8. 부등식 $2^{|x|}+\dfrac{64}{2^{|x|}} \le 20$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$2^{|x|}=t$ $t\ge 1$

$t+\dfrac{64}{t}\le 20$

$t^2-20t+64\le 0$

$t-16$

$t-4$

$2^2 \le 2^{|x|} \le 2^4$

3×2

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=ax^3+2x\cancel{-3+\int_0^1 f'(t)dt}$$

$\int_0^1 f'(t)\,dt=3$

0

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$f(x)=3x^2+2$ $f(1)-f(0)=3$

$\left[x^3+2x\right]_0^2$ $f(1)=5$

$=8+4$ $f(1)=a+2=5$

$=12$ $a=3$

10. 모든 항이 자연수이고 공차가 같은 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\times b_k}=\boxed{\frac{n}{8n+4}}\quad \frac{n}{4(2n+1)}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)$의 값은? [4점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$\dfrac{1}{a_1b_1}=\dfrac{1}{12}$ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n-1}{2n-1}\right)$

$2,6$

$\dfrac{1}{a_nb_n}=$ $\dfrac{2n^2-n-(2n^2-n-1)}{4n^2-1}$

$\dfrac{1}{4n^2-1}$

$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\cancel{2}}{(2n-1)(2n+1)}$

$\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$

$(4n-2)$ $(4n+2)$

$8n$ $\cancel{8}\times\dfrac{5\cdot 6}{\cancel{2}}$ 4 20 120

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = 2t^3 - 6t^2 + t$$

이다. 양수 k에 대하여 시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1일 때, 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는? [4점]

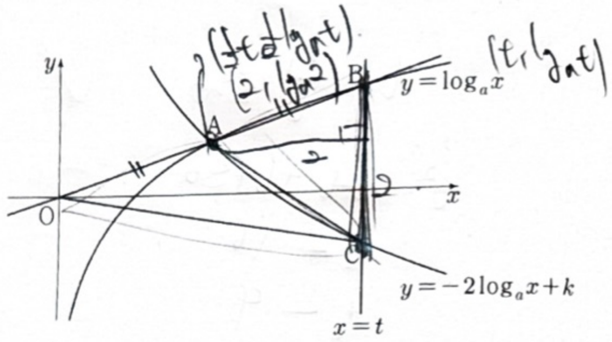
① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

$x' = 6t^2 - 12t + 1$

$6k^2 - 12k + 1 = 1$

$k = 2$

12. 그림과 같이 세 상수 $a(a > 1)$, k, t에 대하여 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = t$가 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 직선 AB가 원점 O를 지나고 두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 2로 같을 때, $a \times k \times t$의 값은? (단, $k > 0$이고, t는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]



① $8\sqrt{2}$ ② 16 ③ $16\sqrt{2}$ ④ 24 ⑤ $24\sqrt{2}$

$\log_a \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\log_a t$

$\sqrt{t} = \frac{1}{2}t$

$t = \frac{1}{4}t^2$

$\boxed{t = 4}$

$\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$

$k = 3\log_a 2$

$\log_a 4 + 2\log_a 4 - k = 2$

$3\log_a 4 - k = 2$

$6\log_a 2 - 3\log_a 2 = 2$

$3\log_a 2 = 2$

$\log_a 2 = \frac{2}{3}$

$a^{\frac{2}{3}} = 2$

$a = 2^{\frac{3}{2}}$ $k = 2$

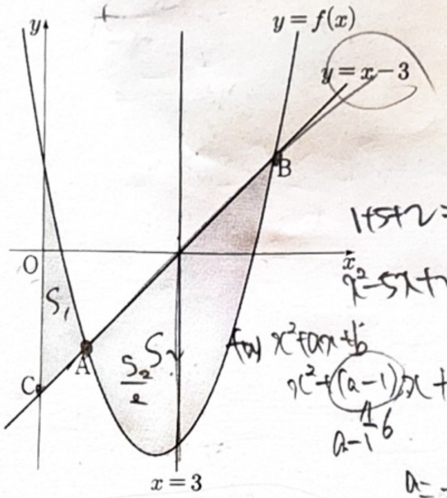
$t = 4$

$8 \times 2 \times \sqrt{2}$

$= 16\sqrt{2}$

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-3$이 x좌표가 양수인 두 점 A, B에서 만난다. 직선 $y=x-3$과 y축이 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=3$이 이등분하고, $\boxed{S_2-2S_1=6}$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 3보다 작고, 점 B의 x좌표는 3보다 크다.) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$



$1+5+2=8$

x^2-5x+2

$f(x)=x^2+ax+b$

$x^2+(a-1)x+b+3=0$

$a-1=-6$

$a=-5$

$\int_0^3 f(x)-(x-3)\,dx=-3$

$x^2-5x+b-x+3$

$\int_0^3 x^2-6x+b+3\,dx=-3$

$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+(b+3)x\right]_0^3$

$\cancel{9}-\cancel{27}+3b+\cancel{9}=-3$

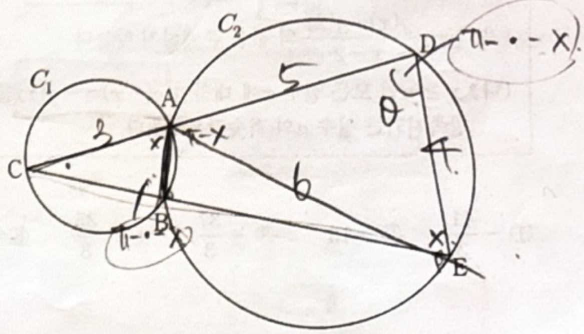
$3b=-6$

$b=-2$

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원 C_1, C_2가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 원 C_1 위의 점 C와 원 C_2 위의 두 점 D, E에 대하여 세 점 C, A, D와 세 점 C, B, E가 각각 한 직선 위에 있다.

$$r_1 : r_2 = 1:2,\quad \overline{AC}=3,\quad \overline{AD}=5,\quad \overline{DE}=4$$

일 때, 선분 CE의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{7}$ ② $\sqrt{66}$ ③ $\sqrt{69}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{25+16-36}{2\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}$

$x^2=64+16-64\times\frac{1}{8}$

$=80-8$

$=72$

$6\sqrt{2}$

15. 최고차항의 계수가 1이고 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $\frac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은? [4점]

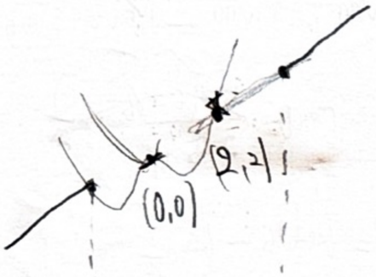
$g(x) = x$ or $f(x)$.

$f(2)=2$ $f(2)=1$

(가) $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값은 존재하지 않는다.

(나) $x \ge a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(-x) = -g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

① $-\frac{41}{3}$ ② -13 ③ $-\frac{37}{3}$ ④ $-\frac{35}{3}$ ⑤ -11



$(4,-4)$ $(4,4)$

$a=4$ or -4.

$f(x)-x = x^2(x-2)(x-a)$.

$f(x)=x^2(x-2)(x-4)+x$

$g(3)=f(3)$ $9\times1\times-1+3 = -6$

$g(-2)=-2$

$\frac{1}{3}$

$f(x)=x^2(x-2)(x+4)+x$

$g(3)=3$

$g(-2)=f(-2)$ -34

$-\frac{34}{3}+\frac{1}{3}=-11$

단답형

16. 방정식

$$\log_{\sqrt{3}}(x-3) = \log_3(5x-1)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>3$.

10

$x^2-6x+9=5x-1$

$x^2-11x+10=0$

$(x-10)(x-1)$

17. $\int_0^a (4x^2-3x)\,dx = \int_0^a (x^2+x)\,dx$를 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

2

$\int_0^a 3x^2-4x\,dx$

$[x^3-2x^2]_0^a = a^3-2a^2$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+\cancel{3})=\cancel{30},\quad \sum_{k=1}^{5}(2\cancel{a_k}+b_k)=53$$

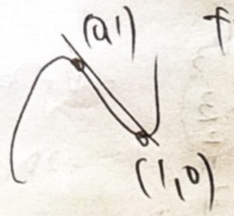
15 15 30 23

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

23

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 점 $(1,\ 0)$에서 만난다. $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

16



$f(x)=x^2(x-1)-x+1$

$f(3)=9\times2-3+1$

$=16$

20. 양수 t에 대하여 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{2}{t}\right]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sqrt{3}\sin(t\pi x),\quad g(x)=-3\cos(t\pi x)$$

가 있다. $0<k<\frac{2}{t}$인 상수 k에 대하여 $\boxed{f(k)=g(k)=3k}$일 때, $60(t+k)$의 값을 구하시오. [4점]

110

$\cos t\pi k=-k$

$\sqrt{3}\sin t\pi x=-3\cos t\pi x$

$\tan t\pi x=-\sqrt{3}$

$\tan t\pi k$

$k=\frac{2}{3t}$

$t\cdot\frac{1}{2}=t\frac{2}{3t}$

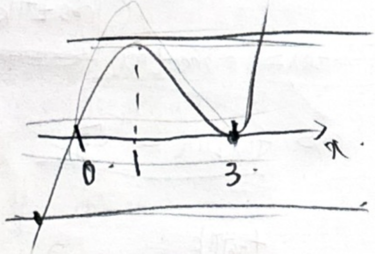
$t=\frac{4}{3}$ $k=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

$80+30$

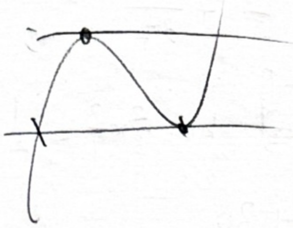
21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 양수 a와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이다.

$f(a)$의 최솟값을 구하시오. [4점]



200



22. 모든 항이 실수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \times a_2 > 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 & (a_n \le 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_3 = a_5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

59

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② $2\ln 2$ ③ $3\ln 2$ ④ $4\ln 2$ ⑤ $5\ln 2$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = e^{2t-2},\quad y = \frac{\ln t}{t}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$x' = 2e^{2t-2} = 2$

$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2}$

수학 영역(미적분)

25. 두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1} \quad \frac{b^2}{b+6}=\frac{1}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점] $a=b^2$

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

$bn+\frac{a}{2b}$

$2b^2=b+6$

$2b^2-b-6=0$

$\begin{matrix} 2b & +3 \\ b & -2 \end{matrix}$

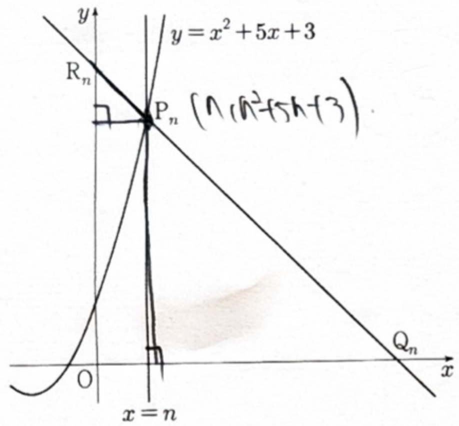
$b=2$

$a=4$

26. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2+5x+3$과 직선 $x=n$이 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q_n, y축과 만나는 점을 R_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$



$$\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}(n^2+5n+3-n)}$$

$(n+1)(n+3)$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{5}{\cancel{6}_2}\times\frac{\cancel{3}}{2}=\frac{5}{4}$$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고, 모든 실수 x에 대하여

$$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$$

을 만족시킨다. $\boxed{g'(f(0))}$의 값은? [3점]

$= \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{2}{3}$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$

$g(f(x))=x$

$g'(f(x))f'(x)$

$e^{f(0)}-2$

$2f'(x)e^{2f(x)}-2f'(2x)e^{f(2x)}-6e^{3x}=0$

$2f'(0)\times4-2f'(0)\times2-6=0$

$4f'(0)=6$

$f'(0)=\frac{3}{2}$

28. 7π보다 작은 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\sin(a+b\cos x)$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 방정식 $f'(x)=b$의 해가 존재한다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left\{f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right\}=\frac{b}{a}$

$\pi f(a)=\pi\ 2\pi$

① 5π ② $\frac{25}{4}\pi$ ③ $\frac{15}{2}\pi$ ④ $\frac{35}{4}\pi$ ⑤ 10π

$f'(x)=-b\sin x\cos(a+b\cos x)=b$

$\sin x=-1$ or 1, $\sin a=1$ or -1

$\cos(a+b\cos x)=1$ or -1

$\cos a=1$ or -1

$f(a)=-1$

$\frac{f(a)}{4}\cos(\pi f(a))=\frac{b}{a}$

$\sin(a+b\cos a)=-1$

$-\frac{1}{4}\cos$

$\frac{1}{4}=\frac{b}{a}$

$b=\frac{1}{4}a$

$\sin\frac{5}{4}a=\sin\frac{3}{2}\pi$

$a=2\pi$

$\sin\frac{5}{4}a=-1$

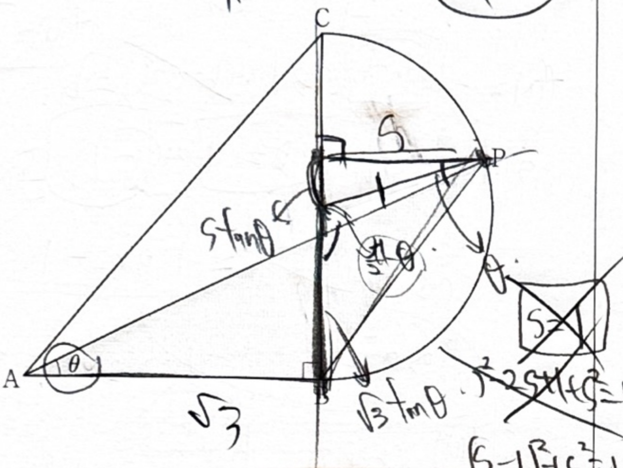
$\frac{3}{2}\pi$ $\frac{7}{2}\pi$ $\frac{11}{2}\pi$ $\frac{15}{2}\pi$

단답형

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2$이고 $\angle CBA=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 선분 BC를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 BC 위의 점 P에 대하여 $\angle BAP=\theta$일 때, 삼각형 ABP의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 점 B가 아니다.) [4점]

$\frac{9}{4}\times 20$

45



$(s-1)^2+s^2=1$

$f(\theta)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+s)\sqrt{3}\tan\theta$

$=\frac{3}{2}\tan\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}s\tan\theta$

$((s+\sqrt{3})\tan\theta-1)^2+s^2=1$

$s^2=\frac{3}{4}$

$s=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(\theta)=\frac{3}{2}\sec^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ds}{d\theta}\tan\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}s\sec^2\theta$

$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2((s+\sqrt{3})\tan\theta-1)\cdot\left(\tan\theta\frac{ds}{d\theta}+(s+\sqrt{3})\sec^2\theta\right)+2s\frac{ds}{d\theta}=0$

$=3+\frac{1}{2}k$

$=3-\frac{3}{4}$

$=\frac{9}{4}$

$k=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$k=-\frac{3}{2}$

30. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (a_n<1)\\ a_n & (a_n\geq 1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$은 수렴한다.

(나) $b_5^{\,2}=b_4b_6-\frac{9}{4}$

$90a_3$의 값을 구하시오. [4점]

$r<1$

$r>1$

15

$3-7r+2r^2=0$

$a_5^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$

$2r^2-7r+3=0$

$a_5^2=3a_5-\frac{9}{4}$

$r=3$

$4a_5^2-12a_5+9=0$

$a_5=\frac{3}{2}$

$a_3=\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.