 접해야 한다! (그림 참고!)



즉, 함수 $g(x)$는 $g(x)=x^2(x-1)(x-3)$이므로

$$f(x)=x^2(x-1)(x-3)+(x+f(0))$$

x에 대하여 미분!

$$f'(x)=4x^3-12x^2+6x+1$$

따라서 $f'(2)=-3$이다.

$\therefore\ -3$

* Remark (직선 $y=x+f(0)$ 의 특징 관찰!)

새로운 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-(x+f(0))$ 로 도입하지 않고, 부등식

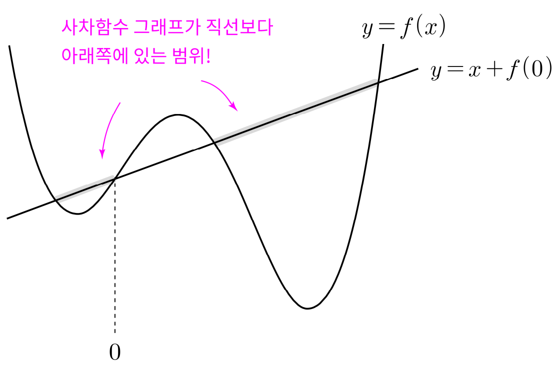
$$f(x)-f(0)<x \iff \underline{f(x)<x+f(0)}$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x+f(0)$ 보다 아래 쪽에 있는 범위!

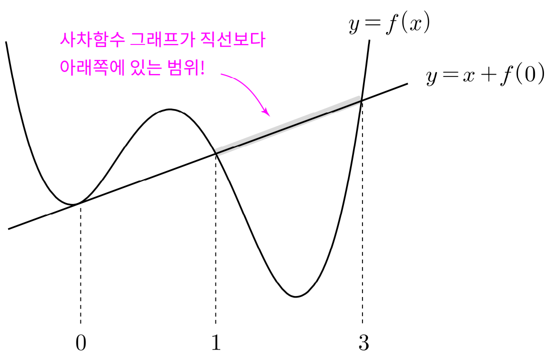
로 보고 문제를 바라볼수도 있다.

$y=x+f(0)$ ← : 기울기는 1 이고, 점 $(0,\ f(0))$ 을 지남!

다음 그림과 같이 두 그래프는 모두 점 $(0,\,f(0))$ 을 지난다.



이때 부등식 $f(x)<x+f(0)$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위가 $1<x<3$ 이려면 $x=0$ 에서 두 그래프가 접해야 한다.

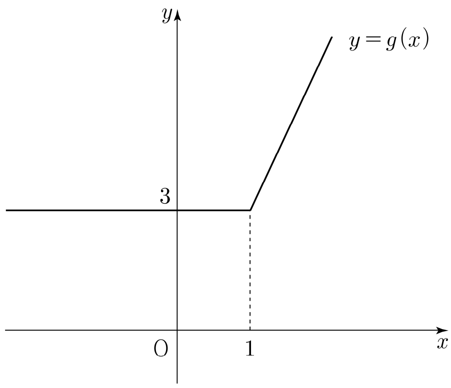


이후 계산은 동일!

14

정답 ①

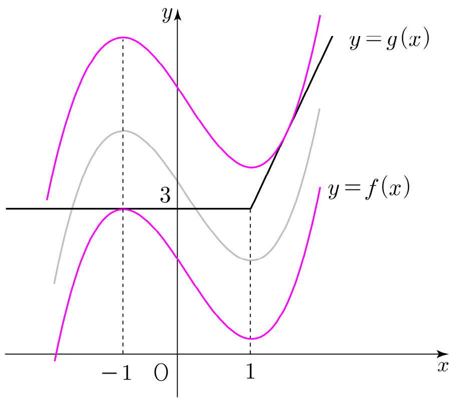
함수 $g(x)$ 를 $g(x)=3|x-1|+3x$ 로 두면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2x+a$ 를 미분하면

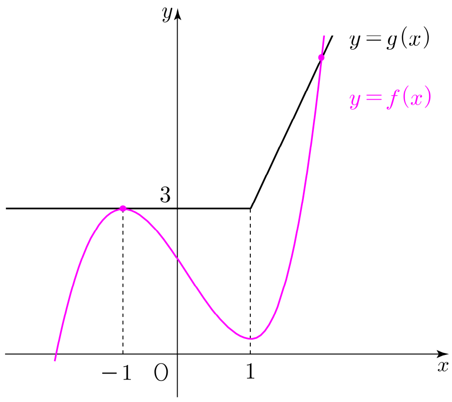
$f'(x)=2x^2-2$ → $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대,
$x=1$ 에서 극소

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2 가 되면 된다.



: 결국은 접하는 순간이 정답 상황!

(1) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3 인 경우

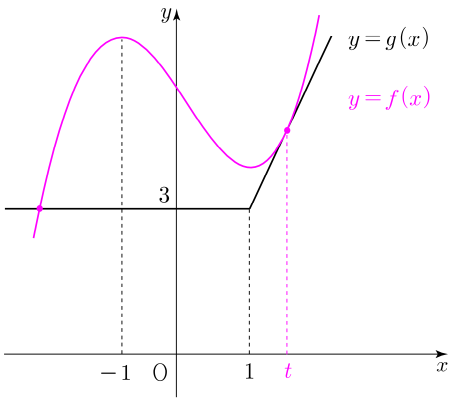


함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3 이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의

그래프의 교점의 개수가 2가 된다. 즉,

$$f(-1)=3 \ \rightarrow \ a=\frac{5}{3}$$

(2) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=6x-3$ 이 접하는 경우



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=6x-3$ 이 접하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 2가 된다. 즉, 접하는 접점의 x좌표를 t로 두면 (단, $t>1$)

$$f'(t)=6 \ \rightarrow \ t=2 \ \left(\because \ f'(x)=2x^2-2\right)$$

이므로 $f(2)=9\,(=6\times2-3)$ 에서 $a=\dfrac{23}{3}$

(1), (2)에 의해 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 $\dfrac{28}{3}$ 이다.

$$\therefore \ \frac{28}{3}$$

15

정답 ③

Step 1 주어진 극한에 대한 관찰

$$\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)\}^2-64}{h}$$

의 값이 존재하기 위해선 $\{f(x)\}^2=64 \ \rightarrow \ f(x)=\pm8$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=-8$, $y=8$은 서로 다른 세 점에서 만나고, 이때 세 점의 x좌표는 α, 0, β이다.
(단, $\alpha<0<\beta$)

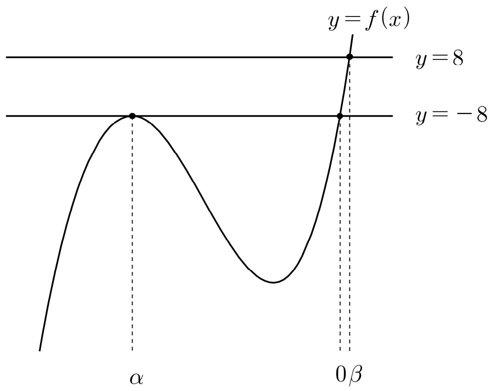
$$\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)\}^2-64}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{f(h)-8\}\{f(h)+8\}}{h}$$
$$=\begin{cases}16f'(0) & (f(0)=8\text{인 경우})\\ -16f'(0) & (f(0)=-8\text{인 경우})\end{cases}$$

이므로 $f(0)=8$이면 $f'(0)=9$이고,
$f(0)=-8$이면 $f'(0)=-9$이다. (케이스 분류 시작!)

Step 2 케이스 분류를 통해 정답 상황 관찰

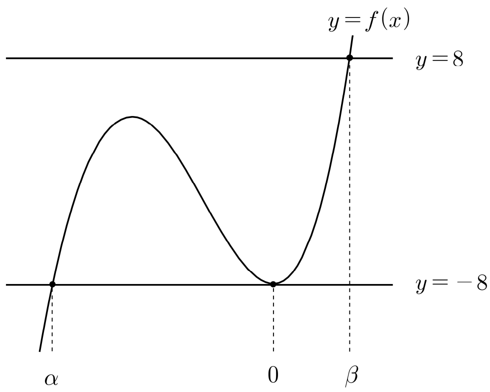
(1) $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 한 점에서 만나는 경우

① 극댓값이 -8인 경우



$f(0)=-8$이지만 $f'(0)>0$이므로 모순!

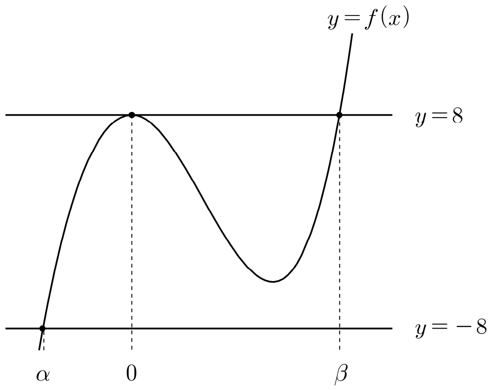
② 극솟값이 -8인 경우



$f(0)=-8$이지만 $f'(0)=0$이므로 모순!

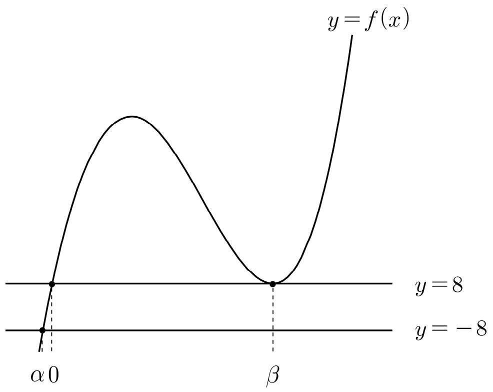
(2) $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-8$ 이 한 점에서 만나는 경우

① 극댓값이 8 인 경우



$f(0)=8$ 이지만 $f'(0)=0$ 이므로 모순!

② 극솟값이 8 인 경우 (정답상황!)



$f(0)=8$ 이고, $f'(0)>0$ 이므로 $f'(0)=9$ 이면 된다.

Step 3 주어진 조건을 활용해 식 계산을 통한 함수 식 결정

[Step 2]의 (2) - ②가 정답상황이므로 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 직선 $y=8$ 는 $x=0$, β (접함!)에서 만난다. 즉,

$$f(x)-8=x(x-\beta)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=(x-\beta)^2+2x(x-\beta)$$

이때 $f'(0)=9$ 이므로 대입해서 계산하면 $\beta=3$ ($\because\ \beta>0$)

함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x(x-3)^2+8$ 이므로 직선 $y=-8$ 과 만나는 점의 좌표 α 를 구하면

$$f(\alpha)=-8 \ \rightarrow \ \alpha(\alpha-3)^2=-16$$
$$\rightarrow \ \alpha=-1$$

따라서 $f'(\alpha+\beta)=-3$ $(=f'(2))$ 이다.

$\therefore\ -3$

16

정답 ②

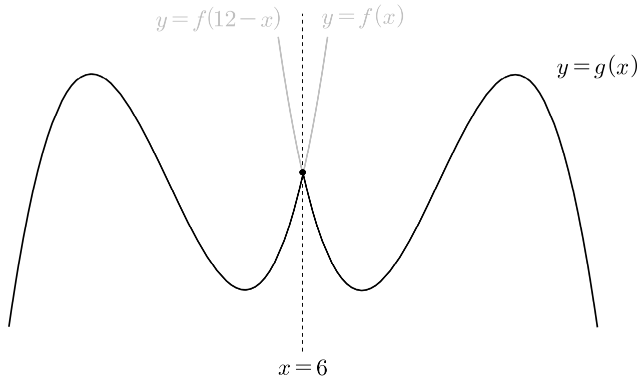
Step 1 함수 $g(x)$ 의 그래프 개형 추론

함수 $g(x)$ 는

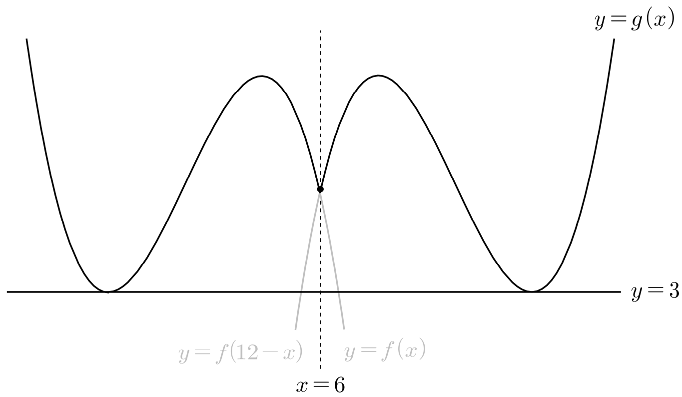
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<6) \\ f(12-x) & (x\geq 6) \end{cases}$$

: 선대칭과 관련되어 있음!

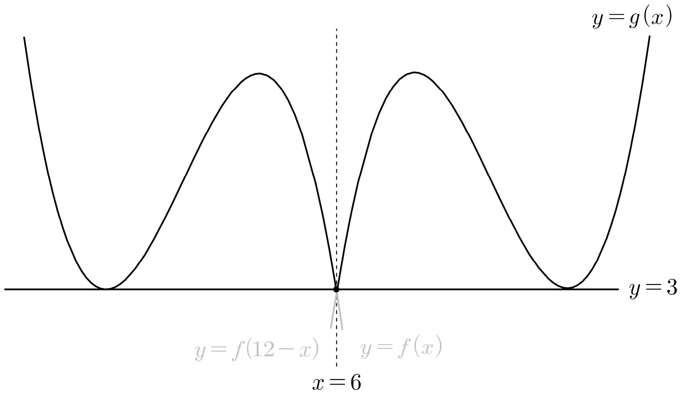
이때 함수 $y=f(12-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 $x=6$ 에 대하여 선대칭시킨 그래프이므로 함수 $y=g(x)$ 의 대략적인 그래프는 다음과 같다.



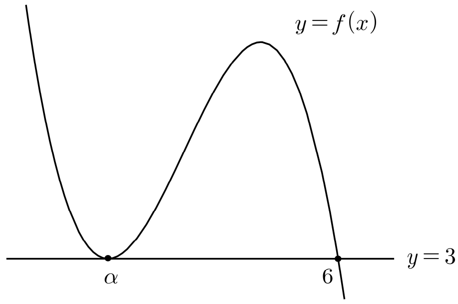
조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\geq 3$ (최솟값!)를 만족시켜야하므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이어야 한다.



이때 조건 (나)에서 방정식 $g(x)=3$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 (홀수)이므로 $f(6)=3$ 이어야 한다. (그림 참고!)



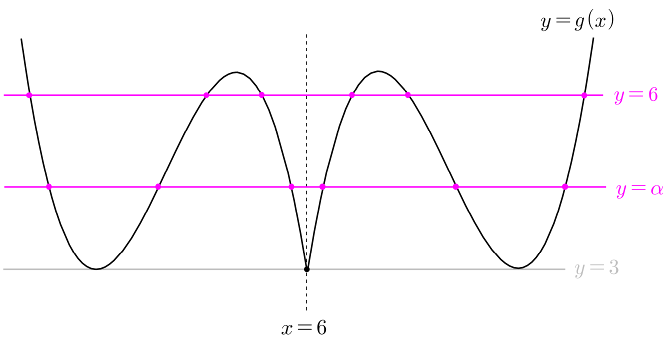
Step 2 **방정식 $f(g(x))=3$ 의 서로 다른 실근의 개수가 7**



위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 이 접하는 점의 x 좌표를 α 로 두면 방정식 $f(g(x))=3$ 의 실근은
두 방정식

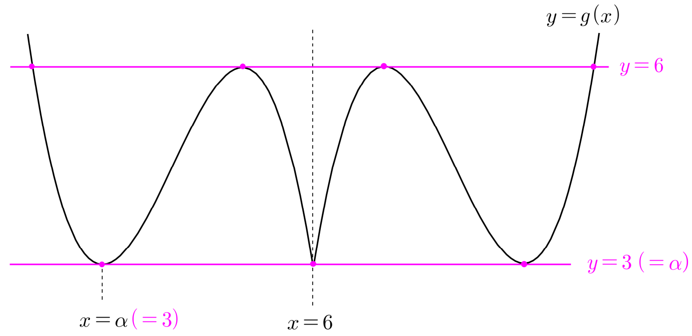
$$g(x)=\alpha\ (<6),\quad g(x)=6\ (>3)$$

의 실근으로 볼 수 있다.

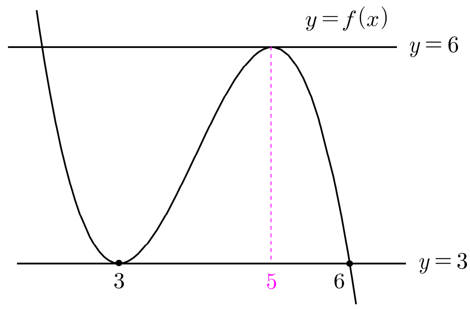


: 만약 $y=\alpha$, $y=6$ 이 위와 같이 그려지면
두 방정식의 실근의 개수는 합쳐서 12 개나 되어 버린다!

이때 두 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 7 이므로 가능한 경우는 다음 그림과 같이 극댓값이 6 이고, $\alpha=3$ 인 경우 뿐이다.



즉, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 를 $f(x)=m(x-3)^2(x-6)+3$ 으로 두면

$f(x)$ 의 극댓값이 6 이어야 하므로 $f(5)=6 \ \rightarrow\ m=-\dfrac{3}{4}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{4}(x-3)^2(x-6)+3$ 이므로 $f(1)=18$ 이다.

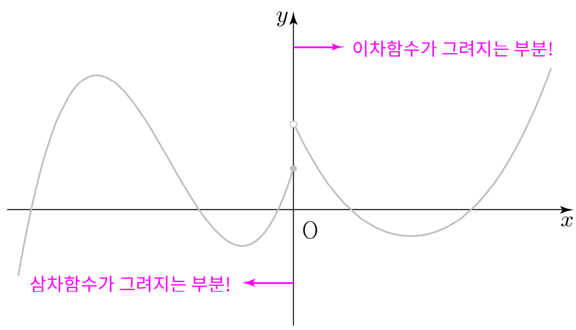
$\therefore\ 18$

17

정답 ④

함수 $h(x)$ 는 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$ 이므로

$x\le 0$ 일 때 : $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수!
$x>0$ 일 때 : $h(x)$는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수!



Step 1 **조건 (가)와 (나) 해석**

조건 (가)에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이고, 그 합이 0이므로 방정식 $h(x)=0$의 해를

$x=-p$, p (단, p는 양수)로 두면

$$f(-p)=0,\quad g(p)=0$$

를 만족시켜야 한다. 이때 조건 (나)에서 함수 $|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 우린 다음 두 가지 상황을 모두 충족시켜야 한다.

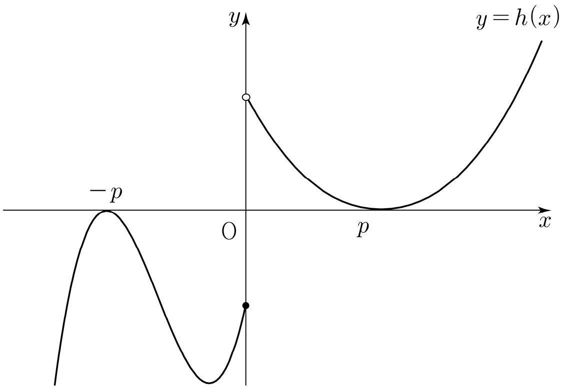
(1) x 축과 만나는 점에서 미분가능해야 한다.

방정식 $h(x)=0$의 해인 $x=-p$, p에 대하여 함수 $|h(x)|$가 $x=-p$, p에서 미분가능하려면

$$f(-p)=0 \ \rightarrow\ f'(-p)=0$$
$$g(p)=0 \ \rightarrow\ g'(p)=0$$

(x축과 뚫고 지나가면 안되고 접해야 함!)

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려져야 한다.



(2) $x=0$ 에서 미분가능해야 한다.

먼저, 함수 $h(x)$는 절대 $x=0$에서 연속일 수 없다.

Remark 참고!

$h(x)$가 $x=0$에서 불연속임에도 불구하고 $|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

① $\displaystyle\lim_{x\to 0-} h(x) + \lim_{x\to 0+} h(x) = 0$

: 좌/우극한값이 서로 크기가 같고, 부호만 반대!

② $\displaystyle\lim_{x\to 0-} h'(x) + \lim_{x\to 0+} h'(x) = 0$

: 좌/우미분계수가 서로 크기가 같고, 부호만 반대!

Step 2 **식 계산을 통한 함수 식 결정**

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각

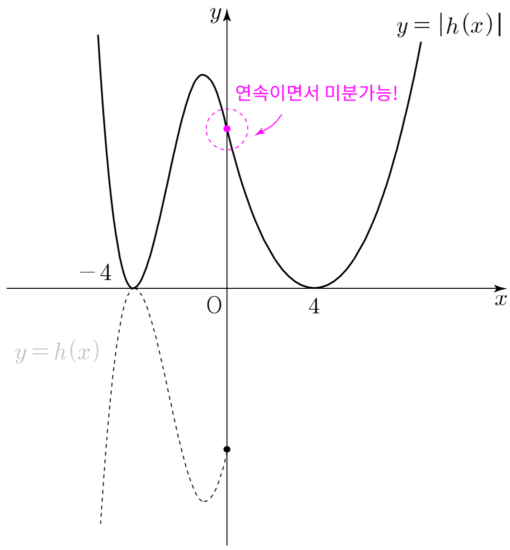
$$f(x)=(x+p)^2(x-q),\quad g(x)=(x-p)^2$$

으로 두면

$$f(0)=-p^2q,\qquad g(0)=p^2 \quad \leftarrow \text{서로 부호만 반대!}$$
$$f'(0)=-2pq+p^2,\quad g'(0)=-2p \quad \leftarrow \text{서로 부호만 반대!}$$

이므로

$$\underbrace{-p^2q+p^2=0}_{f(0)+g(0)=0},\quad \underbrace{p^2-2p(1+q)=0}_{f'(0)+g'(0)=0} \ \rightarrow\ p=4,\quad q=1$$



: 정답 상황 그래프!

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=(x+4)^2(x-1),\quad g(x)=(x-4)^2$$

이므로 $f(3)+g(3)=99$ $(=98+1)$이다.

$\therefore$ 99

* Remark (왜 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이면 안될까?)

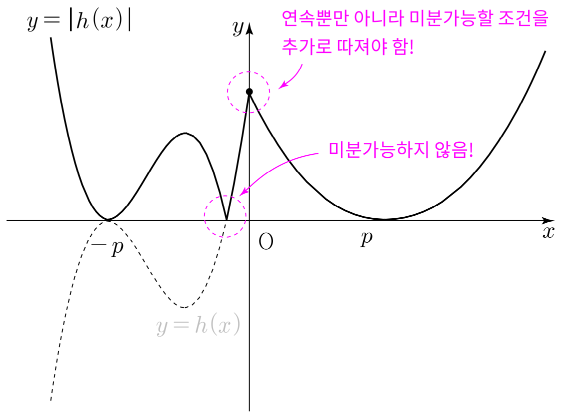
함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=(x-p)^2$이 되어 $\lim_{x \to 0+} g(x) > 0$이다.

이때 $h(x)$가 연속이려면 $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) > 0$,

즉, $f(0) > 0$이어야 한다.

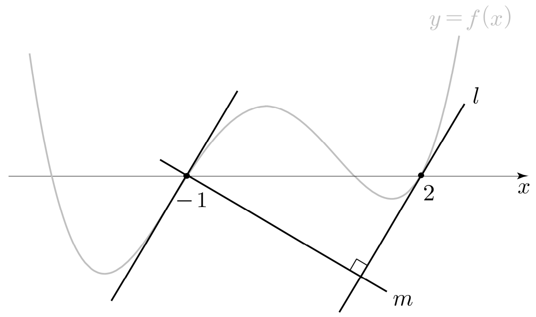
이때 사잇값 정리에 의해 닫힌구간 $[-p, 0]$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재하지만, 이 점에서의 접선의 기울기가 0이 아니므로 $|h(x)|$는 이 점에서 미분가능하지 않게 된다.



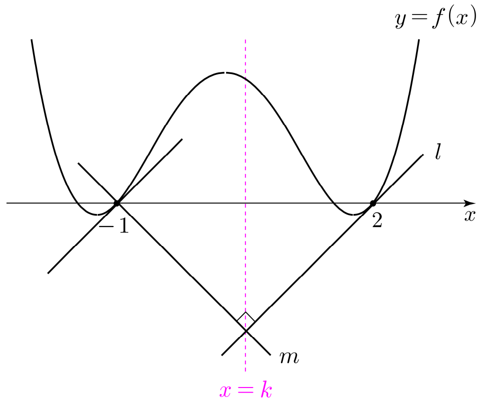
18

정답 97

조건 (가), (나)에서 얻은 정보로부터 상황을 상상해보면 다음과 같다.



이때 조건 (다)에서 두 직선 l과 m이 직선 $x=k$에 대하여 서로 대칭이라고 했으므로 l, m의 기울기는 각각 1, -1이어야 한다.



: 대칭인 직선 $x=k$는 -1, 2의 중점이어야 하므로 $k=\frac{1}{2}$

즉, $f(-1)=f(2)=0$, $f'(-1)=f'(2)=1$이므로

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)$로 두고 대입해서 계산하면

$a=-\frac{7}{9}$, $b=-\frac{19}{9}$이다. 따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{16}$이므로

$p+q=97$이다.

$\therefore$ 97

19

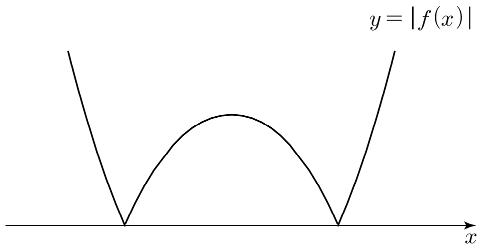
정답 17

Step 1 **함수 $y=f(x)$의 그래프 개형 파악**

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

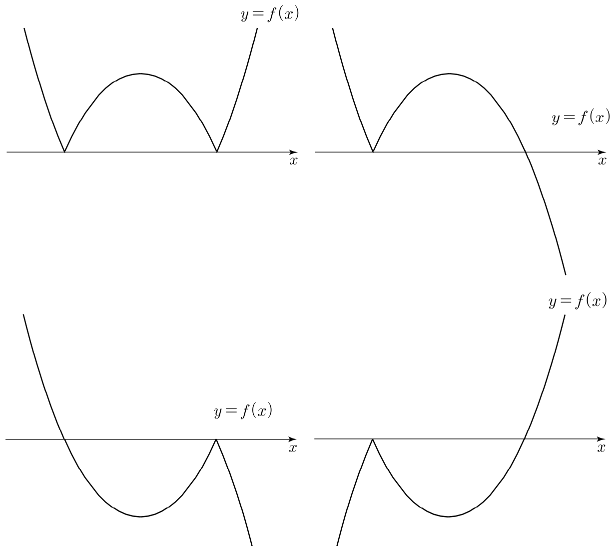
$$|f(x)|=|ax^2+b|$$

를 만족시키므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



: $y=ax^2+b$가 x축과 만나지 않는 경우는 따로 고려하지 않겠다.
그 이유는 박스 조건을 절대 만족시킬 수 없음을 어렵지 않게
알 수 있기 때문! (스스로 고민해보기)

이때 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프로 가능한 경우를 (대략) 그려보면 다음과 같다.



Step 2 **박스 조건 해석**

$\lim\limits_{x\to k+}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}\times\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}\le 0$를 만족시키는

실수 k의 값이 $k=\alpha$, $\alpha+2$뿐 임을 해석하기 위해

주어진 부등식을 관찰하면

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\times\lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\le 0$$

$\Leftrightarrow$ ($x=k$에서의 우미계)$\times$($x=k$에서의 좌미계) ≤ 0 $\cdots$ ㉠

미분가능하다면 (우미계)=(좌미계)이므로 대체로 성립하지 않음.
즉, 이 부등식을 만족시키는 점은 꽤나 '특수한' 점이라는 느낌이 들기!
(단, 미분가능하더라도 미분계수가 0이면 성립한다는 사실 주의!)

이때 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능한 지, 가능하지 않은 지 알 수 없으므로 케이스를 나눠서 살펴보자.

(1) $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하다면?

$f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면

($x=k$에서의 우미계)=($x=k$에서의 좌미계)

이다. 이때 ㉠이 성립하려면 $f'(k)=0$이면 된다.

(2) $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않다면?

$f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않으면

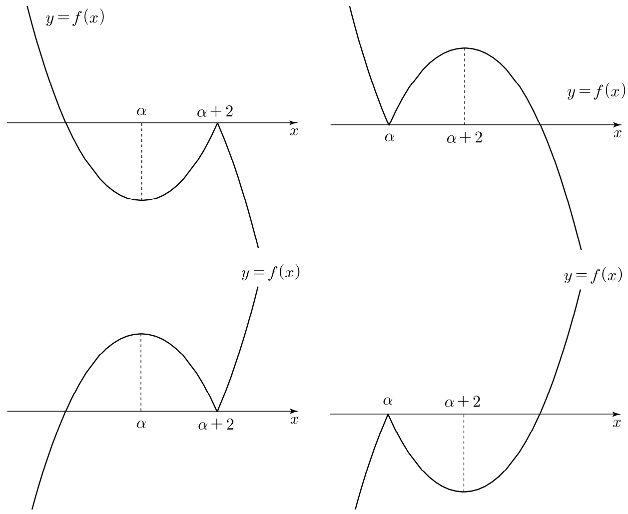
($x=k$에서의 우미계)$\neq$($x=k$에서의 좌미계)

이고 [Step 1]에서 살펴본 $y=f(x)$의 그래프 후보 상, $f(x)$가 미분가능하지 않게 된다면 그 이유는 절댓값 때문이다. 이때 절댓값으로 인해 $f(x)$가 미분가능하지 않게 되면 ㉠을 무조건 만족시킨다.

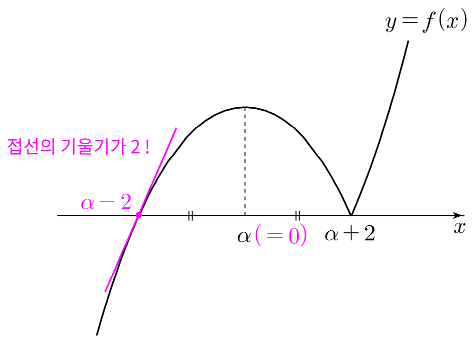
즉, (1), (2)에 의해 ㉠을 만족시키는 실수 k의 값은

① $f'(k)=0$인 점
② $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 점

이 된다. ①, ②을 만족시키는 실수 k의 값이 $k=\alpha$, $\alpha+2$로 2개뿐이니 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형과 그때의 α, $\alpha+2$의 위치를 표현하면 다음과 같다.



이때 $f'(\alpha-2)=f'(\alpha)+2$이므로 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하고, $x=\alpha$에서 미분가능하다면 $f'(\alpha)=0$이어야 한다. 즉, $f'(\alpha-2)=2$ (>0) 이를 만족시키는 개형은 단 하나 뿐이다.



이때 함수 $f(x)$가 $|f(x)|=|ax^2+b|$를 만족시키므로

$\alpha=0$일 수 밖에 없다. : 대칭축이 $x=0$!

즉, 함수 $y=a(x-2)(x+2)$의 $x=-2$에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로 미분해서 계산하면 $a=-\dfrac{1}{2}$이고, $b=2$이다.

따라서 $4(a^2+b^2)=17$이다.

$\therefore$ 17

20

정답 157

Step 1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 축의 위치 판단

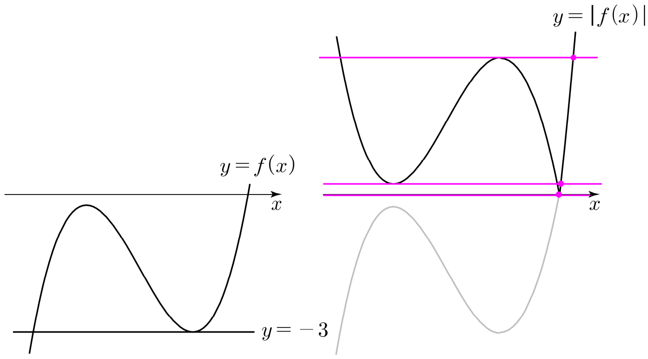
삼차함수 $f(x)$ 와 관련한 정보는

① 최고차항의 계수가 양수
② 극솟값이 -3

이라는 것뿐이므로 방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 실근에 대해 바로 판단하는 것은 불가능하다. 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프를 그리기에 앞서 x 축의 위치에 따라 케이스를 분류해보자.

(1) 극댓값이 0 보다 작은 경우

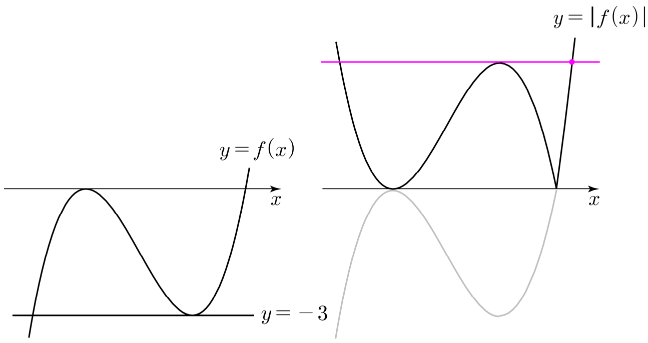
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0 보다 작으면
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 a 의 개수가 3 이므로 모순!
(방정식 $|f(x)|=f(a)$ 이지, $|f(x)|=|f(a)|$ 가 아님에 주의!)

(2) 극댓값이 0 인 경우

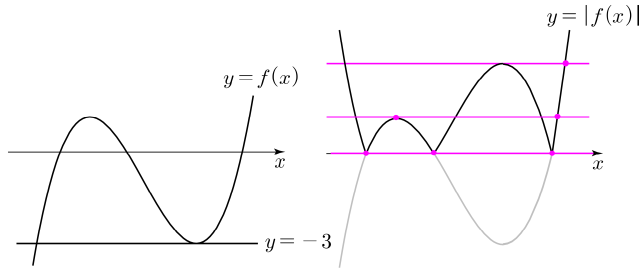
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0 이면
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 a 의 개수가 1 이므로 모순!

(3) 극댓값이 0 보다 크고 3 보다 작은 경우

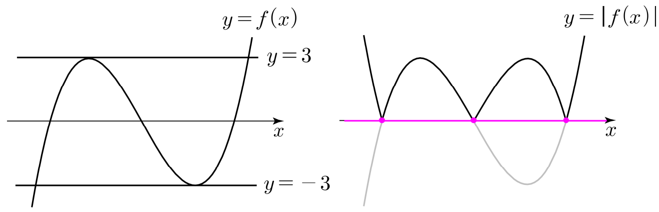
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0 보다 크고 3 보다 작으면
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 a 의 개수가 6 이므로 모순!

(4) 극댓값이 3 인 경우

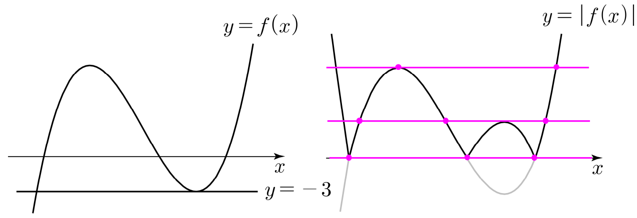
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3 이면
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 a 의 개수가 3 이므로 모순!

(5) 극댓값이 3 보다 큰 경우 (정답상황!)

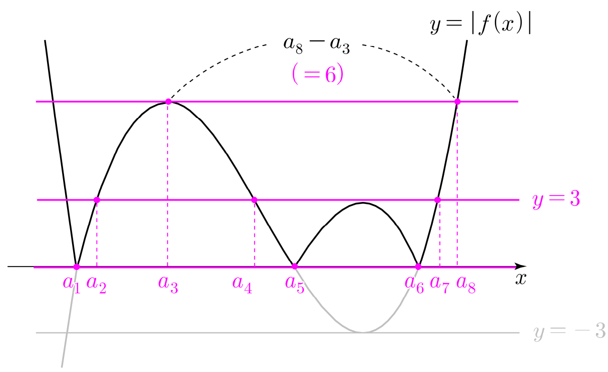
함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3 보다 크면
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|f(x)|=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 a 의 개수가 8 이므로 조건을 만족시킨다.

Step 2 $a_8-a_3=6$, $\sum_{k=1}^{8} f(a_k)=67$ 을 활용

[Step 1]의 (1) ~ (5)에 의해 조건을 만족시키는 상황은 다음과 같다.



이때 $a_8 - a_3 = 6$ 이므로 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = m\{x-(a_8-6)\}^2(x-a_8)+f(a_8)$$

: 직선 $y=f(a_8)$ 과 $x=a_3$ 에서 접하고, $x=a_8$ 에서 만난다!

로 두자. 이때 $\sum_{k=1}^{8} f(a_k) = 67$ 에서

$$\sum_{k=1}^{8} f(a_k) = f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_8)$$

⤸ $f(a_1)=f(a_5)=f(a_6)=0$

$$=f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_7)+f(a_8)$$

⤸ $f(a_2)=f(a_4)=f(a_7)=3,\ f(a_3)=f(a_8)$

$$=9+2f(a_8)$$

이므로 $f(a_8) = 29$ (=극댓값)이다.

삼차함수의 극값 차 공식에 의해

$$29-(-3) = \frac{m}{2}\times 4^3 \ \rightarrow\ m=1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \{x-(a_8-6)\}^2(x-a_8)+29$$

이므로 $f(a_8+2) = 157$ $(=128+29)$ 이다.

$\therefore\ 157$

21

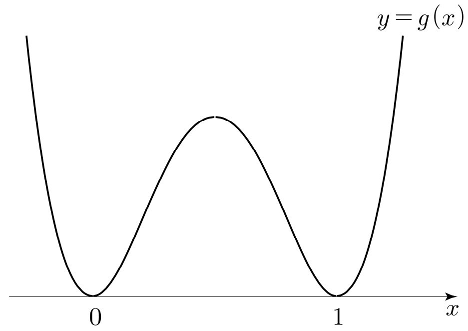
정답 ⑤

함수 $g(x)$ 를 $g(x)=xf(x)$ 로 두면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이고, $g(0)=0$, $g(1)=0$ ($\because$ 조건 (나))이다.

이때 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$g(x) \geq 0$: $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축보다 항상 위에 있어야 함!

이 성립해야 하므로 $g(x)=x^2(x-1)^2$ 이어야 한다.



: $x=0$, $x=1$ 에서 x 축과 만나는데
x 축보다 항상 위에 있으려면 두 곳에서 모두 접해야 함!

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x(x-1)^2$ 이므로 $f(4)=36$ 이다.

$\therefore\ 36$

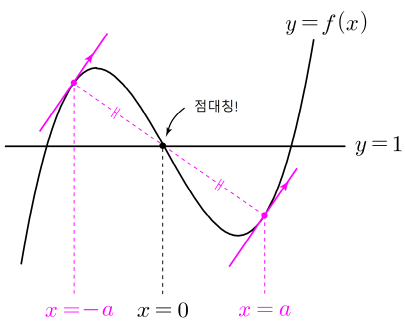
22

정답 ①

$\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-4}{x+a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)+2a}{x-a}$ 으로부터

$$f(-a)=4,\ f(a)=-2a,\ \underline{f'(-a)=f'(a)}$$

$f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표 : 0



이때 $f(0)=1$ 이므로

$$\frac{f(-a)+f(a)}{2} = f(0) \ \rightarrow\ a=1$$ (대입해서 계산)

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x^3-4x+1$ 이므로
$(f(2a)=)\,f(2)=1$ 이다.

$\therefore\ 1$

23

정답 ①

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (1 \le x < 2) \\ 2x+b & (x \ge 2) \end{cases}$$: $x=2$에서 연? 불?

가 모든 실수 x에 대하여

$$f(1+x)+f(1-x)=4$$: 점대칭과 관련된 정보!

를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\,2)$에 대하여 점대칭임을 알 수 있다. 즉, 점 $(1,\,2)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이어야 하므로 대입해서 계산하면 $a=1$

함수 $f(x)g(x)$의 미분가능성을 판단하기 위해 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 연속성을 먼저 판단해보자.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 불연속이라면?

$f(x)$가 $x=2$에서 불연속인 경우, 함수

$$\underbrace{f(x)}_{x=2\text{에서 불!}} \times \underbrace{g(x)}_{\text{미가!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곱함수 미분가능성에 의해 $g(x)$는 $(x-2)$ 인수를 2개 이상 갖고 있어야 한다. 이때 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x)=(x-2)^2$으로 확정!

하지만, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\,2)$에 대하여 점대칭이므로 $x=2$에서 불연속이면 $x=0$에서도 불연속이다.

이때 동일한 논리로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곱함수 미분가능성에 의해 $g(x)$는 x 인수를 2개 이상 갖고 있어야 하므로 모순! ($\because$ 이차함수)

(2) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이라면? (정답상황!)

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) \quad \to \quad b=2$$

이때 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (1 \le x < 2) \\ 2x+2 & (x \ge 2) \end{cases}$$

는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$$\underbrace{f(x)}_{x=2\text{에서 미불!}} \times \underbrace{g(x)}_{\text{미가!}}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곱함수 미분가능성에 의해 $\underline{g(2)=0}$이어야 한다.

$g(x)$는 $(x-2)$ 인수를 1개 이상 갖고 있어야 함!

(1)에서와 동일한 논리로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\,2)$에 대하여 점대칭이므로 $x=2$에서 미분가능하지 않으면 $x=0$에서도 미분가능하지 않다. 즉, 곱함수 미분가능성에 의해 $g(0)=0$이어야 한다.

(1), (2)에 의해 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$는 $g(x)=x(x-2)$이다. 따라서 $(a+b)\times g(3)=9$ $(=3\times 3)$이다.

$\therefore$ 9

24

정답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f'(x+1)}{f(x)} = |f(0)|+|f(1)|$$

: (분모)$=0$? (분모)$\neq 0$?

의 극한에서 분모가 0인지 아닌지에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $f(0)\neq 0$인 경우

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f'(x+1)}{f(x)}=0$$ ← (분모)$\neq 0$, (분자)$=0$

이므로 $|f(0)|+|f(1)|=0 \ \to \ f(0)=f(1)=0$

($f(0)\neq 0$이라는 가정에 모순!)

(2) $f(0)=0$인 경우 (정답상황)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f'(x+1)}{f(x)}$의 극한을 처리하기 위해 우극한과 좌극한을 나눠서 관찰하면

$$(우):\ \lim_{x\to 0+}\frac{x\times f'(x+1)}{f(x)}=\frac{f'(1)}{f'(0)}$$

$$(좌):\ \lim_{x\to 0-}\frac{-x\times f'(x+1)}{f(x)}=-\frac{f'(1)}{f'(0)}$$

이므로 두 값이 같으려면 $f'(1)=0$이다.

즉,

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f'(x+1)}{f(x)}=0 \quad \leftarrow \ |f(1)|=0$$

: (분자)가 0으로 가는 인수가 더 많다!

따라서 $f(1)=0$이다.

(1), (2)에 의해 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는
$f(0)=f(1)=f'(1)=0$을 만족시키므로

$$f(x)=x(x-1)^2$$

이다. 따라서 $f(4)=36$이다.

$\therefore\ 36$

25

정답 ②

Step 1 주어진 항등식 변형

두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2+x^2(x-3)^2$$

이 성립하므로 원하는 형태를 만들어주기 위해 식을 변형하면
문제에서 추가로 제시한 함수 $f(x)+g(x)$의 형태를 만들자!

$$\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2+x^2(x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow\ \{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=x^2(x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow\ \{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=x^2(x-3)^2$$

이때 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 1이므로

$$f(x)+g(x)=2x^3+\cdots,$$
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x+\cdots \quad \leftarrow \text{ 계수 맞춰주기!}$$

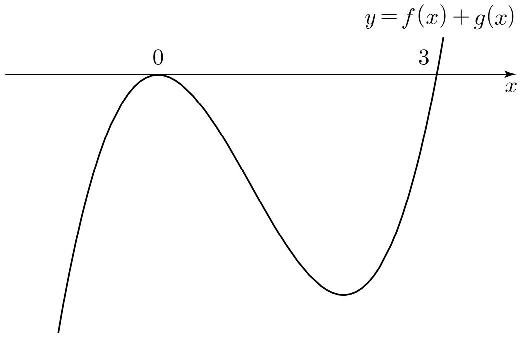
Step 2 케이스 분류를 통해 정답상황 추론

$f(x)+g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이고,

$$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=x^2(x-3)^2$$

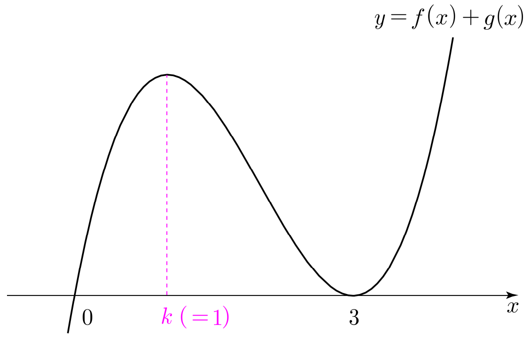
이므로 $f(x)+g(x)$가 가질 수 있는 인수에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $f(x)+g(x)=2x^2(x-3)$인 경우



함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 극대이다. 이때 문제에서 양수 k에 대하여 $x=k$에서 극대라고 했으므로 모순!

(2) $f(x)+g(x)=2x(x-3)^2$인 경우 (정답상황!)



함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 극대이다. (비율관계 활용!)
이때 문제에서 양수 k에 대하여 $x=k$에서 극대라고 했으므로
$k=1$임을 알 수 있다.

(1), (2)에 의해 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)+g(x)=2x(x-3)^2 \quad \cdots\ ㉠$$
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x \quad \cdots\ ㉡$$

를 만족시킨다. ㉠, ㉡을 연립하여 $f(x)$의 식을 구하면

$$f(x)=x(x-3)^2+\frac{1}{4}x$$

따라서 $f(1)=\dfrac{17}{4}$이다.

$\therefore\ \dfrac{17}{4}$

26

정답 ⑤

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)=x^2 f(x)$ 를 미분하면

$$g'(x)=x\{2f(x)+xf'(x)\}$$

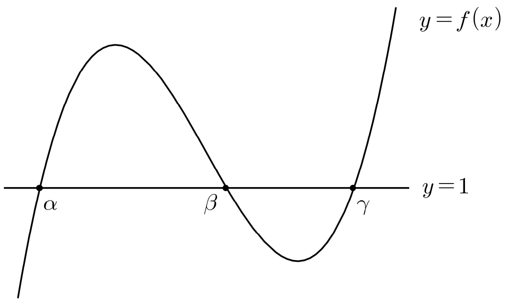
이므로

$$g'(x)=0 \iff x=0 \text{ 또는 } 2f(x)+xf'(x)=0$$

이때 집합 $A=\{x \mid f(x)=1\}$ 를 해석하기 위해 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수에 따라 케이스를 분류하자.
$n(A)\neq 1$ 이므로 2개 아니면 3개!

(1) $n(A)=3$ 인 경우

$n(A)=3$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 세 점에서 만나고, 이때 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 α, β, γ 로 두자.



이때 $A \subset \{x \mid g'(x)=0\}$ 이므로

$$g'(\alpha)=g'(\beta)=g'(\gamma)=0$$

이어야 한다. $g'(x)=0$ 이려면

$$x=0 \text{ 또는 } 2f(x)+xf'(x)=0$$

이어야 하므로 또 한 번 케이스 분류를 해보자.

① $\alpha=0$ 인 경우

$\alpha=0$ 이면 $\beta>0$, $\gamma>0$ 이다. 이때

$$\begin{aligned} g'(\gamma)&=\gamma\{2f(\gamma)+\gamma f'(\gamma)\} && \leftarrow f(\gamma)=1 \\ &=\gamma\{2+\gamma f'(\gamma)\}>0 && \leftarrow \gamma>0,\ f'(\gamma)>0 \end{aligned}$$

이므로 $g'(\gamma)\neq 0$ (모순!)

② $\beta=0$ 인 경우

$\beta=0$ 이면 $\alpha<0$, $\gamma>0$ 이다. 이때

$$\begin{aligned} g'(\gamma)&=\gamma\{2f(\gamma)+\gamma f'(\gamma)\} && \leftarrow f(\gamma)=1 \\ &=\gamma\{2+\gamma f'(\gamma)\}>0 && \leftarrow \gamma>0,\ f'(\gamma)>0 \end{aligned}$$

이므로 $g'(\gamma)\neq 0$ (모순!)

③ $\gamma=0$ 인 경우

$\gamma=0$ 이면 $\alpha<0$, $\beta<0$ 이다. 이때

$$\begin{aligned} g'(\beta)&=\beta\{2f(\beta)+\beta f'(\beta)\} && \leftarrow f(\beta)=1 \\ &=\beta\{2+\beta f'(\beta)\}<0 && \leftarrow \beta<0,\ f'(\beta)<0 \end{aligned}$$

이므로 $g'(\beta)\neq 0$ (모순!)

④ $\alpha\beta\gamma\neq 0$ 인 경우

$g'(\alpha)=g'(\beta)=g'(\gamma)=0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} g'(\alpha)&=\alpha\{2f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f(\alpha)=1 \\ &=\alpha\{2+\alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f'(\alpha)>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(\beta)&=\beta\{2f(\beta)+\beta f'(\beta)\} && \leftarrow f(\beta)=1 \\ &=\beta\{2+\beta f'(\beta)\} && \leftarrow f'(\beta)<0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(\gamma)&=\gamma\{2f(\gamma)+\gamma f'(\gamma)\} && \leftarrow f(\gamma)=1 \\ &=\gamma\{2+\gamma f'(\gamma)\} && \leftarrow f'(\gamma)>0 \end{aligned}$$

이므로 $g'(\alpha)=0$ 이려면 $\alpha<0$
$g'(\beta)=0$ 이려면 $\beta>0$
$g'(\gamma)=0$ 이려면 $\gamma<0$ (모순!)
$\alpha<\beta<\gamma$ 이기에 성립할 수 없음!

(2) $n(A)=2$ 인 경우

$n(A)=2$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(x)$ 를

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\beta)+1$$

: $x=\alpha$ 에서 접하고, $x=\beta$ 에서 만남!

로 두자.

① $\alpha = 0$ 인 경우 (정답상황!)

$\alpha = 0$ 이면 $g'(\alpha) = 0$ 이 성립하므로 $g'(\beta) = 0$ 이면 된다.

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= \beta\{2f(\beta) + \beta f'(\beta)\} && \leftarrow f(\beta) = 1 \\ &= \beta\{2 + \beta f'(\beta)\} && \leftarrow f'(\beta) = \frac{1}{4}\beta^2 \\ &= \beta\left(2 + \frac{1}{4}\beta^3\right) \end{aligned}$$

이므로 $2 + \frac{1}{4}\beta^3 = 0 \rightarrow \beta = -2$

② $\beta = 0$ 인 경우

$\beta = 0$ 이면 $g'(\beta) = 0$ 이 성립하므로 $g'(\alpha) = 0$ 이면 된다.

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \alpha\{2f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f(\alpha) = 1 \\ &= \alpha\{2 + \alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f'(\alpha) = 0 \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

이므로 $g'(\alpha) \neq 0$ (모순!)

③ $\alpha\beta \neq 0$ 인 경우

$g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$ 이어야 하지만,

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \alpha\{2f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f(\alpha) = 1 \\ &= \alpha\{2 + \alpha f'(\alpha)\} && \leftarrow f'(\alpha) = 0 \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= \beta\{2f(\beta) + \beta f'(\beta)\} && \leftarrow f(\beta) = 1 \\ &= \beta\{2 + \beta f'(\beta)\} && \leftarrow f'(\beta) = \frac{1}{4}\beta^2 \\ &= \beta\left(2 + \frac{1}{4}\beta^3\right) \end{aligned}$$

에서 $g'(\alpha) \neq 0$ (모순!)

(1), (2)에 의해 $f(x)$ 는 $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x+2) + 1$ 이므로

$f(6) = 73$ 이다.

$\therefore\ 73$

27

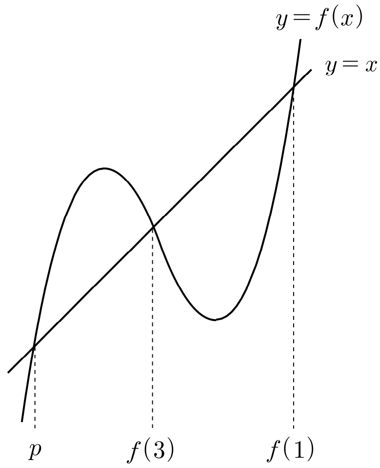
정답 ③

조건 (가)에서 방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이

p, $f(3)$, $f(1)$ 이고

$$p < f(3) < f(1)$$

이므로 대략적인 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 위치 관계는 다음과 같다.



정확한 그래프 개형은 아님! $x=1$, $x=3$ 의 위치를 생각해보면 불가능한 개형임을 알 수 있음.

조건 (나)에서 제시한 합성방정식을 해석해보자.

$$f(f(x)) = f(x)$$: 서로 다른 실근의 개수가 5

위의 합성방정식을 해석하기 위해 $f(x) = t$ 로 치환하면

① $f(t) = t$ 를 만족시키는 모든 t 의 값을 찾은 후,
② $f(x) = t$ 를 만족시키는 모든 x 의 값

을 구해줘야 한다. 이때 $f(t) = t$ 를 만족시키는 t 의 값은

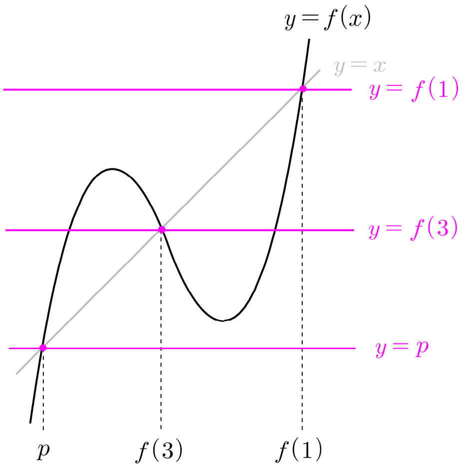
$$t = p,\ f(3),\ f(1)$$

임을 조건 (가)에 의해 알 수 있다. 그러므로 케이스를 분류하여 세 방정식

$$f(x) = p,\ f(x) = f(3),\ f(x) = f(1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되는 경우를 찾아보자.

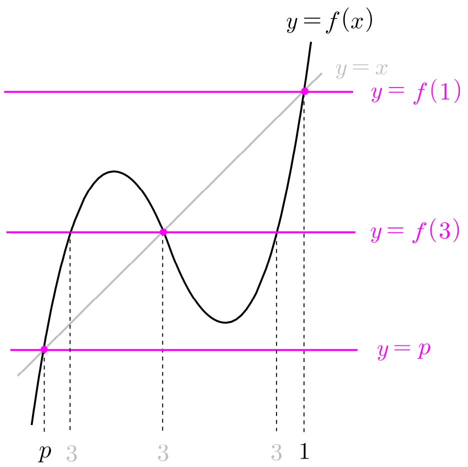
(1) $f(1) >$ (함수 $f(x)$ 의 극댓값) 인 경우



세 방정식

$$f(x)=p,\quad f(x)=f(3),\quad f(x)=f(1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 5가 될 수는 있지만, $x=1$ 과 $x=3$ 의 위치 관계를 고려해볼 때 가능한 상황이 발생하지 않으므로 모순!



어떠한 경우에도 1이 3보다 크므로 모순!

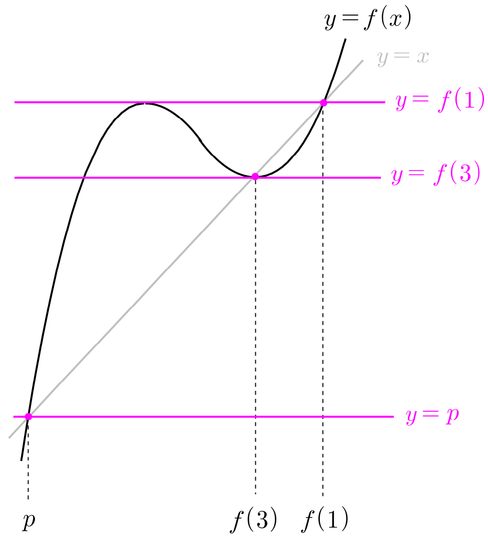
($f(3)$ 과 p 가 각각 극댓값, 극솟값이 되어도 같은 이유로 모순!)

(2) $f(1) =$ (함수 $f(x)$ 의 극댓값) 인 경우 (정답상황!)

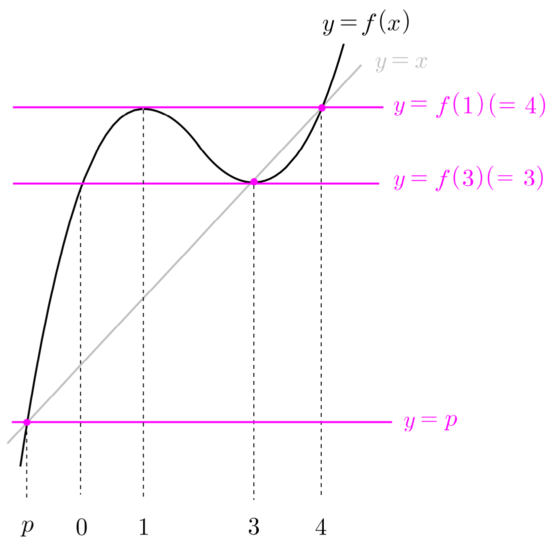
세 방정식

$$f(x)=p,\quad f(x)=f(3),\quad f(x)=f(1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 $x=1$ 과 $x=3$ 의 위치 관계를 고려해보면 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대, $x=3$ 에서 극소이어야 한다.



(비율관계로 $x=0,\ 4$ 의 위치 관계 도출 가능!)

즉, 함수 $f(x)$ 는

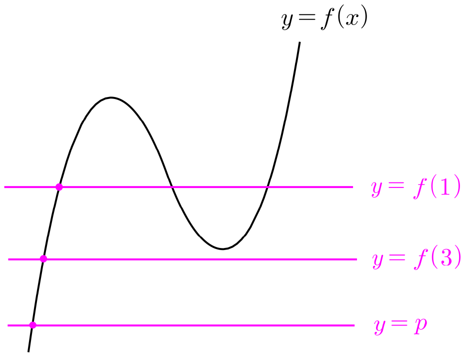
$$f(x)=mx(x-3)^2+3$$

이때 점 $(4,4)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위에 점이므로 대입해서 계산하면 $m=\dfrac{1}{4}$ 이다. p 의 값을 찾기 위해 방정식 $f(x)=x$ 의 실근을 구해보면

$$f(x)=x \iff \frac{1}{4}x(x-3)^2=x-3$$
$$\iff \frac{1}{4}(x+1)(x-3)(x-4)=0$$

이므로 $p=-1$이다.

(3) $f(1)<$ (함수 $f(x)$ 의 극댓값) 인 경우



(1)과 같은 이유로 세 방정식

$$f(x)=p,\quad f(x)=f(3),\quad f(x)=f(1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 5가 될 수는 있지만, $x=1$과 $x=3$의 위치 관계를 고려해볼 때 가능한 상황이 발생하지 않으므로 모순!
((1)과 동일한 논리로 직접 생각해볼 것.)

(1), (2), (3)에 의해

$$f(x)=\frac{1}{4}x(x-3)^2+3,\quad p=-1$$

이므로 $p+f(5)=7$이다.

$\therefore\ 7$

28

정답 95

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(|x|) & (x<1) \\ f(x-1) & (x\geq 1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (0\leq x<1) \\ f(x-1) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이다.

Step 1 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$g(x)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (0\leq x<1) \\ f(x-1) & (x\geq 1)\end{cases}$$

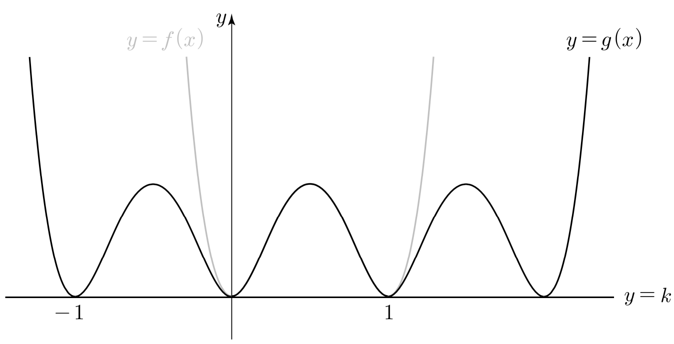
가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

① $x=0$에서 연속 : $f(0)=f(0)$
② $x=0$에서 미분가능 : $f'(0)=0$
③ $x=1$에서 연속 : $f(0)=f(1)$
④ $x=1$에서 미분가능 : $f'(0)=f'(1)$

이다. 즉, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^2(x-1)^2+k$$

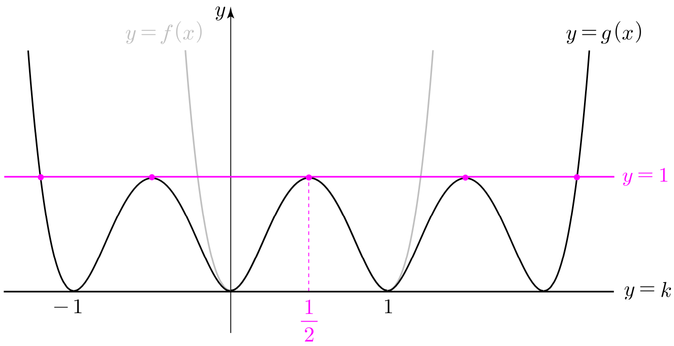
로 두자.



: 함수 $y=g(x)$의 그래프!

Step 2 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5 이다.

방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 5 이어야 한다. 즉, 다음 그림과 같이 $f(x)$ 의 극댓값이 1 이어야 한다.



(대칭성에 의해) $f(x)=x^2(x-1)^2+k$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극대이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \quad \rightarrow \quad k=\frac{15}{16}$$

즉, $f(x)$ 는 $f(x)=x^2(x-1)^2+\frac{15}{16}$ 이므로 $f(2)=\frac{79}{16}$ 이다.

따라서 $p+q=95$ 이다.

$\therefore\ 95$

29

정답 80

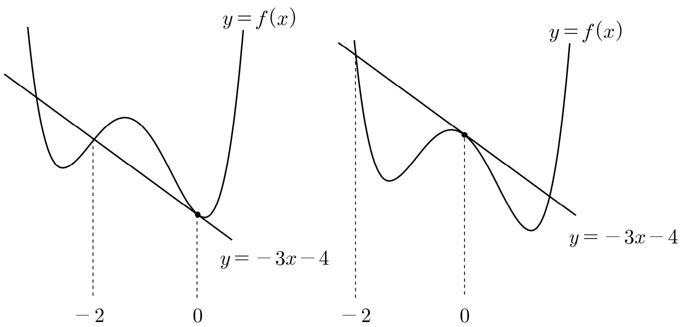
Step 1 함수 $f(x)$ 식 세우기

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(-2)=2,\quad f(0)=-4,\quad f'(0)=-3$$

두 점을 지나는 직선의 기울기가 -3 !

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선이 점 $(-2, f(2))$ 를 지난다는 사실을 알 수 있다.



둘 중에 어느 그래프인지는 알 수 없음!

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=-3x-4$ 와 $x=0$ 에서 접하고, $x=-2$ 에서 만나므로

$$f(x)=ax^2(x+2)(x-b)-3x-4$$

로 두자.

Step 2 방정식 $|f(x)+x|=f(x)+5x+k$ 해석

주어진 방정식의 형태를 변형하면

$$\begin{aligned} & |f(x)+x|=f(x)+5x+k \\ \Leftrightarrow\ & x=5x+k \quad \text{또는} \quad -f(x)-x=f(x)+5x+k \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{k}{4} \quad \text{또는} \quad f(x)=-3x-\frac{k}{2} \end{aligned}$$

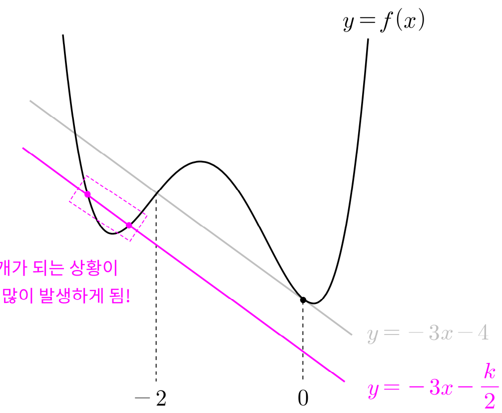
이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 k 의 값이 $k=8,\ 12$ 뿐임을 활용해보자.

(1) $k=8,\ 12$ 뿐이기 위한 상황 관찰

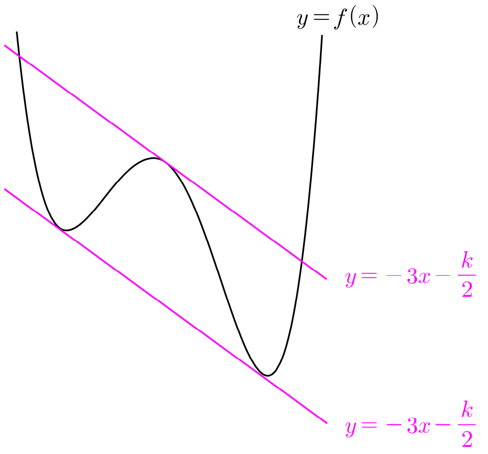
방정식의 동치변형을 통해 우리는 문제에서 주어진 방정식은 곧,

$$x=-\frac{k}{4} \quad \text{또는} \quad f(x)=-3x-\frac{k}{2} \qquad \cdots ㉠$$

과 동일함을 이끌어냈다. 이때 $x=-\frac{k}{4}$ 는 고정된 실근으로 k 의 값에 관계없이 항상 실근 1 개를 보장한다. 즉, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 2 이면 된다. 다만, 주의할 것은 방정식 ㉠의 실근에 $x=-\frac{k}{4}$ 가 포함되어 있다면, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 3 이어야 한다.



위의 그림과 같이 기울기가 -3 인 직선과 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2 가 되는 상황이 무수히 많이 발생하면 안되기에 기울기가 -3 인 직선과 접하는 상황에서 공통접선이 발생해야만 한다! (그림 참고!)

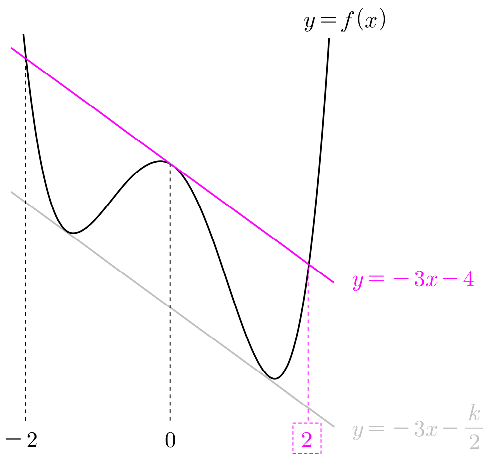


(2) $k=8$ 일 때의 상황 관찰

$k=8$ 일 때의 상황을 관찰하면

$$x=-2 \quad \text{또는} \quad f(x)=-3x-4$$

을 만족시키는 x 의 개수가 3 이어야 한다. 이때 우린 이미 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=-3x-4$ 와 $x=0$ 에서 접하고, $x=-2$ (겹친다!)에서 만난다는 사실을 알고 있고, -2, 0 이 아닌 곳에서 교점 1 개가 더 발생해야 하므로 직선 $y=-3x-4$ 는 공통접선이 아니어야 한다.



대칭성으로 인해 교점의 x좌표가 2이다!

대칭성으로 인해 나머지 교점의 x 좌표가 2 임을 알 수 있다.

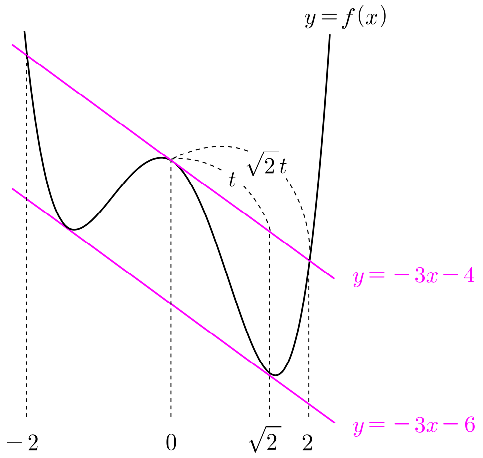
즉, $f(x)=ax^2(x+2)(x-2)-3x-4$ 이다.

(3) $k=12$ 일 때의 상황 관찰

$k=12$ 일 때의 상황을 관찰하면

$$x=-3 \quad \text{또는} \quad f(x)=-3x-6$$

을 만족시키는 x 의 개수가 3 이어야 한다. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-3x-6$ 이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 직선 $y=-3x-6$ 이 공통접선임을 알 수 있다.



사차함수 비율관계$(1:\sqrt{2})$에 의해 공통접선의 접점의 x 좌표는 $\sqrt{2}$ 이므로

$$f(\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}-6 \ \rightarrow \ a=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x+2)(x-2)-3x-4$$

이므로 $f(4)=80$ 이다.

$\therefore$ 80

30

정답 50

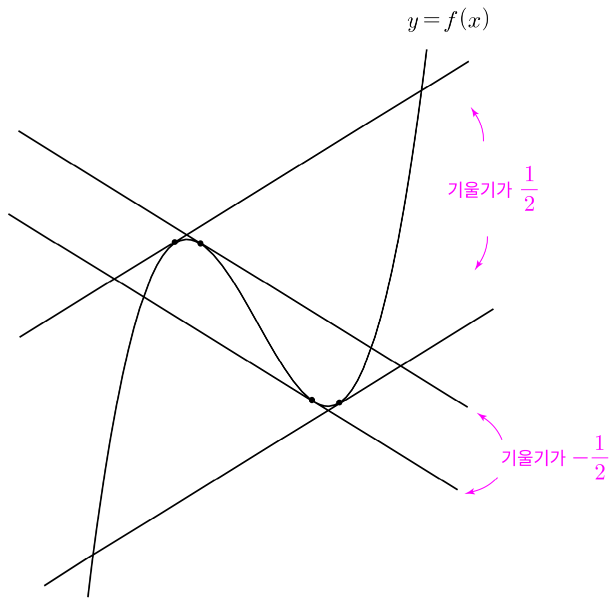
Step 1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선이 접하는 상황 관찰

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여

$g(t)$: $y=f(x)$와 $y=\frac{1}{2}x+t$의 교점의 개수

$h(t)$: $y=f(x)$와 $y=-\frac{1}{2}x+t$의 교점의 개수

이때 조건 (가)와 (나)에서 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 불연속이 되는 지점에 대한 정보를 제공하고 있고, 불연속이 되는 순간은 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+t$, $y=-\frac{1}{2}x+t$이 각각 접할 때이므로 $y=f(x)$의 그래프와 기울기가 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$인 직선이 접하는 순간을 먼저 관찰해보자.



Step 2 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모두 $t=0$에서 불연속이다.

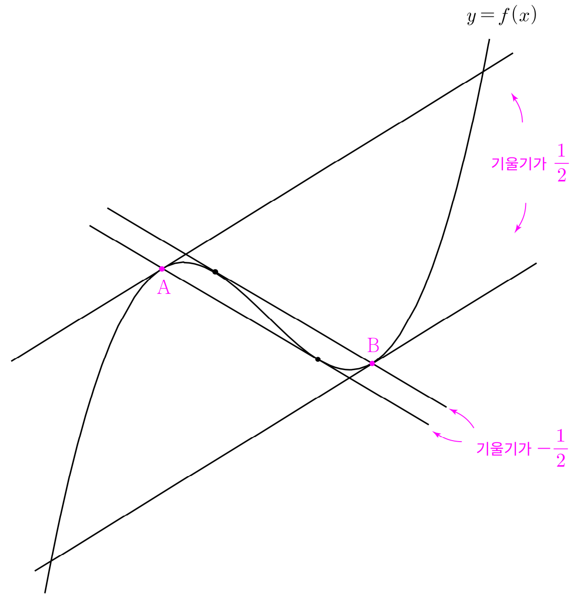
조건 (가)와 (나)에서

$g(t)$: $t=0$, $t=a$에서 불연속!

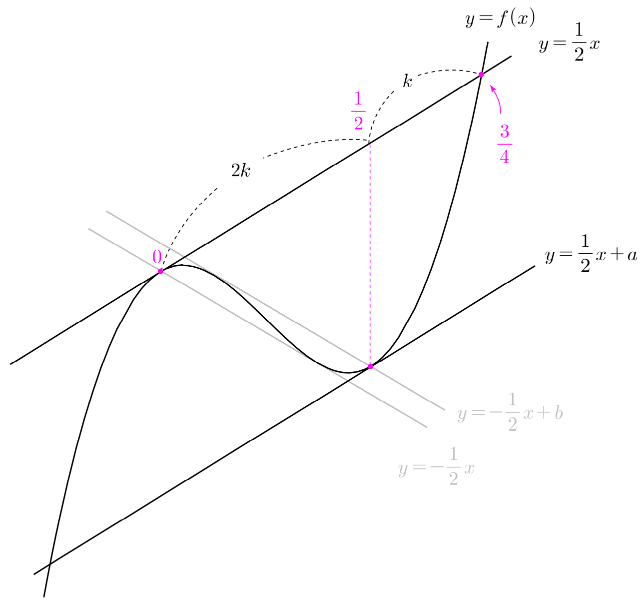
$h(t)$: $t=0$, $t=b$에서 불연속!

이므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모두 $t=0$에서 동시에 불연속이다.

즉, $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$와 접하고, 주어진 조건에 의해 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$은 모두 원점을 지난다는 사실에 주목해 그래프 개형을 추론해보자.



그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$이 모두 지나는 두 점 A, B 중 하나가 원점이다. 이때 만약 B가 원점 $B(0,0)$이라면 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$임을 만족시킬 수 없으므로 점 A가 원점 $A(0,0)$이 되고 점 B의 좌표가 $B\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$이 된다.



삼차함수 비율관계를 통해 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 $x=0$에서 접하고, $x=\frac{3}{4}$에서 만난다는 사실 도출 가능!

Step 3 함수 $f(x)$ 식 세운 후, a, b 의 값 구하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 $x=0$ 에서 접하고, $x=\frac{3}{4}$ 에서 만났으므로

$$f(x)-\frac{1}{2}x=mx^2\left(x-\frac{3}{4}\right) \rightarrow f(x)=mx^2\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}x$$

로 둘 수 있다. 이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 도 접했으므로

$$f(x)=-\frac{1}{2}x \Leftrightarrow mx^2\left(x-\frac{3}{4}\right)+x=0$$

$x=0$ 을 근으로 확보했으니, 나누기!

$$\Leftrightarrow mx\left(x-\frac{3}{4}\right)+1=0$$

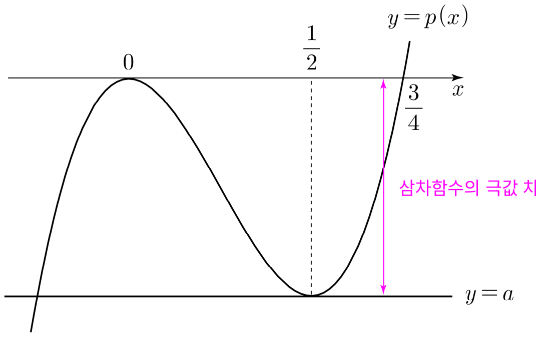
이 중근을 가져야 한다. 이차방정식 $mx^2-\frac{3}{4}mx+1=0$ 이 중근을 가져야 하므로 판별식을 활용하면

$$D=0 \rightarrow m=\frac{64}{9}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=\frac{64}{9}x^2\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}x$ 이다.

(1) a 의 값을 구하는 방법? → 삼차함수의 극값의 차 활용!

함수 $p(x)$ 를 $p(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$ 로 두면 $y=p(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

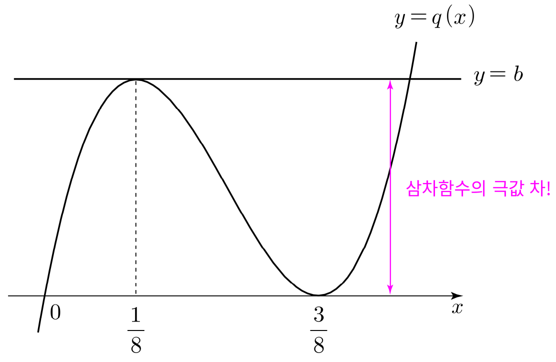


삼차함수의 극값 차 공식을 활용하면

$$0-a=\frac{\left|\frac{64}{9}\right|}{2}\times\left(\frac{1}{2}-0\right)^3 \rightarrow a=-\frac{4}{9}$$

(2) b 의 값 구하는 방법? → 삼차함수의 극값의 차 활용!

함수 $q(x)$ 를 $q(x)=f(x)+\frac{1}{2}x$ 로 두면 $y=q(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



: 세 실근의 합은 같다는 삼차함수의 성질을 활용하여 접하는 점의 x 좌표가 $\frac{3}{8}$ 임을 도출할 수 있음!

삼차함수의 극값 차 공식을 활용하면

$$b-0=\frac{\left|\frac{64}{9}\right|}{2}\times\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)^3 \rightarrow b=\frac{1}{18}$$

따라서 $a=-\frac{4}{9}$, $b=\frac{1}{18}$ 이므로 $100(b-a)=50$ 이다.

$\therefore$ 50