제 2 교시

2026학년도 대학수학능력시험 대비 응애 모의고사 1회 문제지

수학 영역

손해설

성명		수험 번호						—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

녹이 슨 심장에 쉼 없이 피는 꿈

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}\times 4^{1+\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$4^{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}\times 4^{1+\sqrt{3}}=4^{(\frac{1}{2}-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}$

$=4^{\frac{3}{2}}$

$=8.$

2. 함수 $f(x)=2x^3-x+1$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{2(1+h)^3-h\}-2}{h}.$

$=\lim\limits_{h\to0}(2h^2+6h+5)$

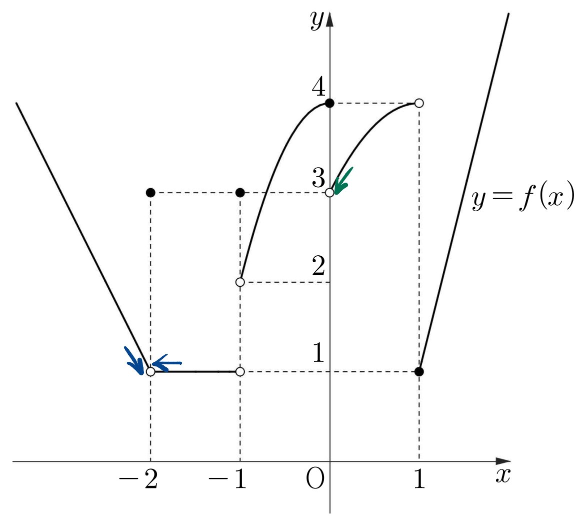
$=5.$

3. 네 수 6, a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$a-6=14-b.$ $\therefore a+b=20.$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -2}f(x)+\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=1.$ $\therefore \lim\limits_{x\to-2}f(x)=1.$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=3.$

$\lim\limits_{x\to-2}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1+3=4.$

5. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4x^2 + x \cdots (*)$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 9 ② 13 ③ 17 ④ 21 ⑤ 25

$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x).$

$= \frac{d}{dx}(4x^2+x).$

$= 8x+1$ $\therefore f(2)=17.$

(*)에 무지성 $x=0$ 대입 X...

6. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\underline{\tan^2\theta - 3\tan\theta + 1 = 0}$일 때, $\cdots(*)$
$\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

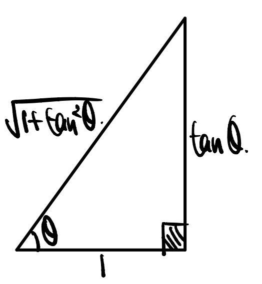
sol 1> $\tan\theta \neq 0.$

$\tan\theta - 3 + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 3$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - 3 = 0.$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}.$

sol 2>



$\sin\theta\cos\theta = \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$

$= \frac{1}{3}.$

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ를 썼지만 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 θ에 대해서도 yes.

(*)의 양변에 $\cos^2\theta$를 곱해도 good.

$\tan\theta$를 직접 구할 수도 있지만...

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3+2)f(x)-5}{x-1} = 8$$

일 때, $f'(1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

(분모) → 0. 수렴

∴ (분자) → 0. $3f(1)=5.$

$\{(x^3+2)f(x)\}'|_{x=1} = 3f(1)+3f'(1)$

$= 5+3f'(1) = 8.$ $\therefore f'(1)=1.$

8. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2^{x-1}) = \log_2(x^2+1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)-f(2)+f(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ $\log_2 6$ ④ 3 ⑤ $\log_2 10$

$x=1.\ f(1)=\log_2 2.$

$x=2,\ f(2)=\log_2 5.$

$x=3,\ f(4)=\log_2 10.$

$\therefore f(1)-f(2)+f(4)=\log_2 2-\log_2 5+\log_2 10$

$=2.$

9. 함수 $f(x)=3x^2-4x+2$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx - \int_{-2}^{0}\{f(x)-x\}\,dx = 2$$

를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_{-2}^{a} f(x)dx-\int_{-2}^{0}\{f(x)-x\}dx=\left\{\int_{-2}^{a} f(x)dx-\int_{-2}^{0} f(x)dx\right\}+\int_{-2}^{0} x\,dx.$

$=\int_{0}^{a} f(x)dx-2$

$=(a^3-2a^2+2a)-2=2.$

$a^3-2a^2+2a-4=(a-2)(a^2+2)=0.$

$\therefore a=2.$

10. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{20} a_k = 7}_{=A.},\quad \underbrace{\sum_{k=1}^{10} 2k a_{2k-1} = 44}_{=B.},\quad \underbrace{\sum_{k=1}^{10} (2k+1)a_{2k} = 33}_{=C.}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)a_k$의 값은? [4점]

① 126 ② 133 ③ 140 ④ 147 ⑤ 154

$B+C=\sum_{k=1}^{10} 2k a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}(2k+1)a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}\{2k a_{2k-1}+(2k+1)a_{2k}\}$

$=\sum_{k=1}^{20}(k+1)a_k=77.$ 항 직접 전부 나열해서 얻어도 good.

$\therefore \sum_{k=1}^{20}(2k+1)a_k=2\times\sum_{k=1}^{20}(k+1)a_k-\sum_{k=1}^{20}a_k.$

$=2(B+C)-A$

$=147.$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2t^2-6t+3$$

이다. 출발한 후 점 P가 두 번째로 원점을 지나는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

위치. $x(t)=\frac{2}{3}t^3-3t^2+3t=\frac{1}{3}t(2t^2-9t+9)$.

가속도. $a(t)=4t-6$.

$t>0$에서 $x(t)=0$. $t=\frac{3}{2}, 3$.

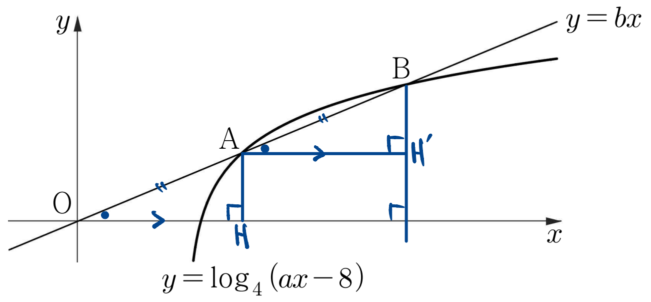
출발한 "후"...

그러진 않겠지만 $t\in\mathbb{R}$이나 $t\geq 0$으로 읽으면 곤란...!

$\therefore a(3)=6$.

12. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=\log_4(ax-8)$과 직선 $y=bx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중 x좌표가 작은 것을 A, 큰 것을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



점 A에서 x축에 내린 수선의 발 H.

점 B를 지나고 x축에 수직인 직선에 내린 수선의 발 H'.

$\triangle OAH \equiv \triangle ABH'$.

$\therefore$ A x좌표 k. $\Rightarrow$ B x좌표 $2k$.

A y좌표. $\log_4(ak-8)=bk$. $=1$.

B y좌표. $\log_4(2ak-8)=2bk$.

$2\times\log_4(ak-8)=\log_4(2ak-8)$.

$(ak-8)^2=(ak)^2-16ak+64=2ak-8$. $(ak)^2-18ak+72=0$.

$\therefore ak=12$ ($\because ak>8$). $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}=12$.

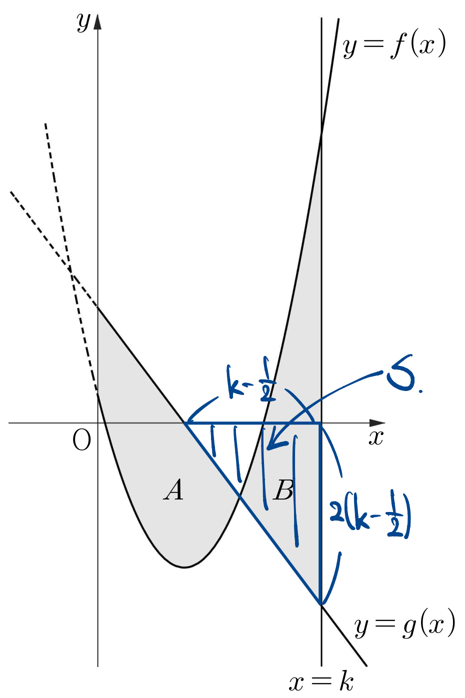
x좌표 직접 구할 필요 X.

13. $x \geq 0$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = 6x^2 - 6x + \frac{1}{4}, \quad g(x) = -2x + 1$$

이 있다. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 상수 $k\,(k > 1)$에 대하여 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프와 직선 $x = k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.
$A = B$일 때, 함수 $y = g(x)$의 그래프와 직선 $x = k$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점] $=S$.

① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{13}{16}$



A=B.

$\int_0^k \{(6x^2-6x+\frac{1}{4})-(-2x+1)\}dx=0.$ 이상하게 쪼개고 그러지 말고...

$2k^3-2k^2-\frac{3}{4}k=0.$ $k^2-k-\frac{3}{8}=0.$

$\therefore S=(k-\frac{1}{2})^2.$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$ k를 "직접" 구할 필요가...

14. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$과 두 자연수 p, $q\,(p < q)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $(q-p)+\sum_{k=1}^{50} a_k$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n + 2 & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

이다.

(나) $\sum_{k=1}^{p} a_k = \sum_{k=1}^{q} a_k = 44$이고 $20 < p+q < 25$이다.

① 85 ② 86 ③ 87 ④ 88 ⑤ 89

ex... $a_1=10.$

$\{a_n\}$: 10. 8. 6. 4. 2. 0. -2. 4. 2. 0. -2. 4. ...

$a_1=9.$

$\{a_n\}$: 9. 7. 5. 3. 1. -1. 3. 1. -1. 3. ...

$\therefore a_1=a.$

$\{a_n\}$: a. a-2. ... < 3. 1. -1. 3. 1. -1. ... (a 홀수) / 4. 2. 0. -2. 4. 2. 0. -2 ... (a 짝수).

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$...

i) a가 홀수. ; ex... $a_1=9.$

$\{S_n\}$: 9. 16. 21. 24. 25. 24. 27. 28. 27. ...

$\therefore q=p+2.$ $a_p=3.$ $a_q=-1.$

$(p.q)=(10.12). (11.13).$ S_{11}까지는 확인.

$n \geq \frac{a-3}{2}$일 때 $S_{n+3}=S_n+3.$

$p \geq \frac{a-3}{2}.$ $a_{\frac{a-3}{2}+1}=3.$

$a_1=9.$ $S_5=25.$ $S_{11}=31.$ $44-31>3.$ x.

$a_1=11.$ $S_5=35.$ $S_{14}=44.$ x. 실제 $(p.q)=(14.16).$

$a_1=13.$ $S_5=45.$ $S_6=48.$ $48-44>3.$ x.

$a_1 \geq 15$일 때 $S_5>50.$

$a_1 \leq 7$일 때 $S_{11}<30.$ x.

이어서.

ii) a가 짝수 ; ex... $a_1=10$.

$\{S_n\}$: 10. 18. $\underline{24.\ 28.\ 30.\ 30.\ 28.\ 32.\ 34.\ 34.\ 32.}$ ...

$\therefore$ $q=p+1$, $a_p=2$, $a_q=0$.

or $q=p+3$, $a_p=4$, $a_q=-2$

$(p,q)=(9,12), (10,11), (10,13), (11,12)$. $S_9 \sim S_{13}$ 확인...

$n \geq \frac{a}{2}-2$일 때 $S_{n+4}-S_n=4$.

$p \geq \frac{a}{2}-2$. $a_{\frac{a}{2}-1}=4$.

$a_1=10$. $S_9=34$. $S_{13}=38$. x. 실제 $(p,q)=(20,23)$.

$a_1=12$. $S_5=40$. $S_9=44$...!

$a_9=a_5=4$. $a_{12}=-2$.

$a_1 \geq 14$일 때 $S_5 \geq 50$.

$a_1 \leq 8$일 때 $S_{13}<38$. x.

$\therefore$ $p=9$, $q=12$.

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = 40+\sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$=40+(44+2)=86.$$

$$(q-p)+\sum_{k=1}^{50} a_k=89.$$

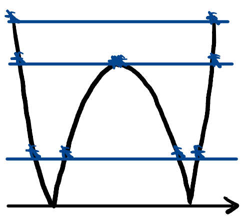
15. 최고차항의 계수가 1이고 $x=a\,(0<a<3)$에서 최솟값을 갖는 이차함수 $f(x)$와 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$(|x^2-4|-t)\{f(x)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=5$에서만 불연속일 때, $f(5)+g(5)$의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$|x^2-4|-t=0$. $|x^2-4|=t$ 서로 다른 실근 개수 $h_1(t)$



$$h_1(t)=\begin{cases}4 & (0<t<4)\\ 3 & (t=4)\\ 2 & (t>4).\end{cases}$$ $t=4$에서 불연속

$f(x)=t$ 서로 다른 실근 개수 $h_2(t)$. f 최소 m.

g. $t=4$에서 연속이려면 못해도 h_2가 $t=4$에서 "늘어나야"...

$m\le 0$. 모든 양수 t에 대하여 $h_2(t)=2$.

$m>0$. $$h_2(t)=\begin{cases}0 & (0<t<m)\\ 1 & (t=m)\\ 2 & (t>m)\end{cases}$$ $\therefore m=4$

$f(x)=(x-a)^2+4$ $(0<a<3)$.

g. $t=5$에서 불연속 $\therefore x^2-4=f(x)=5$인 실수 x 존재.

$x=-3$. $(3+a)^2>9$ X.

$x=3$. $(3-a)^2+4=5$. $a=2$. $\therefore f(x)=(x-2)^2+4$

$f(x)=5$. $x=1, 3$.
$x^2-4=5$. $x=\pm 3$. $g(5)=3$.

$\therefore f(5)+g(5)=16$.

단답형

16. 함수 $f(x)=6\sin x+5$의 최댓값을 구하시오. [3점] 11.

최대. $6+5=11$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2$이고 $f(1)=3$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점] 33.

sol 1>

$f(x)=\int f'(x)dx$
$=x^3+2x$. $(\because f(1)=3)$

$\therefore f(3)=33$.

sol 2>

$f(3)-f(1)=\int_1^3 (3x^2+2)dx$
$=x^3+2x\Big|_1^3=30$. $\therefore f(3)=33$.

18. 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_3 - a_1 = 2, \quad \frac{S_2}{a_2} = \frac{4}{3}$$

일 때, S_6의 값을 구하시오. [3점] 91

$a_n = ar^{n-1}$. $(ar \neq 0)$.

$a_3 - a_1 = ar^2 - a = 2$.

$\frac{S_2}{a_2} = \frac{1+r}{r} = \frac{4}{3}$.

$\therefore r = 3$, $a = \frac{1}{4}$. $a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$.

$S_6 = \frac{\frac{1}{4}(3^6 - 1)}{3-1} = 91$.

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x+2) - f(4)}{f(x)} = -1$$

일 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [3점] 48

(분자)→0. 극한이 0이 아닌 값으로 수렴

$\therefore$ (분모)→0. $f(2) = 0$.

$f(x) = (x-2)(x-a)$.

$f(x+2) - f(4) = x(x+2-a) - 2(4-a)$.

$= x^2 - (a-2)x + 2(a-4)$

$= (x-2)(x-a+4)$.

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x+2) - f(4)}{f(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-a+4)}{\cancel{(x-2)}(x-a)}$

$= \frac{6-a}{2-a} = -1$. $a = 4$.

$\therefore f(x) = (x-2)(x-4)$. $f(10) = 48$.

20. 실수 a와 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n = \{x \mid x^n = n^2 - 7n + a, \ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. $A_4 = \varnothing$, $A_3 \cap A_6 \neq \varnothing$을 만족시키는 a의 값을 구하시오. [4점] 10.

$A_4 = \varnothing$; $n = 4$. $x^4 = a - 12$ 실근 존재 X.

$\therefore a < 12$. ✓

$A_3 \cap A_6 \neq \varnothing$; $n = 3$. $x^3 = a - 12 < 0$. $x < 0$.

$n = 6$. $x^6 = a - 6$의 실근 존재. $\therefore a \geq 6$.

$a-6$의 여섯제곱근 중 음수인 것. 세제곱하면 $a-12$.

$\therefore (a-12)^2 = a - 6$. $a^2 - 25a + 150 = 0$.

$\therefore a = 10$.

21. 자연수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-ax^2+x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+1)$의 값을 구하시오. [4점] 30

> 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수와
> 점 $(0,\ 3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는
> 같지 않다.

f의 $(t,\ f(t))$에서 접선. $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

y절편. $-tf'(t)+f(t)=-2t^3+at^2$.

t에 대한 방정식 ($-2t^3+at^2=2$의 서로 다른 실근 개수)

$\neq$ ($-2t^3+at^2=3$의 서로 다른 실근 개수)

$g(t)=-2t^3+at^2$. $t=0$에서 극소 0.

$t=\frac{a}{3}$에서 극대 $2<\frac{a^3}{27}\leq 3$. $\therefore a=4$.

$f(a+1)=(a+1)^3-a(a+1)^2+(a+1)$

$=(a+1)(a+2)\big|_{a=4}=30$.

"변곡접선"이나 '접선의 개수'도 괜찮지만...

Q. 접선 일치하면 어떡함?

A. "$t_1\neq t_2$인 두 실수 $t_1,\ t_2$에 대하여 $\underline{f'(t_1)=f'(t_2)}$. $\underline{f(t_1)-t_1f'(t_1)=f(t_2)-t_2f'(t_2)}$"...

$\underline{f'(t_1)=f'(t_2)}$.

$3t_1^2-2at_1+1=3t_2^2-2at_2+1$. $\therefore 3(t_1+t_2)=2a$.

$\underline{f(t_1)-t_1f'(t_1)=f(t_2)-t_2f'(t_2)}$.

$-2t_1^3+at_1^2=-2t_2^3+at_2^2$.

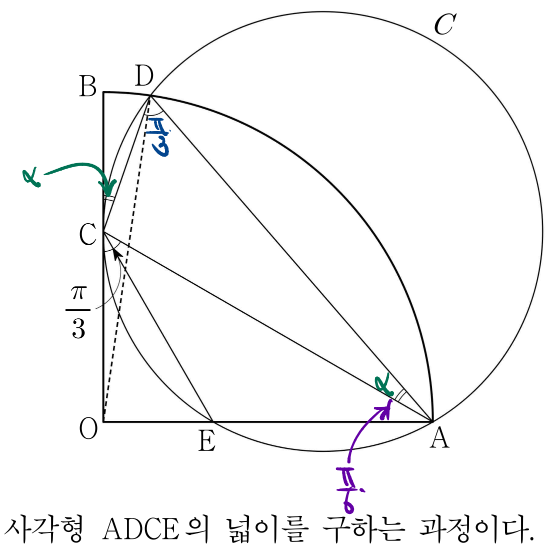
$4t_1^3-2at_1^2=4t_1^3-3(t_1+t_2)t_1^2=t_1^3-3t_1^2t_2$

$=t_2^3-3t_2^2t_1$.

$(t_1^3-t_2^3)-3t_1t_2(t_1-t_2)=(t_1-t_2)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)-3t_1t_2(t_1-t_2)$

$=(t_1-t_2)^3\neq 0$. $\therefore$ 일치하는 경우 ×.

22. 그림과 같이 반지름의 길이가 3이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위의 점 C를 $\angle\mathrm{OCA}=\frac{\pi}{3}$가 되도록 잡고, 점 A를 지나고 점 C에서 선분 OB에 접하는 원 C가 호 AB, 선분 OA와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 D, E라 하자.



다음은 사각형 ADCE의 넓이를 구하는 과정이다.

> 사각형 ADCE의 넓이는 두 삼각형 ADC, ACE의 넓이의 합과 같다.
> $\underline{\angle\mathrm{CDA}=\angle\mathrm{OCA}}$이므로 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여 원 C의 반지름의 길이는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> $\underline{\angle\mathrm{DCB}=\underset{=\alpha}{\angle\mathrm{DAC}},\ 0<\angle\mathrm{DCB}<\frac{\pi}{3}}$이고 $\overline{\mathrm{OD}}=3$이므로 (*)
> 삼각형 ODC에서 코사인법칙에 의하여
> $$\overline{\mathrm{CD}}=\boxed{\text{(가)}}\times 2\sin(\angle\mathrm{DCB})=\boxed{\text{(나)}}$$
> 이다.
> 한편 $\underline{\angle\mathrm{CAE}=\frac{\pi}{6},\ \angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{AEC}=\pi}$이므로
> 사각형 ADCE의 넓이는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $\underset{}{\overset{2}{p}}$, $\overset{\frac{2}{9}\sqrt{21}}{q}$, $\overset{\frac{16}{9}\sqrt{3}}{r}$이라 할 때, $\left(\frac{p^2\times q^2}{r}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점] 3

$\triangle$ADC에서 사인법칙. $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2p$ ... $=4$. $p=2$.

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3}$. $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$. ✓

이어서.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\angle DCB=\angle DAC=\alpha$. $\overline{CD}=4\sin\alpha$.

$\triangle ODC$에서 코사인법칙. $\overline{CD}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{OC}\times\cos(\pi-\alpha)=\overline{OD}^2$.

(나) sol 1> $16\sin^2\alpha+3+8\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha=9$.

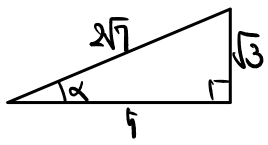
∴ $8\sin^2\alpha+4\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha-3$

$=8\sin^2\alpha+4\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha-3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$=5\sin^2\alpha+4\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$

$=(5\sin\alpha-\sqrt3\cos\alpha)(\sin\alpha+\sqrt3\cos\alpha)=0$.

∴ $5\sin\alpha=\sqrt3\cos\alpha$. (∵ (*)).



$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}$. $\overline{CD}=\frac{2\sqrt3}{\sqrt7}=q$.

(나) sol 1-1> $8\sin^2\alpha+4\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha-3=0$.

$8\sin^2\alpha-3=-4\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha$

$64\sin^4\alpha-48\sin^2\alpha+9=48\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

$=48\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$112\sin^4\alpha-96\sin^2\alpha+9=(4\sin^2\alpha-3)(28\sin^2\alpha-3)=0$.

∴ $\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2\sqrt7}$ (∵ (*) $\Rightarrow 0<\sin\alpha<\frac{\sqrt3}{2}$) …

(나) sol 2> $\overline{CD}=4\sin\alpha=x$.

$x^2+3+(2\sqrt3\cos\alpha)x=9$. $6-x^2=(2\sqrt3\cos\alpha)x$.

$(6-x^2)^2=(12\cos^2\alpha)x^2$.

$x^4-12x^2+36=(12-12\sin^2\alpha)x^2$.

$=(12-\frac34x^2)\cdot x^2$.

$7x^4-96x^2+144=(7x^2-12)(x^2-12)=0$.

$x^2=12$. $6-x^2=(2\sqrt3\cos\alpha)x=-6<0$. X …

(또는 $\sin^2\alpha=\frac34$.)

______. D=A. D의 정의에 모순.

$\triangle ADC$에서 코사인법칙. $\overline{AD}=y$.

$\overline{AD}$ sol 1> $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cdot\cos(\angle CDA)=\overline{AC}^2$ (**)

∴ $y^2-\frac{2\sqrt3}{\sqrt7}y+\frac{12}{7}=12$.

$y^2-\frac{2\sqrt3}{\sqrt7}y-\frac{72}{7}=\left(y-\frac{6\sqrt3}{\sqrt7}\right)\left(y+\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}\right)=0$. $y=\frac{6\sqrt3}{\sqrt7}$.

(**)에서 양변을 $\overline{CD}^2$으로 나누고

$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=3$을 얻어도 good.

$\overline{AD}$ sol 2> $\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle DAC)=\overline{CD}^2$.

∴ $y^2-\frac{10\sqrt3}{\sqrt7}y+12=\frac{12}{7}$

$y^2-\frac{10\sqrt3}{\sqrt7}y+\frac{72}{7}=\left(y-\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}\right)\left(y-\frac{6\sqrt3}{\sqrt7}\right)=0$.

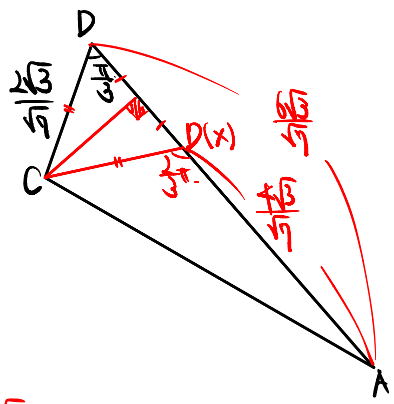
$y=\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}$ or $y=\frac{6\sqrt3}{\sqrt7}$.

$y=\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}$일 때

$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\overline{AC}^2=\frac{48}{7}+\frac{12}{7}-12<0$. $\angle CDA>\frac{\pi}{2}$. X.

$=\frac23\pi$.

∴ $y=\frac{6\sqrt3}{\sqrt7}$.



$\overline{AD}=\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}$일 때 $r=\frac{13}{7}\sqrt3$.

$\triangle ACE$에서 사인법칙. $\overline{CE}=2p\times\sin\frac{\pi}{6}=2$.

$\angle AEC=\pi-\angle CDA=\frac23\pi$. $\angle ACE=\frac{\pi}{6}$ $\overline{AE}=2$.

∴ $r=\frac12\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac12\times\overline{AE}\times\overline{CE}\times\sin\frac23\pi$

$=\frac{16}{7}\sqrt3$.

$\left(\frac{p^2\times q^2}{r}\right)^2=3$.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan(\alpha+\beta)$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

$= \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2\cdot\frac{1}{3}}$

$= 7.$

24. $\int_{e}^{e^4} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\ln 2$ ④ 1 ⑤ $2\ln 2$

$\ln x = t.$

$\int_{e}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{t}\, dt.$

$= \ln t \Big|_{1}^{4}$

$= 2\ln 2.$

25. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+a_n}-\sqrt{n\times a_n}\right)=\frac{3}{2}$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$a_n = pn+q.$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+a_n}-\sqrt{n\times a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+a_n)-(n\times a_n)}{\sqrt{4n^2+a_n}+\sqrt{n\times a_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p)n^2+(p-q)n+q}{\sqrt{4n^2+pn+q}+\sqrt{pn^2+qn}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-p)n+(p-q)+\frac{q}{n}}{\sqrt{4+\frac{p}{n}+\frac{q}{n^2}}+\sqrt{p+\frac{q}{n}}}.$$

수렴. $p=4.$

$\rightarrow \dfrac{4-q}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}.$ $q=-2.$

$\therefore a_n=4n-2.$ $a_5=18.$

26. 함수 $f(x)=\sqrt{4\sin x+5}+ax$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{\sqrt{4\sin x+5}}+a\geq 0\ldots$$

$$f''(x)=\frac{(-2\sin x)\cdot\sqrt{4\sin x+5}-2\cos x\cdot\frac{2\cos x}{\sqrt{4\sin x+5}}}{4\sin x+5}=0.$$

$\sin x(4\sin x+5)+2\cos^2 x$

$=2\sin^2 x+5\sin x+2=0.$ $\sin x=-\frac{1}{2}\ldots$ V.

$\therefore f'$ 최소. $\sin x=-\frac{1}{2}.$ $\cos x<0$일 때 $(\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots)$

$\cos x>0$일 때 f'값은 구할 필요 X.

$=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+a\geq 0.$ $a\geq 1.$

a 최소 1.

27. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 양수 t에 대하여 $x=0$에서 $x=t$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $f(t)-e^{-t}$이다.

$x=0$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이를 k라 할 때, $f(0)+k$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2+2e-1}{2e}$ ② $\frac{(e+1)^2}{2e}$ ③ $\frac{e^2-1}{2e}$ ④ $\frac{e^2+1}{2e}$ ⑤ $\frac{e^2-2e-1}{2e}$

$t>0$. $\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = f(t)-e^{-t}$. … (*).

$k=f(1)-\frac{1}{e}$ … 설마 k를 $k=\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$로 구한다거나…?

(*)을 미분. $\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}=f'(t)+e^{-t}$.

$1+\{f'(t)\}^2=\{f'(t)+e^{-t}\}^2=\{f'(t)\}^2+2f'(t)e^{-t}+e^{-2t}$.

∴ $f'(t)=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. $f(t)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+C$. $(t>0)$. … (**)

(*), (**)에 $t\to 0+$.

$0=f(0)-1=(1+C)-1$. $f(0)=1$. $C=0$.

∴ $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(x\ge 0)$. $k=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

$f(0)+k=\frac{e^2+2e-1}{2e}$.

28. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\ln x & (0<x<1) \\ \frac{e\ln x}{x} & (x\ge 1)\end{cases}$$

와 $t>1$인 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 1보다 작은 점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\frac{g'(e)}{g(e)-e}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{e^3}$ ② $\frac{2}{e^3}$ ③ $\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{2}{e^2}$ ⑤ $\frac{1}{e}$

직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$가 점 $(g(t), f(g(t)))$를 지남.

∴ $f(g(t))=f'(t)\{g(t)-t\}+f(t)$. $(t>1,\ 0<g(t)<1)$ V

미분. $f'(g(t))g'(t)=f''(t)\{g(t)-t\}+f'(t)\{g'(t)-1\}+f'(t)$.

$=f''(t)\{g(t)-t\}+f'(t)g'(t)$.

$g'(t)\{f'(g(t))-f'(t)\}=f''(t)\{g(t)-t\}$.

∴ $\frac{g'(t)}{g(t)-t}=\frac{f''(t)}{f'(g(t))-f'(t)}$.

$t=e$. $\frac{g'(e)}{g(e)-e}=\frac{f''(e)}{f'(g(e))-\cancel{f'(e)}}=-f''(e)g(e)=\frac{1}{e^3}$

$f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x} & (0<x<1) \text{ V} \\ \frac{e(1-\ln x)}{x^2} & (x>1) \text{ V}\end{cases}$ $x>1$에서 $f''(x)=\frac{e(2\ln x-3)}{x^3}$ V

$t=e$일 때 f의 접선. $y=1$.

$-\ln g(e)=0\cdot\{g(e)-e\}+1$. $g(e)=\frac{1}{e}$. V

$g'(e)=\frac{1}{e^3}\left(\frac{1}{e}-e\right)$를 직접 구해도 좋지만…

단답형

29. $a_1 = 12$인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{n+1-k}\times b_k) = a_{2n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3$일 때, $\frac{b_2}{b_1}\times\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점] 9.

n=1 $a_1\times b_1 = a_2$.

$\{a_n\}$ 공비 r. $b_1 = r$.

$n\ge2$. $a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1 b_n = a_{2n}$. (*)

$r=0$. $b_n = 0$. ∴ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0$. X.

$r\ne0$. (*)의 양변을 a_n으로 나누면

$b_1 + \frac{b_2}{r} + \frac{b_3}{r^2} + \cdots + \frac{b_n}{r^{n-1}} = r^n$. $\frac{b_n}{r^{n-1}} = r^n - r^{n-1}$.

∴ $b_1 = r$. $n\ge2$일 때 $b_n = (r-1)\cdot(r^2)^{n-1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$이 아님에 주의.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. $-1<r\le1$일 때 수렴

r=1일 때도 급수 수렴함에 주의!

$r=1$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n = 1$. X.

$-1<r<1$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n$

$= r + (r-1)r^2\cdot\frac{1}{1-r^2}$

$= r - \frac{r^2}{r+1}$

$= \frac{r}{r+1} = -3$. $r = -\frac{3}{4}$.

∴ $a_n = 12\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

$b_1 = -\frac{3}{4}$. $n\ge2$일 때 $b_n = \left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$.

$\frac{b_2}{b_1}\times\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left\{\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{4}\right)\times\frac{9}{16}\right\}\times\left\{12\times\frac{1}{1+\frac{3}{4}}\right\}$

$= 9$.

1 (*)에서 n 대신 n-1 대입하고 r 곱해서 빼도 good.

2 $\frac{b_2}{b_1} = r(r-1)$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{12}{1-r}$.

∴ $\frac{b_2}{b_1}\times\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -12r$.

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = |\sin\pi x| + \sin\pi x$에 대하여 함수

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,dt$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $2\times f(5)$의 값의 합을 구하시오. [4점] 343.

(가) $h\left(\frac{1}{2}\right)$은 자연수이고, $f\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le h\left(\frac{1}{2}\right)$이다.

$g(x) = \begin{cases} 2\sin\pi x & (\sin\pi x\ge0) \\ 0 & (\sin\pi x<0) \end{cases}$

함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. $h(x) = F(g(x))$.

g. $x\ne$(정수)에서 미분가능.

∴ $x=$(정수)에서만 h 미분가능 확인하면 충분. ✓

g 주기 2. $x=0, 1$에서만...

$x=0$에서 ; $\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to0-}\frac{F(0)-0}{x} = 0$. ✓

∴ $\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to0+}\frac{F(2\sin\pi x)}{x}$

$= \lim_{x\to0+}\frac{F(2\sin\pi x)}{2\sin\pi x}\cdot\frac{2\sin\pi x}{x}$

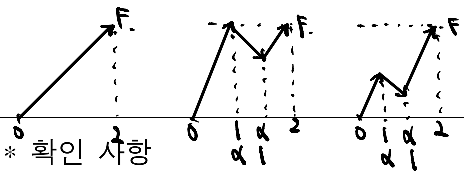
$= f(0)\cdot2\pi = 0$. $f(0) = 0$.

$x=1$에서 ; $-2\pi f(1) = 0$. 똑같이 $f(1) = 0$.

If $h\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^2 f(t)dt = 1$. $f(1) = 0$.

⇒ $f(x) = x(x-1)(x-\alpha)$. $= x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.

$g(x) = t$. $0\le t\le2$에서 $F(t)\le F(2) = 1$...



... α 먼저 찾고 되는지 점검.

이어서

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이후 풀이 보면 알겠지만 개형 case 분류하라고 낸 문제 X.

개형 전부 따지면서 풀까 걱정...

$\int_0^2 x(x-1)(x-\alpha)\,dx = \int_0^2 \{x^3-(\alpha+1)x^2+\alpha x\}\,dx.$

$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha+1}{3}x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 \Big|_0^2$

$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\alpha = 1. \quad \alpha = \frac{1}{2}.$ V.

$F(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2.$ $x=\frac{1}{2}$에서 극대 $\frac{1}{64} \le 1.$ ok. V

$\therefore 2\times f(5) = 2\times\left(5\cdot 4\cdot \frac{9}{2}\right) = 180.$

If $h\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^2 f(t)\,dt = 2.$ $f(2)=0.$

$\Rightarrow f(x) = x(x-2)(x-\alpha) = x(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right).$

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \{x^3-(\alpha+2)x^2+2\alpha x\}\,dx$

$= \frac{4}{3}\alpha - \frac{4}{3} = 2. \quad \alpha = \frac{5}{2}.$ V

$0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0.$ $\therefore$ F. $t=2$에서 최대. ok. V

$\therefore 2\times f(5) = 2\times\left(5\cdot 3\cdot \frac{5}{2}\right) = 75.$ ... 언제까지?

여기까지 과정 없이 바로 $f(n)=0$으로 넘어가도...?

$n\ge 3.$ $h\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^2 f(t)\,dt = n.$ $f(n)=0.$

$\Rightarrow f(x) = x(x-n)(x-\alpha).$

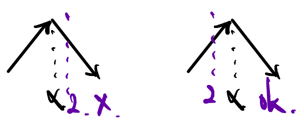
$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \{x^3-(n+\alpha)x^2+n\alpha x\}\,dx$

$= 4 - \frac{8}{3}(n+\alpha) + 2n\alpha = n.$

$\therefore \alpha = \frac{11n-12}{6n-8}.$ $n(n\ge 3)\uparrow.$ $\alpha\downarrow.$

$(n,\alpha) = \left(3, \frac{21}{10}\right), (4, 2), \cancel{\left(5, \frac{43}{22}\right)}, \cancel{\left(6, \frac{27}{14}\right)}, \cdots$ 언제까지?

F. $x=\alpha$에서 극대. $\alpha<x<n$에서 감소.



$\therefore \alpha \ge 2.$

$n=3.$ $f(x) = x(x-3)\left(x-\frac{21}{10}\right)$ $\quad 2\times f(5) = 2\times\left(5\cdot 2\cdot \frac{29}{10}\right) = 58.$

$n=4$ $f(x) = x(x-2)(x-4)$ $\quad 2\times f(5) = 2\times(5\cdot 3\cdot 1) = 30.$

$\therefore 180+75+58+30 = 343.$

"$f(5)$ 합"을 보고 $n=4$까지만...?