제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

정답: ②

풀이:

$$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}=2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}=2$$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-5$에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정답: ⑤

풀이:

$f'(x)=3x^2+6x$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=9$$

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

공비 r

$$a_2a_3=2,\quad a_4=4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

정답: ④

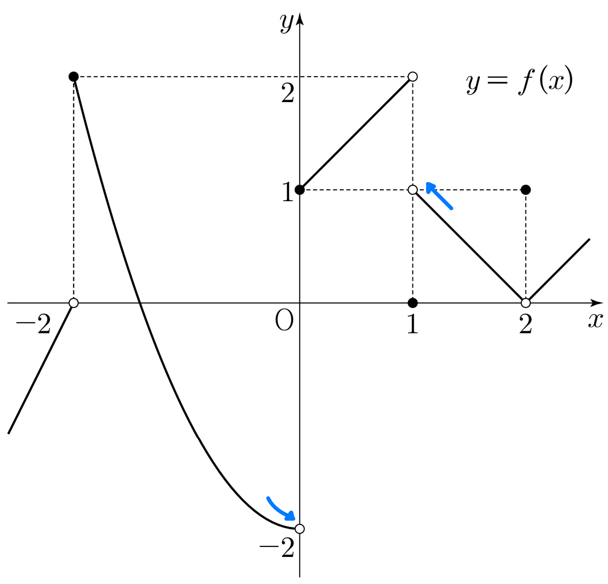
풀이:

$$a_2=\frac{a_4}{r^2}=\frac{4}{r^2},\quad a_3=\frac{a_4}{r}=\frac{4}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{r^2}\times\frac{4}{r}=2 \rightarrow r=2$$

$$\therefore\ a_6=a_4\times r^2=16$$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

정답: ②

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=-2,\quad \lim_{x\to 1+}f(x)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=-1$$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

정답: ②

풀이:

$f'(x)=(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$

$\Rightarrow\ f'(2)=16$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정답: ②

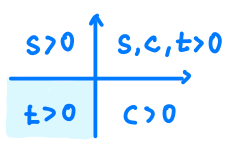
풀이:

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \rightarrow\ \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

sin²θ + cos²θ = 1

$\Rightarrow\ \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\because$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$)

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$



여담

$\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 하는 방법

→ n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

→ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$라고 가정했을 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq 4)\end{cases}$$

x = 4 에서 연속이어야 함

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

정답: ③

풀이:

$(4-a)^2=4$

$\Rightarrow\ a^2-8a+12=0$

근과 계수의 관계 써도 되고, a=2, a=6 직접 구해도 됨!

$\therefore$ 가능한 모든 상수 a의 값의 곱은 12

8. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정답: ①

풀이:

$\log_2 a+\log_a 8=4$

log₂a를 곱해줌 $(\log_a 2\times\log_2 a=1)$

$\Rightarrow \log_2 a+3\log_a 2=4 \rightarrow (\log_2 a)^2-4\log_2 a+3=0$

$\Rightarrow \log_2 a=3 \rightarrow a=8$ (∵ $\log_2 a=1$ 이면 $a=2$ → 불가능)

$\log_2 a\times\log_a 8=k$

$\log_2 a\times\log_a 2=1$

$\Rightarrow \log_2 a\times 3\log_a 2=k \rightarrow k=3$

$\therefore\ a+k=11$

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1\big(5x+f(x)\big)dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

정답: ⑤

풀이:

$5\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1(5x+f(x))dx$

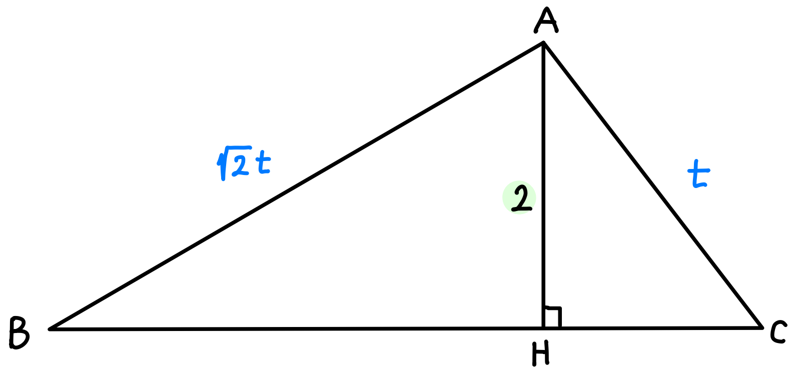
$=\int_0^1(4f(x)-5x)dx=\int_0^1(4x^2-x)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{5}{6}$

10. $\angle A>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$, $\overline{AH}=2$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



정답: ①

풀이:

$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1 \rightarrow \overline{AB}=\sqrt{2}t,\ \overline{AC}=t$

$\Rightarrow \sin B=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{t}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π → 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$

$\pi r^2=50\pi$

$\Rightarrow 2\times\underbrace{5\sqrt{2}}_{r}\times\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{t}}_{\sin B}=\underbrace{t}_{\overline{AC}}$ (∵ 사인법칙)

$\Rightarrow t=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{BH}=\sqrt{\underbrace{(2\sqrt{10})^2}_{(\overline{AB})^2}-\underbrace{2^2}_{(\overline{AH})^2}}=6$ (∵ 삼각형 ABH에서 피타고라스 정리)

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

정답: ①

풀이:

$x_1(t) = x_2(t) \iff t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$\Rightarrow$ $t = 6$에서 점 P와 점 Q가 만남

$v_1(t) = 2t + 1 \to a_1(t) = 2 \to p = 2$ $= a_1(6)$

$v_2(t) = -3t^2 + 14t \to a_2(t) = -6t + 14 \to q = -22$

$\therefore\ p - q = 24$ $= a_2(6)$

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 공차 d

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

정답: ②

풀이:

$b_{2k-1} = -(k-1)d + a_{2k-1}$, $b_{2k} = -kd$

$b_2 = -2 \to b_2 = -d = -2 \to d = 2$

$b_3 = -d + a_3$, $b_7 = -3d + a_7$ 등차중항

$\Rightarrow b_3 + b_7 = -4d + 2a_5 = 0 \to a_5 = 2d = 4$

$\therefore \sum_{n=1}^{9} b_n = \sum_{n=1}^{5} b_{2n-1} + \sum_{n-1}^{4} b_{2n} = (-10d + 5a_5) + (-10d) = -20$

등차중항

여담

현장에서 이 문제를 마주쳤다면

b_n의 식을 바로 일반화시키기 위해 노력하기보단

b_n의 값을 나열해보자.

나열하다보면

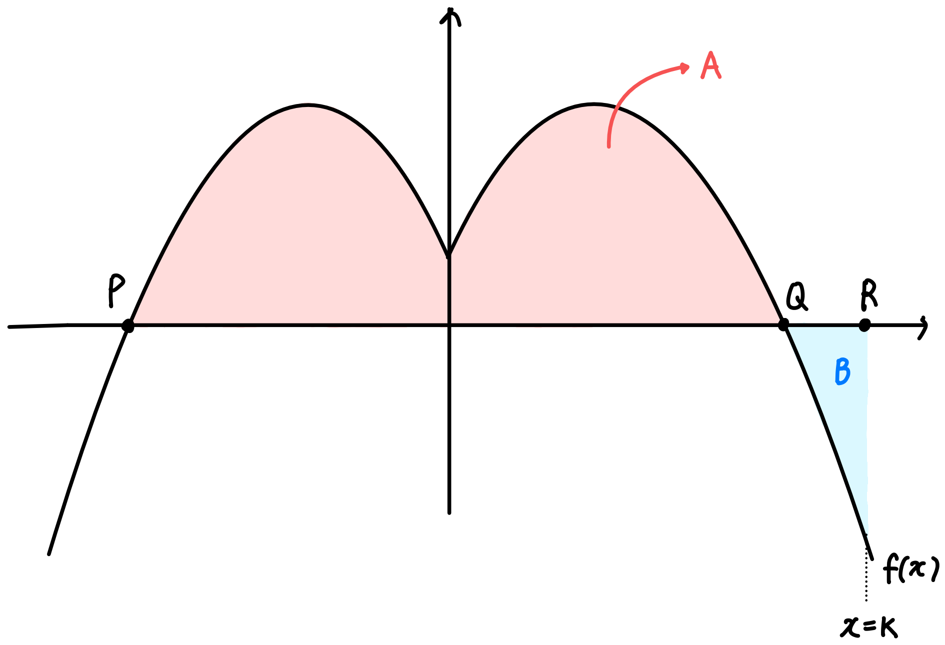
$b_{홀수}$ 항의 규칙성과 $b_{짝수}$ 항의 규칙성이 보일 것이다.

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



정답: ④

풀이:

함수 $f(x)$는 y축 대칭 함수 ($\because f(-x)=f(x)$)

$\Rightarrow$ 점 P의 x좌표를 $-a$라 하면 점 Q의 x좌표는 a

$\Rightarrow A=\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

$B=\int_{a}^{k}f(x)dx$

$\Rightarrow \int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{k}f(x)dx \rightarrow \int_{0}^{k}f(x)dx=0$

$\Rightarrow \int_{0}^{k}f(x)dx=\int_{0}^{k}(-x^2+2x+6)dx=-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$\therefore\ k=6$

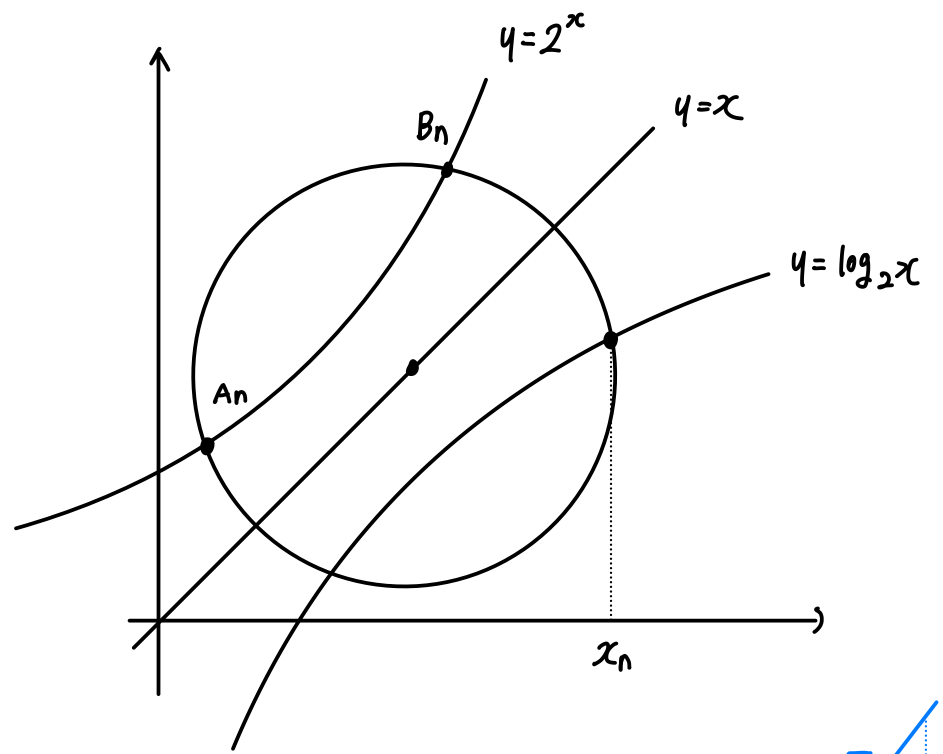
14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

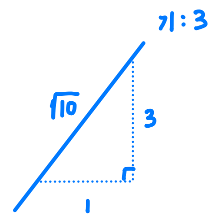
(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.

(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$





정답: ⑤

풀이:

점 A_n과 점 B_n의 x좌표 차이는 n, y좌표 차이는 $3n$

$\Rightarrow$ 점 A_n의 x좌표를 a_n, 점 B_n의 x좌표를 a_n+n라 하면

$\underbrace{2^{a_n}+3n=2^{a_n+n}}_{\mathrm{B}_n\text{의 }y\text{좌표}} \rightarrow 2^{a_n}=\frac{3n}{2^n-1}$

$y=2^x$와 $y=\log_2 x$는 $y=x$에 대해 대칭 (주어진 원도 y=x에 대해 대칭)

$\Rightarrow x_n=(\mathrm{B}_n\text{의 }y\text{좌표}) \rightarrow x_n=2^{a_n+n}=2^{a_n}+3n=\frac{3n\times 2^n}{2^n-1}$

$\Rightarrow x_1=6,\ x_2=8,\ x_3=\frac{72}{7}$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=\frac{170}{7}$

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)dt + \int_{-1}^{x} tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72　② 76　③ 80　④ 84　⑤ 88

정답: ①

풀이:

$xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$ (조건 (가) 미분)

적분

$\Rightarrow f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6 \rightarrow xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

$\Rightarrow xg(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x \rightarrow g(x) = 4x^2 + 12x - 6$

적분상수 0

$\therefore \int_{0}^{3} g(x)dx = \int_{0}^{3} (4x^2 + 12x - 6)dx = 72$

여담

신기하게도 조건 (가)의 등식에 $x = -1$, $x = 1$을 대입해 얻을 수 있는 정보를 사용하지 않는 문제이다.

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4) = 3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

정답: 7

풀이:

$\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$

$\Rightarrow (x+2)(x-4) = 27 \rightarrow x = 7$ ($\because x > 4$)

로그성립조건

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$이고 $f(0) = 1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

정답: 5

풀이:

$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$

$\Rightarrow f(1) = 5$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36,\quad \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

정답: 29

풀이:

$$\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{9}(k+1)a_{k+1} - \sum_{k=1}^{9} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{10} ka_k - \sum_{k=2}^{10} a_k = 7$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10} ka_k - \left(\sum_{k=2}^{10} ka_k - \sum_{k=2}^{10} a_k\right) = \underset{36-7}{\underline{29}} \ \rightarrow\ a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k = 29$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k = 29$$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 28일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

정답: 4

풀이:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$ (미분!)

$\Rightarrow f'(1) = 0 \ \rightarrow\ a = 3,\ f'(x) = 3(x-1)(\underline{x+3})$

$\Rightarrow f(-3) = 28 \ \rightarrow\ b = 1$

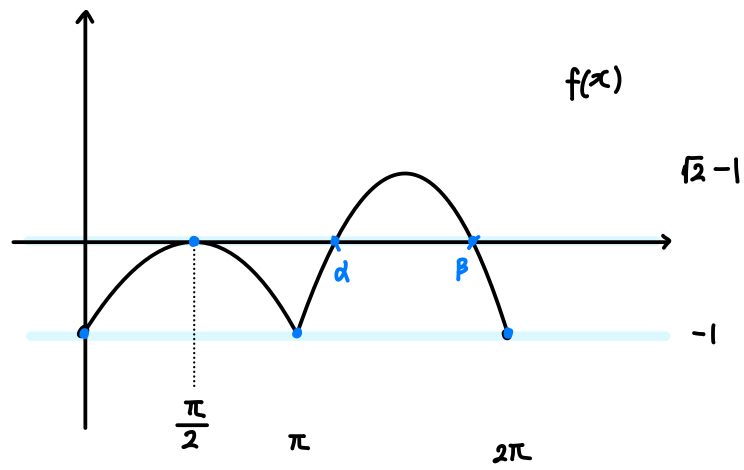
$x=-3$에서 $f(x)$가 극대!

$\therefore\ a+b = 4$

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정답: 15

풀이:

$f(t) = -1 \Leftrightarrow t$의 값의 합은 $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$

$f(t) = 0 \Leftrightarrow t$의 값의 합은 $\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi$ (대칭성 → $\alpha+\beta = 3\pi$)

$\therefore$ 가능한 모든 t의 값의 합은 $\frac{13}{2}\pi$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

정답: 31

풀이:

$2k-8=4k^2+14k \Leftrightarrow k=-1,\ k=-2$

$k=-1 \rightarrow \dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=-10 \rightarrow f(1)-f(-1)=-20$

$k=-2 \rightarrow \dfrac{f(0)-f(-2)}{2}=-12 \rightarrow f(0)-f(-2)=-24$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

미분

$f(1)-f(-1)=2+2b=-20 \rightarrow b=-11$

$f(0)-f(-2)=8-4a+2b=-24 \rightarrow a=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ f'(x)=3x^2+5x-11 \rightarrow f'(3)=31$

22. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

정답: 8

풀이:

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\dfrac{2}{3}k \\ -ka_n \end{cases}$$

1) $a_5=0 \rightarrow a_4=\dfrac{2}{3}k$ or $a_4=0 \rightarrow a_4 \ge 0$

2) $a_1=k$

a_1	k			
a_2	$\dfrac{k}{3}>0$		$-k^2<0$	
a_3	$-\dfrac{k}{3}<0$	$-\dfrac{k^2}{3}<0$	$-k^2-\dfrac{2}{3}k<0$ (불가능)	$k^3>0$

$\Rightarrow a_3=-\dfrac{k}{3},\ a_3=-\dfrac{k^2}{3},\ a_3=k^3$

a_3	$-\dfrac{k}{3}$		$-\dfrac{k^2}{3}$		k^3	
a_4	$-k$	$\dfrac{k^2}{3}$	$-\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3}k$	$\dfrac{k^3}{3}$	$k^3-\dfrac{2}{3}k$	$-k^4$

$\Rightarrow a_4=\dfrac{k^2}{3},\ a_4=\dfrac{k^3}{3},\ a_4=k^3-\dfrac{2}{3}k$ ($a_4 \ge 0$ 이어야 함)

i) $\dfrac{k^2}{3}=\dfrac{2}{3}k$ 또는 $\dfrac{k^2}{3}=0 \rightarrow k=2$

ii) $\dfrac{k^3}{3}=\dfrac{2}{3}k$ 또는 $\dfrac{k^3}{3}=0 \rightarrow k=\sqrt{2}$

iii) $k^3-\dfrac{2}{3}k=\dfrac{2}{3}k$ 또는 $k^3-\dfrac{2}{3}k=0$

$\rightarrow k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 또는 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore$ 가능한 k^2의 값의 합은 8