

A

정답 및
해설

1 이차곡선

1

정답 ③

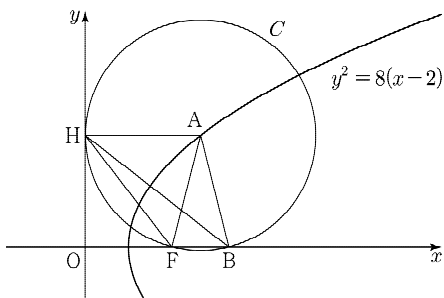
포물선 $y^2 = 4p(x-2)$ 의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각 $F(p+2, 0)$, $x = -p+2$

점 H는 포물선의 준선 위에 있고 동시에 y축 위에 있으므로 $-p+2=0 \quad \therefore p=2$

포물선 위의 점 A에서 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = \overline{AB} \quad (\because \overline{AF} = \overline{AB})$$

이때 $\overline{AH} = \overline{AF} = \overline{AB} = a$ 라 하고 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 원을 C라 하자.



위 그림에서 $\angle FHB$ 는 원 C에서 호 BF에 대한 원주각이므로 삼각형 BFH에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BF}}{\sin(\angle FHB)} = 2 \times a$$

$$\therefore \overline{BF} = \frac{a}{2} \quad (\because \sin(\angle FHB) = \frac{1}{4}) \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 선분 BF의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AH} = \overline{OF} + \overline{MF}$$

$$a = 4 + \overline{MF}$$

$$\therefore \overline{BF} = 2\overline{MF} = 2(a-4) \quad \dots \textcircled{2}$$

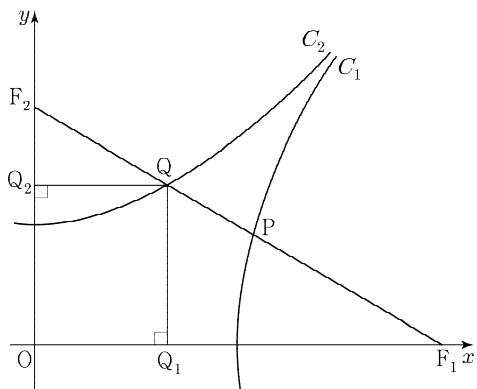
①, ②를 연립하면

$$\frac{a}{2} = 2(a-4) \quad \therefore a = \overline{AH} = \frac{16}{3}$$

2

정답 58

$\overline{F_2Q} : \overline{F_2O} = 2 : 3$ 이므로 $\overline{F_2Q} = 2k$, $\overline{F_2O} = 3k$ 라 하자.



점 Q에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_1 , Q_2 라 하면

$\overline{QQ_1} = \overline{Q_2O}$ 이고 포물선의 정의에 의하여 $\overline{QQ_1} = 2k$ 이므로

$$\overline{F_2Q_2} = 3k - 2k = k$$

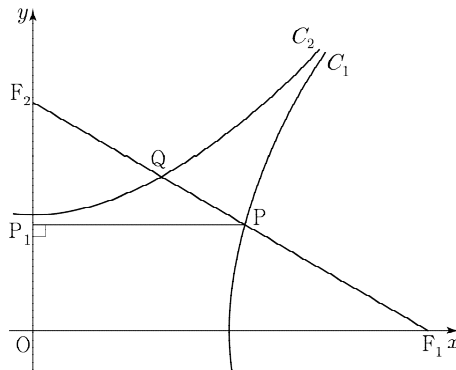
따라서 $\angle QF_2Q_2 = \frac{\pi}{3}$ 이고, 직각삼각형 F_2OF_1 에서

$$\frac{\overline{OF_1}}{\overline{OF_2}} = \sqrt{3}$$

$$\overline{OF_1} = 3\sqrt{3}k = 9 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

따라서 $\overline{F_2Q} = 2\sqrt{3}$, $\overline{F_2O} = 3\sqrt{3}$ 이고 $\overline{F_1F_2} = 6\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{QF_1} = 4\sqrt{3}$ 이다.



점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 P_1 이라 하고, $\overline{PQ} = t$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PP_1} = \overline{PF_1} = 4\sqrt{3} - t$$

직각삼각형 F_2P_1P 에서 $\angle F_2PP_1 = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{F_2P}} = \frac{4\sqrt{3} - t}{2\sqrt{3} + t}$$

$$6 + \sqrt{3}t = 8\sqrt{3} - 2t$$

$$(2 + \sqrt{3})t = 8\sqrt{3} - 6$$

$$\therefore t = 22\sqrt{3} - 36$$

따라서 $a = 22$, $b = 36$ 이므로 구하는 값은

$$a + b = 22 + 36 = 58$$

3

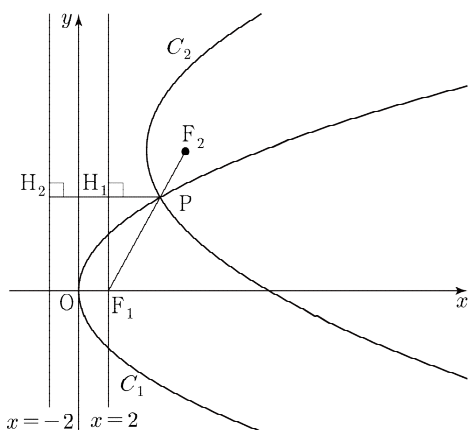
정답 108

포물선 C_1 의 초점 $F_1(2, 0)$ 이므로 포물선 C_1 의 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

포물선 C_2 는 포물선 $y^2 = 12x$ 를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 포물선 C_2 의 준선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

다음 그림과 같이 두 포물선 C_1 , C_2 가 만나는 점을 P라 하고,

점 P에서 두 직선 $x = 2$, $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하자.



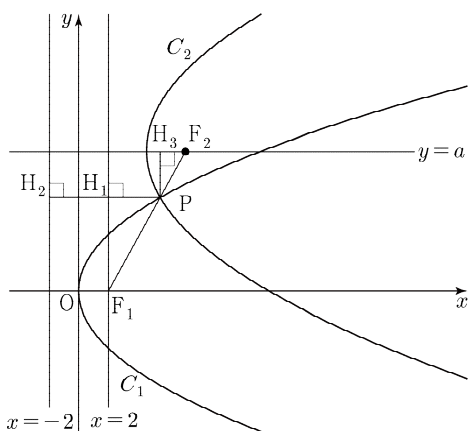
이때 $\overline{PF_2} = k$ 라 하면 포물선 C_2 에서 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH_1} = k$ 이고

$$\overline{PH_2} = \overline{PH_1} + 4 = k + 4$$

이므로 포물선 C_1 에서 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH_2} = \overline{PF_1} = k + 4$$

한편, 다음 그림과 같이 점 P에서 직선 $y=a$ 에 내린 수선의 발을 H_3 이라 하자.



직선 $x=2$ 와 점 F_2 사이의 거리는 6이고 $\overline{PH_1} = k$ 이므로

$$\overline{F_2H_3} = 6 - k$$

점 P가 선분 F_1F_2 위에 있으므로 두 삼각형 F_1H_1P 와 PH_3F_2 는 닮음이다.

따라서

$$\overline{PF_1} : \overline{PH_1} = \overline{PF_2} : \overline{F_2H_3}$$

$$(k+4) : k = k : (6-k)$$

$$k^2 = -k^2 + 2k + 24$$

$$k^2 - k - 12 = 0$$

$$(k+3)(k-4) = 0 \quad \therefore k = 4$$

즉, $\overline{PF_1} = 8$, $\overline{F_1H_1} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ 이고 두 삼각형 F_1H_1P 와

PH_3F_2 의 닮음비가 2 : 1이므로

$$\overline{PH_3} = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 값은

$$a = \overline{F_1H_1} + \overline{PH_3} = 6\sqrt{3} \quad (\because a > 0) \quad \therefore a^2 = 108$$

4

정답 ④

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 초점의 좌표는 각각

$$F'(-3, 0), F(3, 0)$$

$\angle FPF'$ 의 이등분선과 x 축의 교점을 Q라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{F'Q} : \overline{QF}$$

점 Q의 x 좌표가 $\frac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{F'Q} = \frac{3}{5} + 3 = \frac{18}{5}, \quad \overline{QF} = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \overline{PF'} : \overline{PF} = 3 : 2$$

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 장축의 길이는 10이므로 $\overline{PF} = k$ 라 하면 타원의

정의에 의하여

$$\overline{PF'} = 10 - k$$

따라서 $10 - k : k = 3 : 2$ 에서

$$3k = 20 - 2k \quad \therefore k = 4$$

즉, $\overline{PF'} = 6$, $\overline{PF} = 4$ 이므로 삼각형 FPF' 는 이등변삼각형이고 그 넓이는 $8\sqrt{2}$ 이다.

5

정답 ③

타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면 $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$ 이고

$$\overline{PF} = \overline{PR} + \overline{FR} = 1 + 2 = 3 \text{ 이므로 } \overline{PF'} = 2a - 3$$

이고 $\overline{PQ} = 1$ 이므로 $\angle FPQ = \theta$ 라 하면 $\angle PQF = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PF}} = \frac{1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 $RF'F$ 의 넓이는 삼각형 $PF'F$ 의 넓이에서 삼각형 PRF' 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \times (2a-3) \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} \times (2a-3) \times 1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

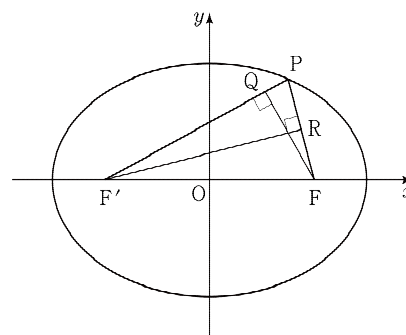
$$\therefore a = 4$$

따라서 $\overline{FQ} = 2\sqrt{2}$, $\overline{F'Q} = 4$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{FF'} = 2c = 2\sqrt{6} \quad \therefore c = \sqrt{6}$$

6

정답 ⑥





두 삼각형 $PF'R$, PFQ 는 모두 직각삼각형이므로 두 삼각형 $PF'R$, PFQ 는 서로 닮음이고 닮음비는

$$\overline{PR} : \overline{PQ} = 2 : 1$$

$\overline{PF} = k$ ($k > 0$), $\overline{PF'} = 2k$ 라 하면 타원 C 의 장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 12, \quad 2k + k = 12 \quad \therefore k = 4$$

이때 $\overline{PR} = 2$, $\overline{PF} = 4$ 에서 $\overline{RF} = 2$ 이므로

$$\overline{PR} = \overline{RF}$$

$\angle PRF' = \frac{\pi}{2}$ 이므로 선분 RF' 은 삼각형 $PF'F$ 의 수직이등분선이다.

따라서 삼각형 $PF'F$ 는 $\overline{PF'} = \overline{FF'}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{FF'} = 8 \quad \therefore c = 4$$

또한

$$b^2 = 36 - c^2 = 20 \quad \therefore b = 2\sqrt{5} \quad (\because b > 0)$$

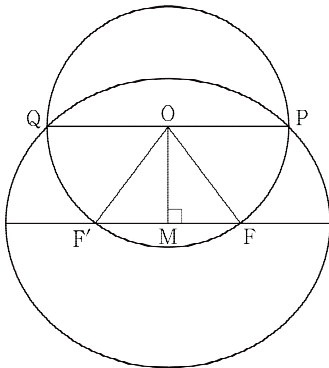
따라서

$$b \times c = 8\sqrt{5}$$

7

정답 180

선분 PQ 는 원의 지름이고 $\overline{PQ} = 10$ 이므로 원의 반지름의 길이는 5이다.

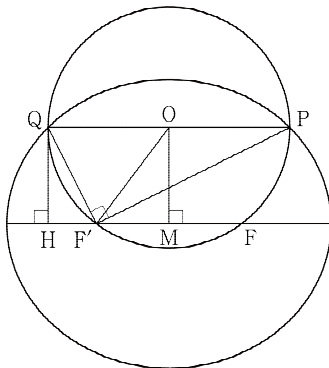


원의 중심을 O 라 하면 $\overline{OF} = \overline{OF'}$ 이므로 삼각형 OFF' 은 이등변삼각형이다.

선분 FF' 의 중점을 M 이라 하면 삼각형 $OF'M$ 은 직각삼각형이고,

$$\overline{MF'} = \frac{1}{2} \overline{FF'} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OF'}^2 - \overline{MF'}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$



점 Q 에서 직선 FF' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{QH} = \overline{OM} = 4$$

두 직선 PQ , FF' 이 평행하므로

$$\overline{HF'} = \overline{MH} - \overline{MF'} = 5 - 3 = 2$$

$$\overline{QF'} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

선분 PQ 는 원의 지름이므로 $\angle QF'P = \frac{\pi}{2}$ 이고

$$\overline{PF'} = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$$

선분 QF' 과 선분 PF' 의 길이가 서로 같으므로 타원의 정의에 의하여

$$l = \overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF'} + \overline{PF'} = 6\sqrt{5}$$

$$\therefore l^2 = 36 \times 5 = 180$$

8

정답 ③

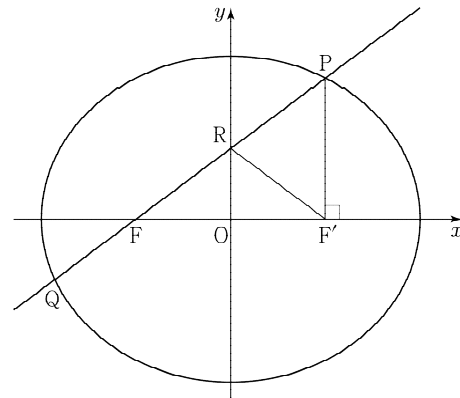
타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$ ($a > 4$)의 초점 중 x 좌표가 양수인 점을

$F'(c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면

$$\overline{RF} = \overline{RF'}$$

이므로 점 F' 은 점 R 이 중심이고 선분 PF 를 지름으로 하는 원 위의

점이고, $\angle FF'P = \frac{\pi}{2}$ 이다.



이때

$$c^2 = a^2 - (a^2 - 16) = 16 \quad \therefore c = 4$$

이므로

$$\overline{FF'} = 2c = 8$$

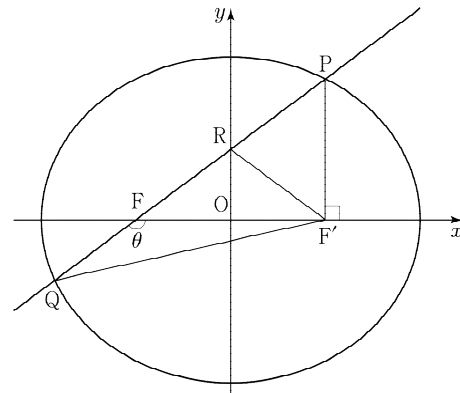
또한 $\overline{PF} = \overline{PR} + \overline{RF} = 10$ 이므로

직각삼각형 $PF'F$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PF'} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{FF'}^2} = 6$$

즉, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 10 + 6 = 16$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$2a = 16 \quad \therefore a = 8$$





$\overline{QF} = k$, $\angle QFF' = \theta$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{QF'} = 16 - \overline{QF} = 16 - k, \angle PFF' = \pi - \theta$$

이므로

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \therefore \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

삼각형 FQF' 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{QF'}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \times \overline{QF} \times \overline{FF'} \times \cos \theta$$

$$(16 - k)^2 = k^2 + 64 - 2 \times k \times 8 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$k^2 - 32k + 256 = k^2 + \frac{64}{5}k + 64$$

$$\frac{224}{5}k = 192 \quad \therefore k = \overline{QF} = \frac{30}{7}$$

9

정답 ③

$\overline{OA} = \overline{AF} = \sqrt{5}$ 이므로 타원 C_1 의 장축의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

$\overline{OB} = k$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FB} = 2\sqrt{5} - k$$

이고, 직선 OB 의 기울기는 점 B 가 직선 OA 위의 점이므로 2 이다.

$\angle BOG = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 라 하면

$$\tan \theta = 2, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

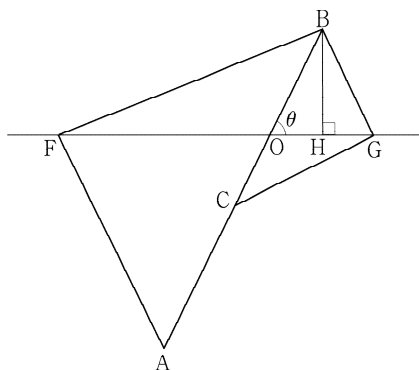
삼각형 BOF 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{FB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OF}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OF} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$(2\sqrt{5} - k)^2 = k^2 + 4 - 2 \times k \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\therefore k = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

즉, $\overline{OB} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ 이고 $\overline{FB} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ 이다.



점 B 에서 선분 OG 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{OH} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \cos \theta = \frac{2}{3}$$

이때 삼각형 OBG 는 $\overline{BO} = \overline{BG}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{OG} = 2\overline{OH} = \frac{4}{3}$$

또한 타원 C_2 의 장축의 길이는

$$\overline{OB} + \overline{GB} = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

이므로 $\overline{OC} = t$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{CG} = \frac{4\sqrt{5}}{3} - t$$

$\angle FOB = \angle COG$ 이므로

$$\cos(\angle COG) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

삼각형 COG 에서 코사인법칙에 의하여

$$t^2 + \frac{16}{9} - 2 \times t \times \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{4\sqrt{5}}{3} - t\right)^2$$

$$\therefore t = \overline{OC} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

따라서 $\overline{CG} = \frac{4\sqrt{5}}{3} - t$ 이므로

$$\overline{CG} = \frac{4\sqrt{5}}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{8\sqrt{5}}{9}$$

10

정답 25

$\overline{PF'} = \overline{PQ} = k$ 라 하자. 두 삼각형 QPF 와 QRF' 은 서로 닮음이므로

$$\overline{FQ} : \overline{PQ} = \overline{F'Q} : \overline{QR}$$

$$5 : k = 2k : 5 + \frac{7}{5}$$

$$2k^2 = 32 \quad \therefore k = 4$$

두 삼각형 QPF 와 QRF' 의 닮음비는

$$\overline{QF} : \overline{F'Q} = 5 : 8$$

이므로 $\overline{PF} = 5l$, $\overline{F'R} = 8l$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{F'P} + \overline{FP} = \overline{F'R} + \overline{FR} = 2a$$

$$4 + 5l = 8l + \frac{7}{5} \quad \therefore l = \frac{13}{15}$$

$2a = \overline{F'P} + \overline{FP}$ 에서

$$2a = 4 + 5l = \frac{25}{3} \quad \therefore a = \frac{25}{6}$$

따라서 구하는 값은 $6a = 25$

11

정답 ③

두 삼각형 $PF'R$ 와 FQR 의 닮음비가 2 : 1 이므로

점 R 은 선분 QF' 을 2 : 1 로 내분하는 점이다. ... ㉠

$\overline{FQ} = x$ 라 하면 $\overline{PF'} = 2x$ 이고, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FQ} + \overline{F'Q} = \overline{PF} + \overline{PF'}$$

$$x + \overline{F'Q} = 4 + 2x \quad \therefore \overline{F'Q} = 4 + x$$

㉠에 의하여 $\overline{RQ} = \frac{x+4}{3}$ 이므로 직각삼각형 FRQ 에서 피타고라스의

정리에 의하여 $x = 5$

따라서 $\overline{PR} = 8$, $\overline{RQ} = 3$ 이므로 직각삼각형 PRQ 에서 피타고라스의

정리에 의하여 $\overline{PQ} = \sqrt{73}$

12

정답 ①

점 A 는 타원 C_1 위에 있고 $\overline{AF} = 2$ 이므로 $\overline{AF'} = 2a - 2$ 이다.



$\overline{FF'} = 2c$ 이고 $\angle AFF' = \frac{\pi}{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

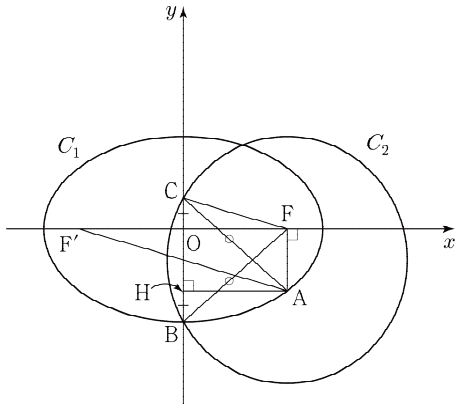
$$(2a-2)^2 = (2c)^2 + 2^2$$

$$\therefore (a-1)^2 = c^2 + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 두 선분 CF, AF'이 평행하므로 $\angle CFO = \angle AF'F$ 이고

$\angle COF = \angle AFF' = \frac{\pi}{2}$ 이므로 두 삼각형 AFF', COF는 닮음이다.

$\overline{FF'} : \overline{OF} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{AF} : \overline{CO} = 2 : 1$ 이고, $\overline{CO} = 1$ 이다.



점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 타원 C_2 의 대칭성에 의하여 $\overline{CO} = \overline{BH}$ 이다.

$$\therefore \overline{OB} = \overline{FA} + \overline{HB} = 3$$

즉, $b = 3$ 이므로 $a^2 - 3^2 = c^2$ 이고, 이를 ①에 대입하면

$$(a-1)^2 = a^2 - 9 + 1 \quad \therefore a = \frac{9}{2}$$

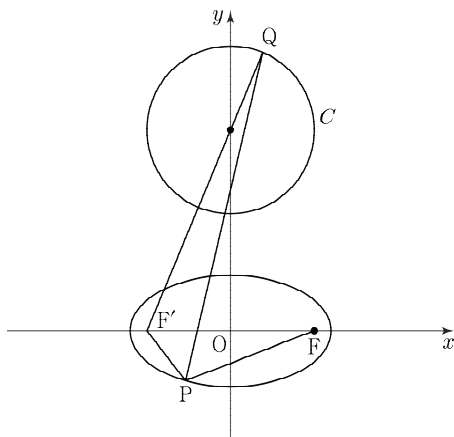
한편, 타원 C_2 의 대칭성에 의하여 두 선분 CA, BF의 길이가 같고,

타원 C_1 에서 타원의 정의에 의하여 $\overline{BF} = a$ 이므로 타원 C_2 의 장축의 길이는 타원의 정의에 의하여

$$\overline{CF} + \overline{CA} = \frac{1}{2} \overline{AF'} + \overline{BF} = (a-1) + a = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

13

정답 25



타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 12$ 이므로

$\overline{PQ} + \overline{PF} = \overline{PQ} - \overline{PF'} + 12$ 의 최댓값이 30이다.

이때 삼각형 PQF'에서

$$\overline{PQ} \leq \overline{PF'} + \overline{F'Q}$$

이므로

$$\overline{PQ} - \overline{PF'} + 12 \leq \overline{F'Q} + 12$$

이고, 세 점 P, Q, F'이 한 직선 위에 있을 때 등호가 성립한다.

한편, 직선 F'Q가 원의 중심을 지날 때,

$$\overline{F'Q} = \sqrt{5^2 + 12^2} + r = 13 + r$$

따라서 $13 + r + 12 = 30$ 이므로 $r = 5$, $S = 25\pi$

$$\therefore \frac{S}{\pi} = 25$$

14

정답 ①

$\overline{FF'} = 2c$ 이므로 $\overline{FF'} = \overline{PF} = \overline{PQ} = 2c$ 이다.

쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = (\overline{PQ} + \overline{QF'} - \overline{PF}) = \overline{QF'} = 4$$

한편, 삼각형 PF'F는 이등변삼각형이므로

$$\angle PF'F = \angle FPF'$$

삼각형 F'OQ와 삼각형 FOQ에서 선분 OQ는 공통변이고

$\overline{F'O} = \overline{FO}$, $\angle F'OQ = \angle FOQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼각형 F'OQ와 삼각형

FOQ는 합동이다.

따라서 $\overline{FQ} = \overline{F'Q}$ 이므로 삼각형 QF'F는 $\angle QF'F = \angle QFF'$ 인

이등변삼각형이다.

즉, 삼각형 QF'F와 삼각형 FPF'은 서로 닮음이다.

$$\frac{\overline{QF'}}{\overline{FF'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{PF'}}$$

$$\frac{4}{2c} = \frac{2c}{2c+4}$$

$$c^2 - 2c - 4 = 0 \quad \therefore c = 1 + \sqrt{5} \quad (\because c > 0)$$

15

정답 ③

$\overline{PF'} = d$ 라 하면 세 수 $\overline{PF'}$, $\overline{QF}$, $\overline{QF'}$ 이 이 순서대로 공차가 d 인 등차수열을 이루므로

$$\overline{QF} = 2d, \overline{QF'} = 3d$$

이때, 쌍곡선의 성질에 의하여

$$2a = \overline{QF'} - \overline{QF} = d$$

이고

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a = d$$

이므로 $\overline{PF} = 2d$ 이다.

즉, 삼각형 PFQ는 $\overline{PF} = \overline{QF}$ 이고, $\overline{PQ} = \overline{QF} = 2d$ 이므로 한 변의 길이가 $2d$ 인 정삼각형이다.

삼각형 FQF'에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{FF'}^2 = \overline{QF}^2 + \overline{QF'}^2 - 2 \times \overline{QF} \times \overline{QF'} \times \cos(\angle FQF')$$

$$36 = 4d^2 + 9d^2 - 2 \times 2d \times 3d \times \frac{1}{2}$$

$$7d^2 = 36 \quad \therefore d = \frac{6\sqrt{7}}{7} \quad (\because d > 0)$$

따라서 $2a = \overline{QF'} - \overline{QF} = d$ 이므로 $a = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

16

정답 ⑤

선분 QF' 의 길이를 a 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{QF} = a - 8 \quad (a > 8)$$

(i) $\overline{PF'} = \overline{QF'}$ 일 때

$\overline{PF'} = \overline{QF'} = a$ 이고 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF} - \overline{PF'} = 8$ 이므로

$$\overline{PF} = a + 8$$

또한 $\overline{PQ} = \overline{PF} - \overline{QF}$ 이므로

$$\overline{PQ} = (a + 8) - (a - 8) = 16$$

삼각형 PQF' 의 둘레의 길이가 24이므로

$$a + a + 16 = 24 \quad \therefore a = 4$$

이때 $a > 8$ 이어야 하므로 모순이다.

(ii) $\overline{PQ} = \overline{QF'}$ 일 때

$\overline{PF} = \overline{QF} + \overline{PQ} = 2a - 8$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} = 2a - 16$$

주어진 조건에 의하여 삼각형 PQF' 의 둘레의 길이가 24이므로

$$4a - 16 = 24 \quad \therefore a = 10$$

선분 PF' 의 중점을 M 이라 하면 직각삼각형 QMP 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{QM} = 4\sqrt{6}$$

(i), (ii)에 의하여 삼각형 PQF' 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

17

정답 ④

$\overline{FQ} = k$ 라 할 때 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{QF'} = k + 4$$

$\overline{PQ} = \overline{QF'}$ 이므로 $\overline{PQ} = k + 4$ 이고 $\overline{FQ} = 4$ 이므로

$$\overline{PF} = 4$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} = 8$$

쌍곡선의 초점 F 의 x 좌표를 c 라 할 때

$$c = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \therefore \overline{FF'} = 4\sqrt{2}$$

$\angle FPF' = \theta$ 라 할 때, 삼각형 PPF' 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - \overline{FF'}^2}{2 \times \overline{PF} \times \overline{PF'}} = \frac{3}{4}$$

점 Q 에서 선분 PF' 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 삼각형 PQF' 은

$\overline{PQ} = \overline{QF'}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{PH} = \overline{HF'} = 4$$

따라서 $\cos \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{PQ}} = \frac{4}{k+4} = \frac{3}{4}$ 이므로 $k = \frac{4}{3}$

18

정답 ⑥

조건 (나)에서

$$\overline{PF'} = 6k, \overline{QF} = k \quad (k > 2)$$

라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = 6k - 6, \overline{QF'} = k + 6$$

조건 (가)에 의하여 두 삼각형 PRF' , FRQ 는 서로 닮음이고 그 닮음비는 6 : 1이므로

$$\overline{QF'} : \overline{QR} = 5 : 1, \overline{PF} : \overline{RF} = 5 : 1$$

$$\therefore \overline{QR} = \frac{k+6}{5}, \overline{RF} = \frac{6k-6}{5}$$

직각삼각형 FRQ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{QF}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{RF}^2$$

$$k^2 = \left(\frac{k+6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6k-6}{5}\right)^2$$

$$25k^2 = 37k^2 - 60k + 72$$

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$(k-2)(k-3) = 0 \quad \therefore k = 3 \quad (\because k > 2)$$

따라서 구하는 값은

$$\overline{RF} = \frac{6k-6}{5} = \frac{12}{5}$$

19

정답 6

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (a < 2)$ 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = k, \overline{AF'} = k + 2a$$

라 하면 $\overline{AF} - \overline{AB} = 2a$ 에서

$$\overline{AB} = k - 2a, \overline{BF'} = \overline{AF'} - \overline{AB} = 4a$$

또한 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (a < 2)$ 의 초점 F' 의 좌표는

$$F'(-\sqrt{a^2+4}, 0)$$

이므로

$$\overline{OF'} = \sqrt{a^2+4}$$

점 F' 에서 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 에 그은 접선의 접점을 H 라 하면

$$\overline{OH} = a$$

삼각형 OHF' 에서

$$\overline{HF'} = \sqrt{\overline{OF'}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+4})^2 - a^2} = 2$$

한편, 두 삼각형 BOF' , OHF' 는 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{OF'}}{\overline{BF'}} = \frac{\overline{HF'}}{\overline{OF'}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+4}}{4a} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$a^2 - 8a + 4 = 0 \quad \therefore a = 4 - 2\sqrt{3} \quad (\because a < 2)$$

따라서 $p = 4, q = 2$ 이므로 $p + q = 6$

20

정답 32

두 조건 (가), (나)에서 두 선분 FQ , RS 는 서로 평행하고

$\overline{PR} = \overline{PS}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

$\overline{PR} = \overline{PS} = 2k$ 라 하면 쌍곡선 C_1 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$$

$$\overline{PF'} - \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FQ} = 6$$



이때 두 삼각형 PSR, PQF는 닮음이므로

$$\overline{PS} : \overline{RS} = \overline{PQ} : \overline{FQ}$$

$$2k : 4 = \overline{PQ} : 6 \quad (\because \text{조건 (나)})$$

$$\therefore \overline{PQ} = 3k$$

쌍곡선 C_2 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{RF'} - \overline{RF} = 8$$

이고

$$\overline{RF} = \overline{SQ} = \overline{PQ} - \overline{PS} = k$$

이므로

$$\overline{RF'} = k + 8$$

삼각형 $F'RS$ 에서

$$\overline{F'S} = \overline{F'Q} + \overline{SQ} = 6 + k$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle F'RS) &= \frac{\overline{RF'}^2 + \overline{RS}^2 - \overline{F'S}^2}{2 \times \overline{RF'} \times \overline{RS}} \\ &= \frac{(k+8)^2 + 4^2 - (k+6)^2}{2 \times (k+8) \times 4} \\ &= \frac{k+11}{2(k+8)} = \frac{7}{11} \quad (\because \text{조건 (나)}) \end{aligned}$$

$$\therefore k = 3$$

따라서 삼각형 $PF'R$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF'} + \overline{RF'} + \overline{PR} = 15 + 11 + 6 = 32$$

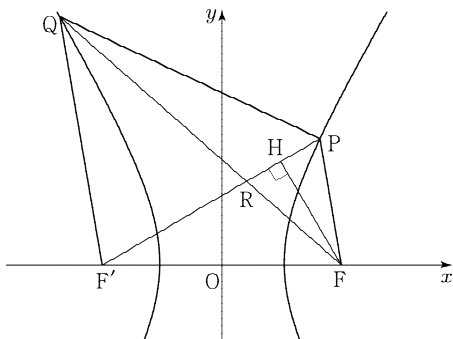
21

정답 ⑥

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이는 2이므로 쌍곡선의 정의에

의하여

$$\overline{PF'} = 4, \overline{QF} = 6$$



직선 PF 와 직선 QF' 이 평행하므로 두 선분 PF' , QF 의 교점을 R 이라 하면 두 삼각형 $QF'R$, FPR 은 닮음이고 그 닮음비는 2 : 1이다.

즉, 점 R 은 두 선분 QF , $F'P$ 를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$$\overline{PR} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}, \overline{RF} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

삼각형 FPR 은 이등변삼각형이므로 점 F 에서 선분 PR 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{RH} = \frac{2}{3}, \cos(\angle PRF) = \frac{\overline{RH}}{\overline{RF}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin(\angle PRF) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 사각형 $FPQF'$ 의 넓이는 네 삼각형 PRF , $RF'F$, RQF' ,

RPQ 의 넓이의 합이므로

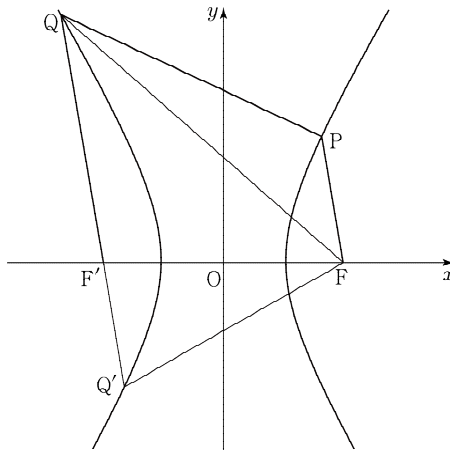
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{RF} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{RQ} \times \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \overline{RQ} \times \overline{RF'} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \overline{RF'} \times \overline{RF} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} \times 2 + 4 \times \frac{4}{3} + 4 \times \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \times 2 \right) \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

직선 QF' 이 쌍곡선과 제 3사분면에서 만나는 점을 Q' 이라 하자.

두 직선 PF , QQ' 은 서로 평행하고 각각 쌍곡선의 두 초점을 지나므로

두 점 P , Q' 은 원점에 대하여 대칭이고, $\overline{PF} = \overline{Q'F'}$ 이다.



이때 두 삼각형 PFQ , $FF'Q'$ 의 넓이는 같다.

즉, 사각형 $FPQF'$ 의 넓이는 삼각형 $QQ'F$ 의 넓이와 같다.

$\overline{QF} = \overline{QQ'} = 6$, $\overline{Q'F} = 4$ 이므로 점 Q 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{Q'F} - \overline{Q'F'} = 2$$

선분 FQ' 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면

$$\overline{QM} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 $QQ'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

이므로 사각형 $FPQF'$ 의 넓이는 $8\sqrt{2}$

22

정답 35

두 점 A , B 에서 직선 FF' 에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하면

두 삼각형 AH_1F , BH_2F 는 서로 닮음이고 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{7}{3}$ 이므로 닮음비는

3 : 7이다.

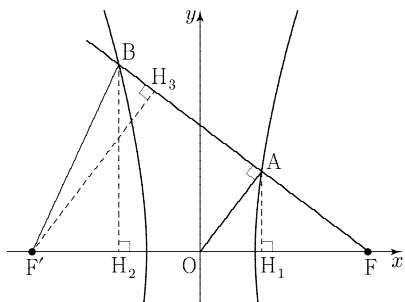
$$\therefore \overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 다음 그림과 같이 점 F' 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을

H_3 이라 하면 두 삼각형 AOF , $H_3F'F$ 는 서로 닮음이고 닮음비는

1 : 2이므로

$$\overline{AF} = \overline{AH_3} \quad \dots \textcircled{2}$$



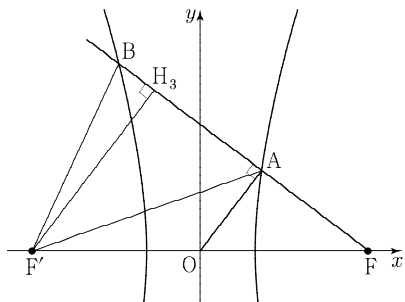
㉑, ㉒에 의하여

$$\overline{AF} = 3k, \overline{AH_3} = 3k, \overline{BF} = 7k$$

라 하자.

쌍곡선의 주축의 길이는 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{BF'} = 7k - 2, \overline{AF'} = 3k + 2$$



이때 $\overline{BH_3} = k$ 이고 두 직각삼각형 BH_3F' , AH_3F' 에서 피타고라스의 정리에 의하여 각각

$$\overline{AF'}^2 - \overline{AH_3}^2 = \overline{F'H_3}^2, \quad \dots \text{㉓}$$

$$\overline{BF'}^2 - \overline{BH_3}^2 = \overline{F'H_3}^2 \quad \dots \text{㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하면

$$(3k+2)^2 - (3k)^2 = (7k-2)^2 - k^2$$

$$48k^2 - 40k = 0$$

$$\therefore k = \frac{5}{6} \quad (\because k > 0)$$

즉, $\overline{AF'} = \frac{9}{2}$, $\overline{AH_3} = \frac{5}{2}$ 이고 이를 ㉓에 대입하면

$$\overline{F'H_3} = \sqrt{14}$$

이때 직각삼각형 OAF에서

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{14}}{2}, \overline{AF} = \frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{OF} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AF}^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$)에서

$$1 + b^2 = \overline{OF}^2$$

$$b^2 = \frac{39}{4} - 1 = \frac{35}{4}$$

$$\therefore 4 \times b^2 = 35$$

23

정답 ④

초점이 $F(c, 0)$ ($c > 0$)이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 인 타원의 제 1사분면 위의 교점 P에서 이 포물선의 준선, 즉 $x = -c$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 포물선의 성질에 의하여 $\overline{PH} = \overline{PF}$ 이고, 타원의 성질에 의하여 두 점 P, H는 y축에 대하여 대칭이다.

점 P의 x좌표가 c이므로

$$\overline{PH} = 2c \quad \dots \text{㉑}$$

$\overline{BF} = \sqrt{3}$ 이므로 점 B의 x좌표는 $c + \sqrt{3}$ 이다.

이때 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는

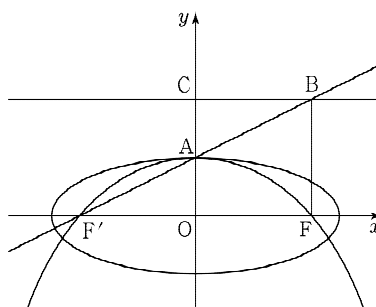
$$2c + 2\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PH} + \overline{PF'} = 2c + 2\sqrt{3}$ 이고 ㉑에 의하여

$$\overline{PF'} = 2\sqrt{3}$$

24

정답 ③



포물선의 준선이 직선 AF' 및 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

$\angle OAF' = \angle BAC$, $\angle AOF' = \angle ACB$ 이고 $\overline{OA} = \overline{AC}$ 이므로

두 삼각형 $AF'O$ 와 ABC 는 합동이고 두 삼각형 $AF'O$ 와 $BF'F$ 는 닮음이다.

따라서 $\angle BFF' = \angle AOF' = \frac{\pi}{2}$ 이고 주어진 조건에 의하여

$$\overline{OF} = \overline{BC} = 4$$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{BF} = \overline{OF} = 4$ 이므로

$$\overline{OA} = \frac{1}{2} \times \overline{BF} = 2$$

따라서 $\overline{AF} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OF}^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 타원의 장축의 길이는 $4\sqrt{5}$

25

정답 ②

포물선의 초점이 $F(3, 0)$ 이므로

$$\text{포물선의 방정식은 } y^2 = 12x$$

$$\text{준선의 방정식은 } x = -3$$

선분 PH는 x축과 평행하고 조건 (가)에 의하여 두 선분 $F'Q$, FP 가 평행하므로 사각형 PHF'F는 평행사변형이다.

즉, $\overline{F'F} = \overline{PH} = 6$ 이므로 점 P의 x좌표는 6이다.

점 P에서 포물선의 준선 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 P'이라 하면

$$\overline{PP'} = 3 + 6 = 9 \text{이므로 포물선의 성질에 의하여}$$

$$\overline{PF} = 9$$

타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면 $\overline{F'F} = \overline{QF} = 6$ 이므로 타원의 정의에



의하여

$$\overline{QF'} = 2a - 6$$

$\angle HF'O = \theta$ 라 하면 직각삼각형 $HF'O$ 에서

$$\cos \theta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

삼각형 $QF'F$ 는 이등변삼각형이므로 점 F 에서 선분 QF' 에 내린 수선의 발은 선분 QF' 의 중점이다.

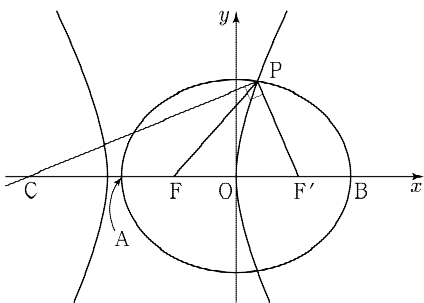
따라서 $\cos(\angle QF'F) = \cos \theta = \frac{a-3}{6}$ 에서

$$\frac{a-3}{6} = \frac{1}{3} \quad \therefore a = 5$$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2a = 10$

26

정답 72



그림과 같이 쌍곡선의 F' 이 아닌 초점을 C 라 할 때 쌍곡선의 점근선의 교점이 F 이므로

$$\overline{CF} = \overline{FF'} = \overline{PF}$$

따라서 세 점 C, P, F' 은 중심이 F 이고 지름이 선분 CF' 인 원 위에

있고, 삼각형 CPF' 은 $\angle CPF' = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

점 F' 의 x 좌표를 c ($c > 0$) 이라 하면 $F(-c, 0)$ 이고 쌍곡선의 점근선의 교점이 F 이므로

$$C(-3c, 0)$$

$\overline{FF'} = 2c$ 에서 $\overline{PF} = \overline{FF'} = 2c$ 이고 타원의 장축의 길이가 12 이므로

$$\overline{PF'} = 12 - 2c$$

쌍곡선의 주축의 길이가 $2c$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{CP} = \overline{PF'} + 2c = 12$$

삼각형 CPF' 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{CF'}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PF'}^2$$

$$16c^2 = 12^2 + (12 - 2c)^2$$

$$c^2 + 4c - 24 = 0 \quad \therefore c = 2\sqrt{7} - 2 \quad (\because c > 0)$$

따라서 $a = 7, b = 2$ 이므로 $10a + b = 72$

27

정답 ③

$\overline{AF} = p$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AF'} = p + 10$$

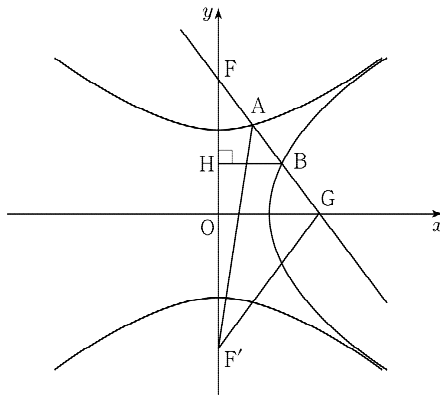
$\overline{GF} = \overline{GF'}$ 이므로 $\overline{GF} = m$ 이라 하면

$$\overline{AG} = m - p, \overline{GF'} = m$$

삼각형 $AF'G$ 의 둘레의 길이가 30 이므로

$$\overline{AF'} + \overline{AG} + \overline{GF'} = 2m + 10 = 30$$

$$\therefore m = 10$$



점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{BH} = \frac{15}{4}$ 이므로

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{BG} = \overline{BH} = \frac{15}{4}$$

두 삼각형 FBH, FGO 는 닮음이므로

$$\overline{BF} : \overline{GF} = \overline{BH} : \overline{GO}$$

$$\frac{25}{4} : 10 = \frac{15}{4} : 2k \quad \therefore k = 3$$

직각삼각형 FOG 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OF} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \quad \therefore c = 8$$

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$) 이라 하면 쌍곡선의

주축의 길이가 10 이므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5$$

쌍곡선의 두 초점의 좌표가 $F(0, 8), F'(0, -8)$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$a^2 + b^2 = 64 \quad \therefore a = \sqrt{39}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{25} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{5}{\sqrt{39}}x$$

직선 $5x + \sqrt{39}y = 0$ 과 점 $G(6, 0)$ 사이의 거리는

$$l = \frac{5 \times 6}{\sqrt{25 + 39}} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

28

정답 ③

점 A 의 좌표를 $(6, a)$ 라 하면 점 A 에서 포물선에 접하는 접선의 방정식은

$$ay = 2p(x + 6)$$

$$\therefore B(-6, 0), \overline{BF} = p + 6$$

$\overline{AH} = p + 6$ 이고 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH} = 6 + p$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{BC} = 2 \times \overline{AH}$ 이므로

$$\overline{FC} = \overline{AH}$$

또한, 두 선분 AF, CH 가 서로 수직이므로 두 선분의 교점을 P 라 하면 두 삼각형 APH, FPC 는 서로 RHA 합동이다.



따라서 두 선분 AF, CH가 수직이고 서로를 이등분하므로 사각형 AHFC는 마름모이다.

$$\therefore \overline{AH} = \overline{HF} = \overline{FC} = \overline{AC}$$

즉, $\overline{AH} = \overline{AF} = \overline{FH}$ 이므로 삼각형 AFH는 한 변의 길이가 $6+p$ 인 정삼각형이고, 점 F에서 선분 AH에 내린 수선의 발을 F'이라 하면

$$\overline{F'A} = 6-p$$

이고, $\angle FAH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{6-p}{6+p} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \therefore p=2$$

두 삼각형 AFH, AFC는 한 변의 길이가 $p+6=8$ 인 정삼각형이므로

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 8\sqrt{3}$$

29

정답 ①

두 삼각형 PRF', QRF는 서로 닮음이고 닮음비는 1:2이다.

F'(-3, 0), F(3, 0)이고 $\overline{F'F} = \overline{RF}$ 이므로

$$R(-9, 0)$$

점 R에서 그은 접선 중 기울기가 양수인 접선의 기울기가 직선 l의 기울기이다. 직선 l의 기울기를 m ($m > 0$)이라 할 때, 접선의 방정식은

$$y = mx + \sqrt{25m^2 + 16} \quad (\because \text{점 P는 제 2사분면 위의 점})$$

이고 이 접선이 점 R(-9, 0)을 지나므로

$$0 = -9m + \sqrt{25m^2 + 16}$$

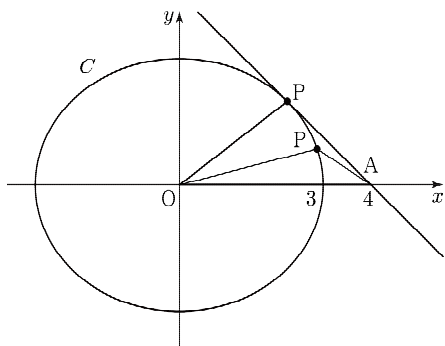
$$81m^2 = 25m^2 + 16$$

$$56m^2 = 16 \quad \therefore m = \frac{\sqrt{14}}{7} \quad (\because m > 0)$$

30

정답 ③

선분 OA는 타원 C와 점 (3, 0)에서 항상 만나고, 선분 OP는 타원 C와 점 P에서 항상 만나므로 타원 C와 선분 AP는 점 P 이외의 교점을 가지지 않아야 한다.



즉, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되기 위해서는 그림과 같이 직선 AP가 타원 C에 접해야 하므로 이때의 점 P의 좌표를 $P(x_1, y_1)$ 이라

하면 점 P에서 타원 C에 그은 접선 $\frac{x_1x}{9} + \frac{y_1y}{7} = 1$ 이 점 A(4, 0)을 지나야 하므로

$$\frac{4}{9}x_1 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{9}{4}$$

점 P는 타원 C 위의 점이므로 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에 대입하면

$$y_1 = \frac{7}{4} \quad (\because y_1 > 0)$$

따라서 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times y_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{2}$$

31

정답 ④

$\angle PQF' = \frac{\pi}{2}$ 이므로 원 C는 선분 PF'을 지름으로 하는 원이므로

원주각의 성질에 의하여

$$\angle PFF' = \frac{\pi}{2}$$

이때 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 점 P의

x좌표는 점 F의 x좌표와 같으므로 쌍곡선의 방정식에 $x=c$ 를 대입하면

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad (\because a^2 + b^2 = c^2)$$

이므로

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \therefore y = \frac{b^2}{a} \quad (\because y > 0)$$

점 $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{c}{a^2}x - \frac{1}{a}y = 1$ 이고 이 직선이

점 Q를 지나므로 $x=0, y=-1$ 을 각각 대입하면

$$a=1$$

따라서 $P(c, b^2)$ 이고 사각형 PF'QF의 넓이는 두 삼각형 FF'Q,

FF'P의 넓이의 합과 같으므로

$$8 = \frac{1}{2} \times 2c \times 1 + \frac{1}{2} \times 2c \times b^2$$

$$= c + b^2c = c + (c^2 - 1)c = c^3 \quad (\because 1 + b^2 = c^2) \quad \therefore c=2$$

32

정답 18

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 주축의 길이는 4이므로 $\overline{PF} = k$ 라 하면

$$\overline{PF'} = k+4$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{PR} = \frac{1}{3}k + \frac{4}{3}$ 이므로

$$\overline{RF'} = \frac{2}{3}k + \frac{8}{3}$$

이때 두 직선 RQ, PF는 서로 평행하므로 두 삼각형 RF'Q, PF'F는 서로 닮음이고 그 닮음비는

$$\overline{RF'} : \overline{PF'} = 2 : 3$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{4+5}=6$ 이므로

$$\overline{FF'} = 6, \overline{QF'} = 4$$

즉, 점 Q의 좌표는 Q(1, 0)이다.



$-\frac{1}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}(x-2) + \sqrt{\frac{36}{9} + 32} = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$$

접선의 방정식의 y 절편이 $\frac{a}{3} = \frac{20}{3}$ 이므로 양수 a 의 최솟값은 20

35

정답 ②

포물선 $y^2 = 8(x-4)$ 의 꼭짓점은 $(4, 0)$, 초점은 $F(6, 0)$ 이다.

점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$b^2 = 8(a-4) \quad \dots \textcircled{1}$$

점 A에서 포물선에 접하는 접선의 방정식은 $by = 8\left(\frac{x+a}{2} - 4\right)$ 이고

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{a}{2} = 4 \quad \therefore a = 8$$

이때 $a = 8$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

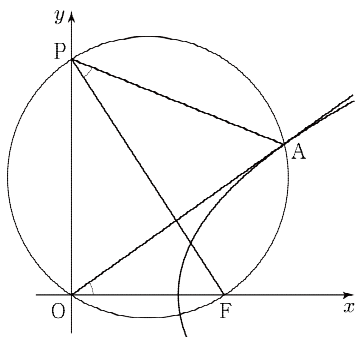
$$b^2 = 32 \quad \therefore b = 4\sqrt{2}$$

따라서 점 A의 좌표는 $(8, 4\sqrt{2})$ 이고 접선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \dots \textcircled{2}$$

$\angle AOF = \theta$ 라 하면 $\textcircled{2}$ 에서 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

$\angle AOF = \angle APF$ 이므로 다음 그림과 같이 네 점 A, P, F, O는 한 원 위에 있다.



점과 점 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{AF} = \sqrt{4+32} = 6$ 이므로 이 원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{AF}}{\sin\theta} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6\sqrt{3} \text{ 이므로 원의 지름의 길이는 } 6\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

또한, $\angle POF = \frac{\pi}{2}$ 이므로 원주각의 성질에 의하여 선분 PF는 원의

지름이고 따라서 $\overline{PF} = 6\sqrt{3}$ 이고 삼각형 POF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

이므로 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 8 = 24\sqrt{2}$$

36

정답 160

곡선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $(t, 2\sqrt{pt})$ 에서의 접선을 l 이라 하고 직선 l 이

① 타원 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 과 접할 때의 t 의 값을 t_1

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 의 한 꼭짓점 $(-a, 0)$ 을 지날 때의 t 의 값을 t_2

라 하자.

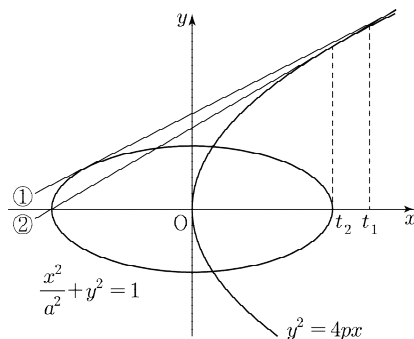
$t > t_1$ 일 때, 직선 l 은 타원과 만나지 않는다.

$t = t_1$ 일 때, 직선 l 은 타원과 한 점에서만 만난다.

$t_2 < t < t_1$ 일 때, 주어진 조건을 만족시킨다.

$t = t_2$ 일 때, 두 점 P, Q의 y 좌표의 곱이 0이다.

$t < t_2$ 일 때, 두 점 P, Q의 y 좌표의 곱이 음수이다.



즉, 조건을 만족시키는 양수 t 의 값의 범위는 $t_2 < t < t_1$ 이므로

$$t_1 = 3, t_2 = \sqrt{5}$$

①에서 곡선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $(3, 2\sqrt{3p})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{3p}y = p(x+3) \quad \therefore y = \sqrt{\frac{p}{3}}x + \sqrt{3p}$$

기울기가 $\sqrt{\frac{p}{3}}$ 이고 타원에 접하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}x \pm \sqrt{\frac{a^2p}{3}} + 1$$

이므로

$$\sqrt{3p} = \sqrt{\frac{a^2p}{3}} + 1 \quad \therefore p = \frac{3}{9-a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

②에서 곡선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $(\sqrt{5}, 2\sqrt{\sqrt{5}p})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{\sqrt{5}p}y = p(x + \sqrt{5})$$

이고 이 접선은 점 $(-a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = p(-a + \sqrt{5}) \quad \therefore a = \sqrt{5} \quad (\because p > 0)$$

①에 $a = \sqrt{5}$ 를 대입하면 $p = \frac{3}{4}$

따라서 구하는 값은

$$18 \times \left(\frac{a}{p}\right)^2 = 18 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{4}}\right)^2 = 18 \times \frac{80}{9} = 160$$

37

정답 ④

$(\overline{AP} - 2)^2 = (\overline{BP} - 1)^2$ 에서



$$(\overline{AP}-2)^2 - (\overline{BP}-1)^2 = 0$$

$$(\overline{AP}-\overline{BP}-1)(\overline{AP}+\overline{BP}-3)=0$$

$$\therefore \overline{AP}-\overline{BP}=1 \text{ 또는 } \overline{AP}+\overline{BP}=3$$

(i) $\overline{AP}-\overline{BP}=1$ 일 때

점 P의 자취는 두 점 A, B를 두 초점으로 하고 주축의 길이가 1인 쌍곡선 위의 점이다.

또한 $\overline{AP} > \overline{BP}$ 이므로 점 P의 x좌표는 양수이다.

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 (x > 0)$ 이고 점근선의

방정식은

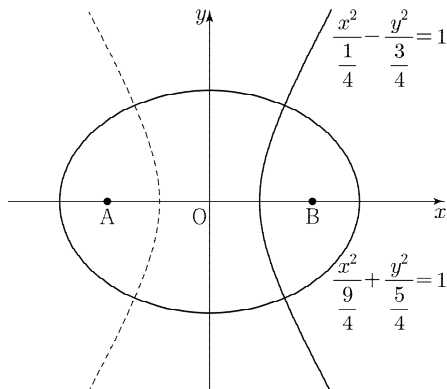
$$y = \pm \sqrt{3}x \quad \dots \textcircled{7}$$

(ii) $\overline{AP}+\overline{BP}=3$ 일 때

점 P의 자취는 두 점 A, B를 두 초점으로 하고 장축의 길이가 3인 타원의 점이다.

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 점 P의 자취는 다음 그림과 같다.

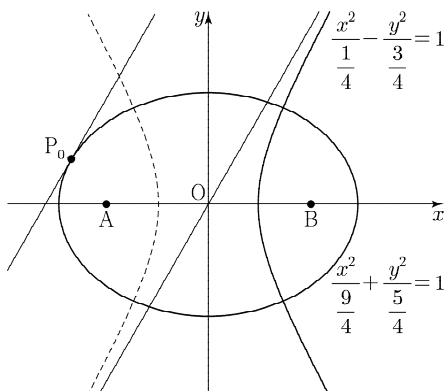


주어진 조건에 의하여 직선 $y=mx+n$ 은 쌍곡선 또는 타원과 오직 한 점 P_0 에서만 만나야 한다.

이때 점 P_0 의 x좌표가 음수이므로 점 P_0 는 쌍곡선 위에 있지 않다.

따라서 직선 $y=mx+n$ 은 타원과 점 P_0 에서 접하고 직선의 기울기 m 은 점근선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.

$$\therefore m \geq \sqrt{3} \quad (\because \textcircled{7}) \quad \dots \textcircled{8}$$



이때 $m \times n$ 의 값은 직선 $y=mx+n$ 이 쌍곡선의 점근선과 평행할 때 최소이다.

$$\therefore m = \sqrt{3} \quad (\because \textcircled{8})$$

직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이 타원과 접해야 하므로

$$y = \sqrt{3}x + \sqrt{\frac{9}{4} \times 3 + \frac{5}{4}} = \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore n = 2\sqrt{2}$$

따라서 $m \times n$ 의 최솟값은 $2\sqrt{6}$

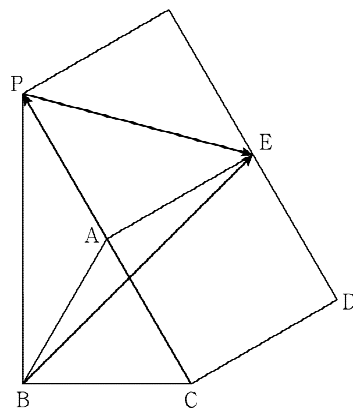
2 평면벡터

38

정답 ③

다음 그림과 같이 점 D가 점 E에 놓이도록 정사각형 ACDE를 평행이동하고, 점 A가 이동된 점을 P라 하면

$$|\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{이다.}$$



$$\angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \angle BAP = \frac{2}{3}\pi \text{ 이고 삼각형 ABP는 } \overline{AB} = \overline{AP} \text{ 인}$$

이등변삼각형이므로

$$\angle APB = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \angle PBC = \angle ABP + \angle ABC = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 삼각형 PBC는}$$

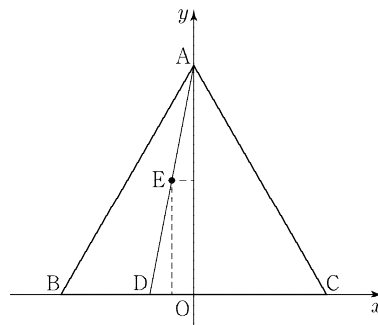
직각삼각형이다.

삼각형 PBC에서 피타고라스의 정리에 의하여 선분 BP의 길이는

$$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

39

정답 ②



그림과 같이 선분 BC의 중점을 좌표평면의 원점 O라 할 때, 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

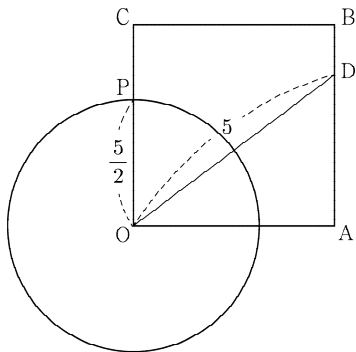


$A(0, 6\sqrt{3}), B(-6, 0), C(6, 0)$
 따라서 선분 BC 를 1 : 2 로 내분하는 점 D 의 좌표는 $(-2, 0)$ 이고,
 선분 AD 의 중점 E 의 좌표는 $(-1, 3\sqrt{3})$ 이다.
 따라서
 $\overrightarrow{AD} = (-2, 0) - (0, 6\sqrt{3}) = (-2, -6\sqrt{3})$
 $\overrightarrow{CE} = (-1, 3\sqrt{3}) - (6, 0) = (-7, 3\sqrt{3})$
 이므로
 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = (-9, -3\sqrt{3})$
 $\therefore |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}| = |(-9, -3\sqrt{3})|$
 $= \sqrt{(-9)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3}$

40

정답 ②

선분 AB 를 3 : 1 로 내분하는 점을 D 라 하면
 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PD} \quad \therefore \overrightarrow{AD} = 3$
 직각삼각형 OAD 에서 피타고라스의 정리에 의하여
 $OD = \sqrt{OA^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 한편, $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| \leq 30$ 이므로
 $|\overrightarrow{PD}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| \leq \frac{15}{2} \quad \dots \textcircled{1}$
 점 P 는 점 O 를 중심으로 하는 원 위를 움직이는 점이므로 원의
 반지름의 길이를 r 라 하면
 $|\overrightarrow{PD}| \leq |\overrightarrow{PO}| + |\overrightarrow{OD}| = r + 5$
 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $|\overrightarrow{PD}|$ 의 최댓값은 $\frac{15}{2}$ 이므로
 $r + 5 = \frac{15}{2} \quad \therefore r = \frac{5}{2}$



즉, $|\overrightarrow{PC}|$ 는 점 P 가 선분 OC 위의 점일 때 최소가 된다.
 따라서 구하는 값은
 $4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

41

정답 ③

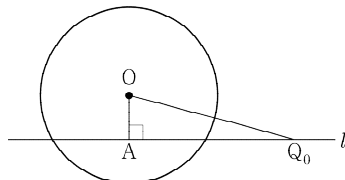
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{PO}$
 라 두면
 $|\overrightarrow{PO}| = 1$ 이므로 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은
 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| + 2 \quad \dots \textcircled{1}$
 이때 두 점 A 와 O 를 지나는 직선과 원 C 와의 교점을 A' 이라 두면

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O}$ 이므로
 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{A'B}|$
 한편, $2\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ 를 만족하는 점 C 는 선분 AO 를 2 : 1 로
 외분하는 점이므로 점 A' 과 같다.
 따라서 $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA'}| = |\overrightarrow{A'B}| = 2\sqrt{2}$ 이므로 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의
 최댓값은 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $2\sqrt{2} + 2$

42

정답 14

조건 (가)에서
 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = 3$
 $|\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$
 조건 (나)에서
 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| \leq \sqrt{29}$
 $|\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2 \leq 29 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여
 $2|\overrightarrow{OP}|^2 + 2|\overrightarrow{OQ}|^2 \leq 38$
 $|\overrightarrow{OQ}|^2 \leq 15 (\because |\overrightarrow{OP}| = 2) \quad \therefore |\overrightarrow{OQ}| \leq \sqrt{15}$
 $|\overrightarrow{AQ}|$ 의 값이 최대가 되는 점 Q 를 점 Q_0 이라 하자.



직각삼각형 OAQ_0 에서
 $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OQ_0}| = \sqrt{15}$
 따라서 $|\overrightarrow{AQ}|^2$ 의 최댓값은
 $|\overrightarrow{AQ_0}|^2 = |\overrightarrow{OQ_0}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 = 14$

43

정답 ⑤

선분 AP 의 중점을 M 이라 하면
 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BP} = 2 \times \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BP}}{2} = 2\overrightarrow{BM}$
 이때 점 P 는 원 C 위를 움직이는 점이므로 점 M 의 자취는 원 C 와
 점 A 에서 내접하고 반지름의 길이가 2 인 원이다.
 이 원의 중심을 C' 라 하면
 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'M}$
 즉, $|\overrightarrow{BM}|$ 의 값은 벡터 $\overrightarrow{C'M}$ 이 벡터 $\overrightarrow{BC'}$ 와 같은 방향일 때 최대, 반대
 방향일 때 최소가 된다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 구하는 값은

$$\sin(\angle ACE) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

48

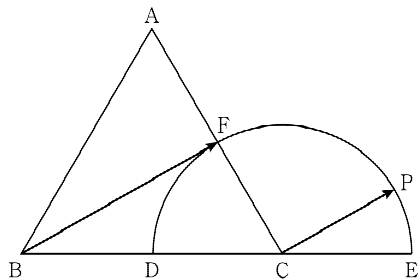
정답 ⑤

반원의 지름인 선분 DE의 중점이 C이므로 $\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{CF} = 1$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

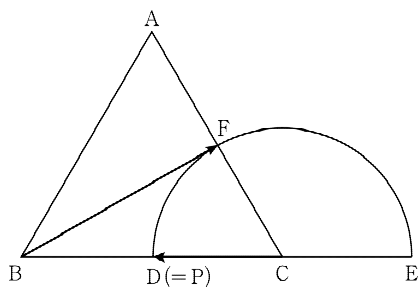
따라서 점 F는 선분 AC의 중점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AC}$ 는 서로 수직이다. $\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CP} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

점 P가 반원의 호 DE 위를 움직이는 점이므로 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CP}$ 는 다음 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CP}$ 가 서로 평행할 때 최대이고 그 값은 $\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ 이다.



$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CP}$ 는 다음 그림과 같이 점 P가 점 D와 일치할 때 최소이고 그 값은 $\sqrt{3} \times 1 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ 이다.



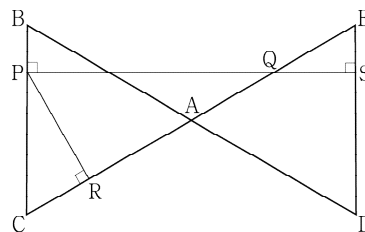
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$\sqrt{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

49

정답 ⑥

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 와 $\overrightarrow{BC}$ 가 서로 수직이어야 하므로 그림과 같이 두 점 P와 Q를 잡을 수 있고, 점 P에서 직선 CE에 내린 수선의 발을 R, 직선 PQ와 선분 DE의 교점을 S라 하자.



$\overline{CP} = a$ 로 놓으면 $\overline{CR} = \frac{a}{2}$ 이고, $\overline{AR} = \overline{AC} - \overline{CR} = 2 - \frac{a}{2}$ 이다.

또한, $\overline{ES} = \overline{DE} - \overline{DS} = \overline{DE} - \overline{CP} = 2 - a$ 이므로 $\overline{QE} = 4 - 2a$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QE} &= -|\overrightarrow{AR}| \times |\overrightarrow{QE}| \\ &= -\left(2 - \frac{a}{2}\right)(4 - 2a) \\ &= -a^2 + 6a - 8 \end{aligned}$$

이고, $-a^2 + 6a - 8 = -\frac{5}{4}, (2a - 3)(2a - 9) = 0$ 에서

$$a = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < a < 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore |\overrightarrow{PD}| &= \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{DS}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{57}}{2} \end{aligned}$$

50

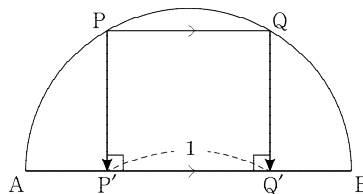
정답 ②

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{BQ} \cdot (\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BP} \cdot (\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BQ} \cdot (-\overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 2 \end{aligned}$$

즉, 두 점 P, Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발 P', Q'에 대하여 $\overrightarrow{P'Q'} = 1$ 이다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} \\ &= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'} \\ &= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} \end{aligned}$$

이고 두 선분 AB와 PQ가 평행할 때 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 값이 최소이다.



이때 두 벡터 $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{QQ'}$ 의 방향이 같고

$$|\overrightarrow{PP'}| = |\overrightarrow{QQ'}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 값이 최소일 때

$$|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'}| = 2|\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{3}$$



51

정답 ③

점 B는 선분 AC의 수직이등분선 위의 점이므로 선분 AC 위의 점 Y에 대하여

$$|\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{BY}|$$

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{CY}$ 이고, $|\overrightarrow{XY}| = 3$ 이므로

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{CY} = 1$$

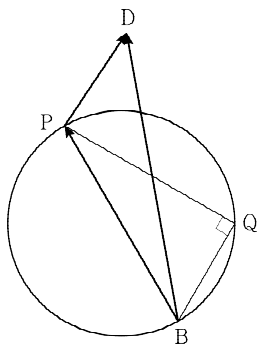
삼각형 ABX에서 코사인법칙에 의하여

$$|\overrightarrow{BX}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AX}|^2 - 2 \times |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AX}| \times \cos(\angle BAX)$$

$$= 25 + 1 - 2 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= 21$$

즉, $|\overrightarrow{BX}| = \sqrt{21}$



$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BD}$ 라 하면

$$|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{BR}| = \sqrt{21}$$

$\overrightarrow{BQ} = k$ 라 하면 $\angle PBQ = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\angle PQB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $|\overrightarrow{BP}| = 2k$ 이고

$$|\overrightarrow{PD}| = |\overrightarrow{BQ}| = k$$

삼각형 BPD에서 코사인법칙에 의하여

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 - 2 \times |\overrightarrow{BP}| \times |\overrightarrow{PD}| \times \cos(\angle BPD)$$

$$= 4k^2 + k^2 - 2 \times 2k \times k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 7k^2$$

따라서 $7k^2 = 21$, $k^2 = 3$ 이고

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{BQ}|^2 = k^2 = 3$$

52

정답 ②

선분 AC의 중점을 M이라 하면 두 선분 BM, AC는 서로 수직이다.

원 C의 중심을 O라 하면

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DP} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP})$$

$$= \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{OP}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DO}$ 는 모두 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 와 수직이므로 서로 평행하다.

$$\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{7} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

두 벡터 $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{DO}$ 가 서로 수직이므로

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$$

따라서 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DP} = \frac{3\sqrt{21}}{2} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OP}$ 이고 이 값은 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OP}$ 가

최대일 때, 즉 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OP}$ 가 서로 평행할 때 최대이므로

$$\frac{3\sqrt{21}}{2} + |\overrightarrow{BD}| \times \sqrt{7} = \frac{25}{8} \sqrt{21}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BD}| = \frac{13\sqrt{3}}{8}$$

직각삼각형 BMD에서 피타고라스의 정리에 의하여 $|\overrightarrow{MD}| = \frac{5\sqrt{3}}{8}$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{8} = \frac{12+5\sqrt{3}}{8}$$

53

정답 79

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GP}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= 3\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AB}$$

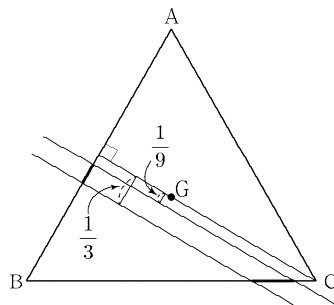
점 G를 지나고 직선 AB에 평행한 직선을 l, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 P'이라 하면

$$3\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AB} = 3|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{GP'}| = 9|\overrightarrow{GP'}| \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 ①의 최댓값이 $|\overrightarrow{AB}| = 3$, 최솟값이 1이므로

$$1 \leq 9|\overrightarrow{GP'}| \leq 3 \quad \therefore \frac{1}{9} \leq |\overrightarrow{GP'}| \leq \frac{1}{3}$$

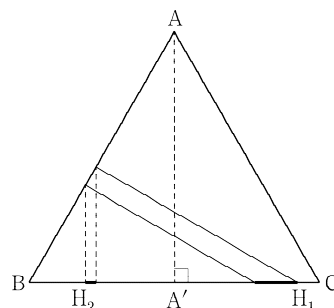
즉, 점 P가 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



한편, 두 점 A, P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 A', H라 하면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'H} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \dots \textcircled{2}$$

②의 값이 최대가 되도록 하는 점 H를 H₁, 최소가 되도록 하는 점 H를 H₂라 하면 다음 그림과 같다.



이때 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ 에서 $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{BH_1} = 2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{9}\right) = \frac{25}{9}$$

$$\overrightarrow{BH_2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12}$$

이고 ㉠에 의하여 M, m 의 값은

$$M = \overrightarrow{A'H_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{25}{9} - \frac{3}{2} \right) \times 3 = \frac{23}{6}$$

$$m = \overrightarrow{A'H_2} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{2} \right) \times 3 = -\frac{11}{4}$$

따라서 구하는 값은

$$12 \times (M - m) = 12 \times \left(\frac{23}{6} + \frac{11}{4} \right) = 79$$

54

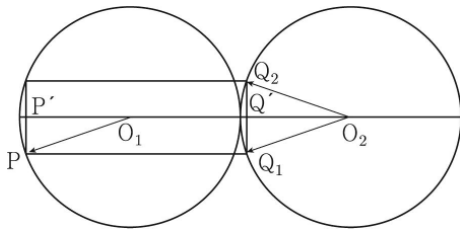
정답 21

주어진 조건 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = 4$ 에 의하여 두 점 P, Q의 직선 O_1O_2

위로의 정사영을 P', Q' 이라 하면

$$\overrightarrow{P'Q'} = 2 = \overrightarrow{O_1O_2}$$

이다. 점 P의 위치를 고정시킨 후 점 Q의 위치를 움직여도 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 값은 변하지 않으므로, 점 P의 위치를 다음 그림과 같이 두면 점 Q의 위치는 다음 그림에서 Q_1 또는 Q_2 이다.

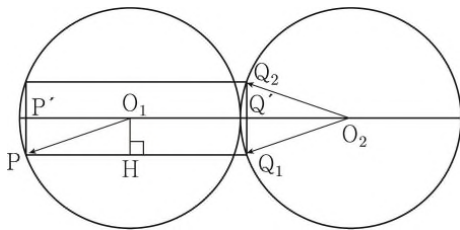


이때 $Q = Q_1$ 이면 $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_2Q}$ 이므로

$$|\overrightarrow{PO_1} + \overrightarrow{QO_2}| = 2 \neq \frac{\sqrt{15}}{2}$$

따라서 $Q = Q_2$ 이고 점 O_1 에서 위 그림의 선분 PQ_1 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$2\overline{PH} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \therefore \overline{PH} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



직각삼각형 O_1PH 에서 $\overline{O_1P} = 1$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{O_1H} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \overline{PP'} = \overline{O_1H} = \frac{1}{4}$$

또한, $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_1Q} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$, $\overline{PQ_1} = 2$ 이므로 직각삼각형

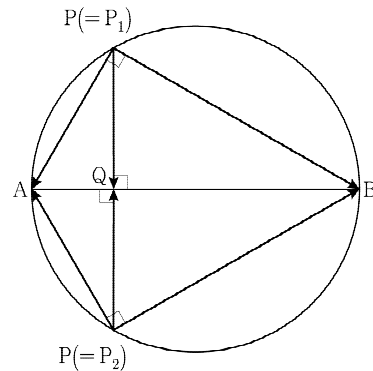
QQ_1P 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PQ_2} = \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{17}{4}, p+q=4+17=21$$

55

정답 ①



조건 (가)에 의하여 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$$

조건 (나)에 의하여 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}$ 는 서로 수직이고

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = 6$ 에서 $\overline{AQ} = k$ 라 하면

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \overrightarrow{P_2Q} = \overline{AQ} \times \overline{BQ}$$

$$3 \times 3 = k \times 3k$$

$$\therefore k = \sqrt{3}$$

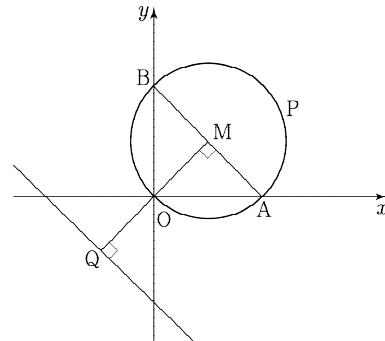
따라서 구하는 값은 $|\overrightarrow{AB}| = 4k = 4\sqrt{3}$ 이다.

56

정답 ③

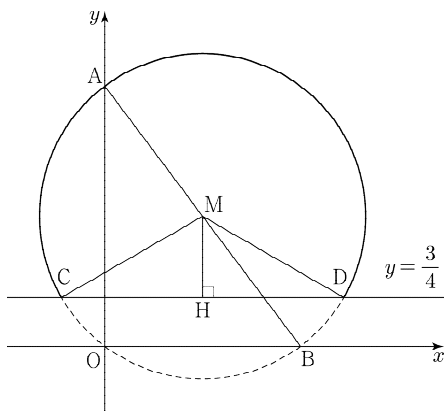
두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

점 $M(1, 1)$ 에 대하여 $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{2}$ 이므로 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MQ} = -4$ 를 만족시키는 점 Q는 선분 MQ를 직선 OM에 정사영한 길이가 $2\sqrt{2}$ 인, 즉 다음 그림과 같이 점 M으로부터의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이고 직선 OM과 수직인 직선 중 제1사분면을 지나지 않는 직선 위의 점이다.



점 Q가 나타내는 직선과 점 P가 나타내는 원의 중심까지의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최솟값은

$$2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$



$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX} = 0$ 이므로 점 X는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

또한 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} \geq 3$ 에서 점 X의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} = 4y \geq 3$$

이므로 $y \geq \frac{3}{4}$ 이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이므로 점 X가 나타내는 집합은 점 $M(\frac{3}{2}, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 원이다.

원과 직선 $y = \frac{3}{4}$ 이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하고, 점 M에서

직선 $y = \frac{3}{4}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\cos(\angle CMH) = \cos(\angle DMH) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\angle CMH = \angle DMH = \frac{\pi}{3}, \angle CMD = \frac{2}{3}\pi$$

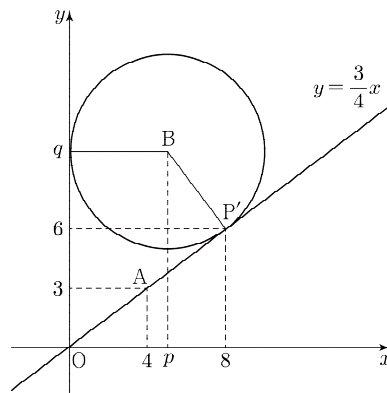
따라서 점 X의 집합이 나타내는 도형의 길이는

$$\frac{5}{2} \times \frac{4}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

조건 (가)에 의하여 점 P는 점 $B(p, q)$ 를 원의 중심으로 하고 반지름의 길이가 p 인 y 축에 접하는 원 위의 점이다.

또한 조건 (나)를 만족시키는 점 P를 P'이라 하면 원과 직선

$y = \frac{3}{4}x$ 는 점 P'에서 서로 접해야 하므로 다음 그림과 같다.



$\overline{BP'} = p$ 이므로

$$\overline{BP'}^2 = (p-8)^2 + (q-6)^2 = p^2$$

$$\therefore 16p = q^2 - 12q + 100 \quad \dots \textcircled{7}$$

직선 BP'은 직선 $y = \frac{3}{4}x$ 와 서로 수직이므로 직선 BP'의 기울기는

$-\frac{4}{3}$ 이다.

$$\frac{q-6}{p-8} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore 4p = -3q + 50 \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하면

$$-12q + 200 = q^2 - 12q + 100$$

$$q^2 = 100$$

$$\therefore q = 10 (\because q > 0), p = 5$$

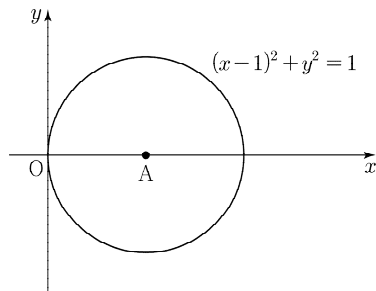
$$\therefore p + q = 15$$

점 Q의 좌표를 (x, y) 라 하면 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} \\ &= (1, 0) + (x, y) \\ &= (x+1, y) \end{aligned}$$

점 Q는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

점 P는 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 위의 점이다.

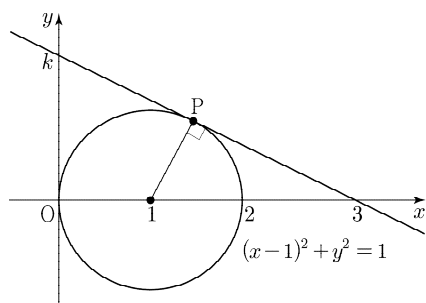


조건 (나)에서 모든 실수 t 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = t(3\overrightarrow{OA}) + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$3\overrightarrow{OA} = (3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, k)$ 이므로 점 P는 두 점 $(3, 0)$, $(0, k)$ 를 지나는 직선 위의 점이다.

이때 점 P가 오직 하나 존재하므로 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 두 점 $(3, 0)$, $(0, k)$ 를 지나는 직선은 다음 그림과 같이 접한다.



두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$ 을 각각 점 C, D라 하면 $\angle CDP = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$k = 3 \times \tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

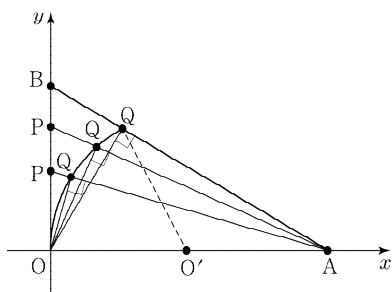
60

정답 ②

조건 (가)에 의하여 점 Q는 선분 AP 위의 점이고, 조건 (나)에서

$$\overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 선분 OA를 지름으로 하는 원의 일부이다. 이 원의 중심을 O'이라 하자.



직각삼각형 OAB에서 $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = \sqrt{3}$ 이므로

$$\angle OAB = \frac{\pi}{6}$$

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 이고 중심각의

크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$$\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

61

정답 17

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OX}$ 가 이루는 각의 크기를 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$)라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OX} = |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{OX}| \times \cos \alpha \geq 0$$

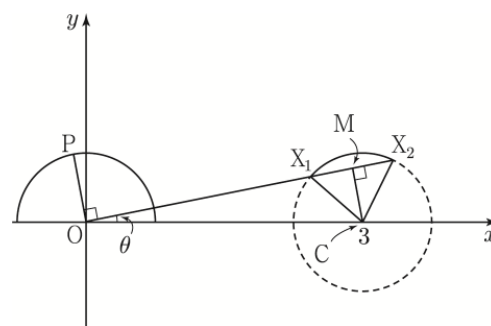
따라서 위 식을 만족시키는 α 의 값의 범위는

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

또한, 점 X가 나타내는 곡선의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 점 X는 중심각의

크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴의 호 위의 점이다.

따라서 점 P와 점 X가 나타내는 곡선은 다음 그림과 같다.



점 X가 그리는 호의 양 끝 점을 X_1 , X_2 라 하고 선분 X_1X_2 의 중점을 M, $C(3, 0)$ 이라 하면 두 선분 OP, CM은 평행하고 삼각형 X_1CX_2 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle MOC = \theta$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{34}}{6}$$

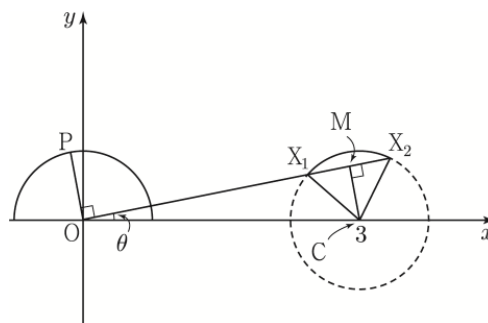
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right)$ 이므로

$$a = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$b = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta = \frac{\sqrt{34}}{6}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} \right)^2 = 17$$

[다른 풀이]



삼각형 X_1CX_2 이 직각이등변삼각형이므로

$$\angle OX_2C = \frac{\pi}{4}$$

$\overline{OC} = 3$, $\overline{CX_2} = 1$ 이므로 삼각형 OCX_2 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{4}} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$\frac{b}{a} = \tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$ 이므로

$$\frac{b}{a} = -\frac{1}{\tan \theta} = -\sqrt{17}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a} \right)^2 = 17$$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

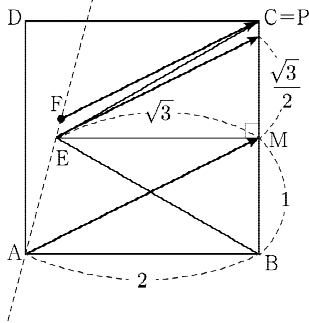
$$\overrightarrow{AP} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + a\overrightarrow{AE} = 2t\overrightarrow{AM} + a\overrightarrow{AE}$$

$$\therefore 2t\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - a\overrightarrow{AE}$$

$a\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ 라 놓으면 점 F는 직선 AE 위의 점이다.

$$2t\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FP}$$

이때 직선 FP가 직선 AM과 평행하고, 조건을 만족시키는 실수 t 의 값이 하나뿐이라면 직선 FP가 정삼각형 EBC와 한 점에서만 만나야 한다. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 2라 하면 다음 그림과 같다.



$$|\overrightarrow{AF}| : |\overrightarrow{AE}| = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overrightarrow{AE}$$

따라서 조건을 만족시키는 실수 t 의 값의 개수가 1이 되도록 하는

양수 a 의 값은 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

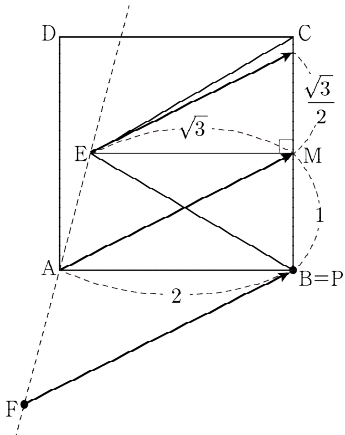
따라서 구하는 값은

$$\therefore 3a^2 = 3 \times \frac{12}{9} = 4$$

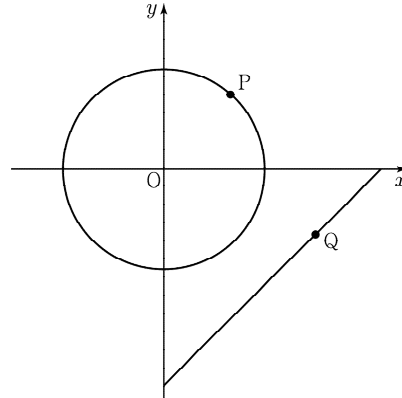
[참고]

직선 FP가 정삼각형 EBC와 한 점에서만 만날 때, 교점이 B이면

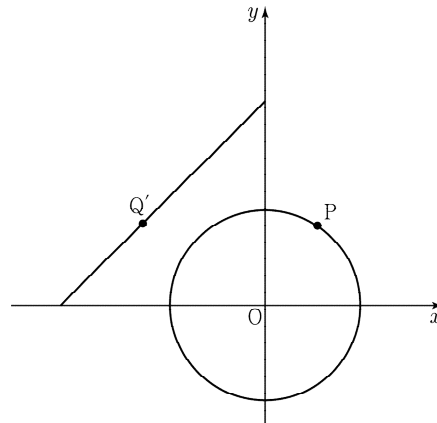
$a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 모순이다.



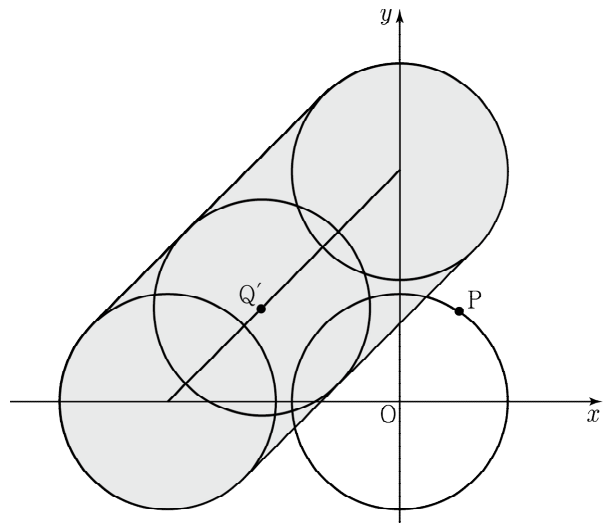
점 P와 점 Q의 자취는 다음 그림과 같다.



이때 $-\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'}$ 이라 하면 점 Q' 은 직선 $y = x + 3\sqrt{2}$ 위를 움직이는 점이고 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ'}$ 이므로 점 R의 자취는 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



따라서 색칠된 부분의 넓이는 반지름의 길이가 2인 원과 가로와 세로가 6, 세로의 길이가 4인 직사각형의 넓이의 합이므로

$$4\pi + 24$$

$$\therefore a + b = 4 + 24 = 28$$



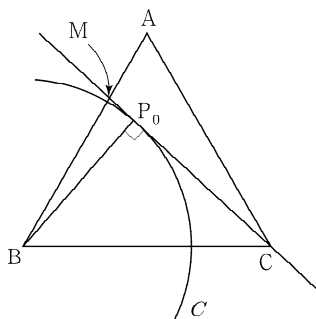
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 &= 4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + 9 \\ |\overrightarrow{AP}|^2 - 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 &= 9 \\ |\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{BP}|^2 = 9 \\ \therefore |\overrightarrow{BP}| &= 3 \end{aligned}$$

따라서 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C 위의 점이다. ... ㉠

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 M이라 하고, 조건 (나)의 식에서 양변을 4k로 나누어주면

$$\frac{1}{4k} \times \overrightarrow{CP} = \frac{3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{4}, \text{ 즉 } \overrightarrow{CP} = 4k \times \overrightarrow{CM}$$

을 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로 점 P는 직선 CM 위의 점이다. ... ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 점 P가 오직 하나 존재하므로 직선 CM은 원 C와 한 점 P₀에서 접한다. 삼각형 ABC의 한 변의 길이를 4a라 하면 $\overline{BM} = 3a$, $\overline{BC} = 4a$ 이므로 삼각형 MBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{MC}^2 &= \overline{BM}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{BM} \times \overline{BC} \times \cos(\angle MBC) \\ &= 9a^2 + 16a^2 - 2 \times 3a \times 4a \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 13a^2 \\ \therefore \overline{MC} &= \sqrt{13}a \end{aligned}$$

삼각형 MBC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{BP}_0$ 이고 동시에

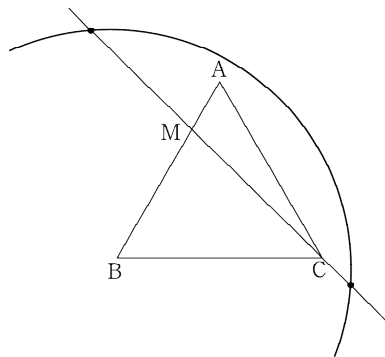
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{BM} \times \overline{BC} \times \sin(\angle MBC) &\text{이므로} \\ \frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{BP}_0 &= \frac{1}{2} \times \overline{BM} \times \overline{BC} \times \sin(\angle MBC) \\ \sqrt{13}a \times 3 &= 3a \times 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{39}}{6} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{52}{3} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \\ \therefore \sqrt{3} \times S &= 13 \end{aligned}$$

[참고]

$\overline{AB} \leq 3$ 인 경우, 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점 M에 대하여 점 P는 직선 CM 위의 점이므로 두 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 점 P의 개수가 2가 되므로 모순이다.



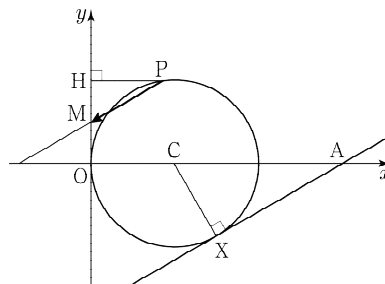
68

정답 15

선분 OH의 중점을 M이라 하면 점 P는 원점이 아니므로 $k \neq 0$ 이고

$$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PH} = 2\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{AX} \quad \therefore \overrightarrow{AX} = \frac{2}{k}\overrightarrow{PM} \quad (\because k \neq 0)$$

즉, 직선 AX는 $\overrightarrow{PM}$ 을 방향벡터로 하는 직선이고, 점 X가 오직 하나 존재하므로 직선 AX는 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 에 접한다.



원의 중심을 C(1, 0)이라 하면 삼각형 ACX에서

$$\overline{AC} = 2, \overline{CX} = 1, \angle AXC = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\overline{AX} = \sqrt{3}, \angle CAX = \frac{\pi}{6}$$

점 P의 좌표를 P(a, b)라 하면

$$H(0, b), M\left(0, \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{PM} = \left(-a, -\frac{b}{2}\right)$$

예를 들어, 점 X가 제4사분면 위의 점일 때의 점 P를 P₁이라 하면

직선 AX의 기울기는 $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \therefore b = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$\left(a, \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)$ 를 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$\frac{7}{3}a\left(a - \frac{6}{7}\right) = 0 \quad \therefore a = \frac{6}{7}$$

즉, 점 P₁의 좌표는 $P_1\left(\frac{6}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

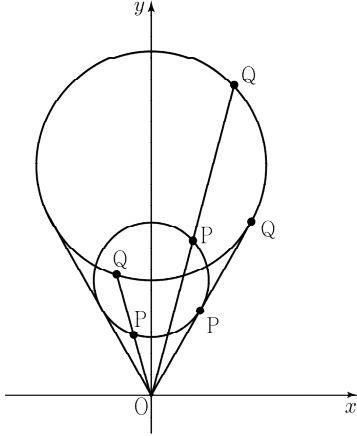
같은 방법으로, 점 X가 제1사분면 위의 점일 때의 점 P를 P₂라 하면

$$P_1\left(\frac{6}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), P_2\left(\frac{6}{7}, -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

따라서 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{8}{7}\sqrt{3}$ 이므로 $p = 7, q = 8$ 이고

$$p + q = 15$$

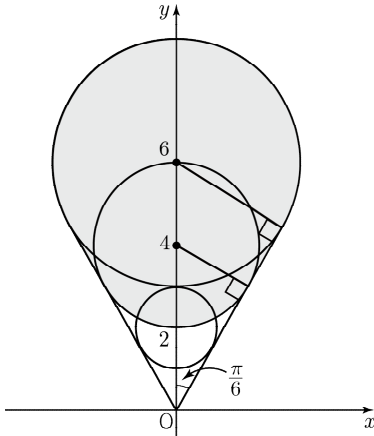
점 P가 원 $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 위를 움직이고 점 Q가 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키므로 점 Q는 원 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 위의 점이다.
점 P의 위치에 따른 점 Q의 위치는 다음 그림과 같다.



점 X가 선분 PQ 위를 움직이므로 한 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OP} \quad (1 \leq t \leq 2)$$

따라서 $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} = (1+t)\overrightarrow{OP} \quad (1 \leq t \leq 2)$ 를 만족시키는 점 Y가 나타내는 도형은 다음 그림의 색칠된 부분이다.

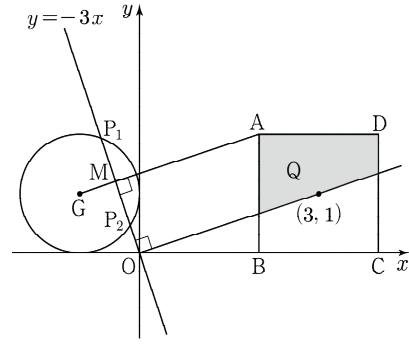


따라서 구하는 부분의 넓이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \pi \times 3^2 \right) = \frac{22}{3} \pi + 5\sqrt{3}$$

이므로 $6ab = 220$

원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq 0$ 을 만족시키는 점 Q가 나타내는 영역은 $\overrightarrow{OP}$ 에 수직이고 점 O를 지나는 직선과 사각형 ABCD로 둘러싸인 부분 중 윗 부분이다.
사각형 ABCD의 넓이가 4이고, 점 Q가 나타내는 영역의 넓이가 2가 되려면 $\overrightarrow{OP}$ 에 수직이고 점 O를 지나는 직선이 사각형의 중심 (3, 1)을 지나야 하므로 $\overrightarrow{OP} \perp (3, 1)$, 즉 두 점 P_1, P_2 는 직선 $y = -3x$ 와 원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 교점이다.



원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $G(-1, 1)$ 이고

$$\overrightarrow{AG} = (3, 1)$$

즉, 선분 AG는 선분 P_1P_2 를 수직이등분한다.

선분 P_1P_2 의 중점을 M이라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP_1}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP_2}) \\ &= |\overrightarrow{AM}|^2 - |\overrightarrow{MP_1}| \times |\overrightarrow{MP_2}| \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM}| &= |\overrightarrow{AG}| - |\overrightarrow{GM}| \\ |\overrightarrow{MP_1}| &= |\overrightarrow{MP_2}| = \sqrt{1 - |\overrightarrow{GM}|^2} \end{aligned}$$

이고 $|\overrightarrow{GM}|$ 은 $G(-1, 1)$ 과 직선 $y = -3x$ 사이의 거리와 같으므로

$$|\overrightarrow{GM}| = \frac{|-3+1|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

따라서 $|\overrightarrow{AM}| = \frac{4\sqrt{10}}{5}$, $|\overrightarrow{MP_1}| = |\overrightarrow{MP_2}| = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} &= |\overrightarrow{AM}|^2 - |\overrightarrow{MP_1}| \times |\overrightarrow{MP_2}| \\ &= \frac{32}{5} - \frac{3}{5} = \frac{29}{5} \end{aligned}$$

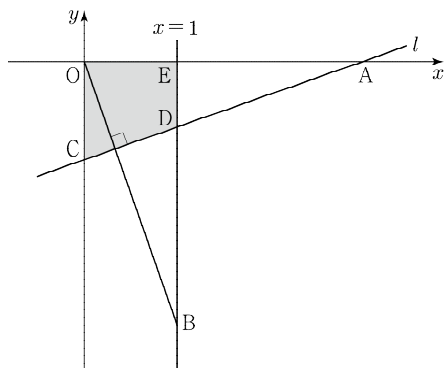
$$\therefore p+q=34$$

$b \leq 0 \leq a$ 이므로 점 P는 x 축과 y 축을 포함한 제4사분면 위의 점이다.

또한 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 3$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$ 이므로 $a \leq 1$ 이고, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 3$, $|\overrightarrow{OB}| = 3$ 이므로 점 P를 직선 OB 위로 정사영한 점을 P'이라 하면 $|\overrightarrow{OP'}| \leq 1$ 이다.

즉, 점 P는 직선 OB에 수직이고 원점 O에서의 거리가 1인 직선보다 위쪽에 있어야 하고 이 직선은 점 A를 지난다.

이때 이 직선을 l 이라 하면 주어진 조건을 만족시키는 점 P가 존재하는 부분은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



점 P가 직선 l 위에 있을 때, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ 이다.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = a - 2\sqrt{2}b = 3$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{2}}{4}a - \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 이다.

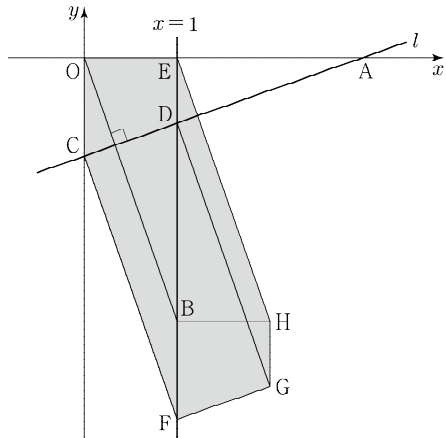
직선 l 이 y 축 및 직선 $x=1$ 과 만나는 점을 각각 C, D, 직선 $x=1$ 이 x 축과 만나는 점을 E라 하면

$$C\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right), D\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), E(1, 0)$$

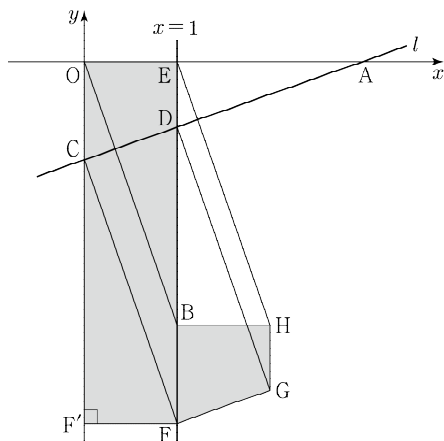
$$\therefore \overline{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{OE} = 1$$

세 점 C, D, E를 시점으로 하는 벡터 중 $\overrightarrow{OB}$ 와 일치하는 벡터의 중점을 각각 F, G, H라 하자.

이때 점 X가 선분 OB 위를 움직이고 점 Y는 $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX}$ 를 만족시키므로, 점 Y가 나타내는 부분은 다음 그림의 색칠된 부분이다.



점 F에서 y 축에 내린 수선의 발을 F' 이라 하면 삼각형 EBH와 삼각형 $CF'F$ 가 합동이므로 육각형 OCFGHE의 넓이는 다음 그림의 색칠된 부분의 넓이와 같다.



이때 $\overline{OE} = 1$, $\overline{OF'} = \overline{OC} + \overline{CF'} = \overline{OC} + \overline{EB} = \frac{11\sqrt{2}}{4}$ 이므로 사각형

OF'FE의 넓이는

$$\overline{OE} \times \overline{OF'} = \frac{11\sqrt{2}}{4}$$

또한 사각형 BFGH의 넓이는 사각형 OCDE의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2} \times (\overline{OC} + \overline{DE}) \times \overline{OE} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{4} \times 1 = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

따라서 도형 D의 넓이는 $\frac{11\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$ 이므로

$$p+q=35$$

72

정답 ②

조건 (가)에서 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} &= (x-2, y) \cdot (x+2, y) \\ &= x^2 - 4 + y^2 = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 12$$

즉, 점 P의 자취는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원이고 이 원을 C라 하자.

조건 (나)에서 선분 AP의 중점을 M이라 하면

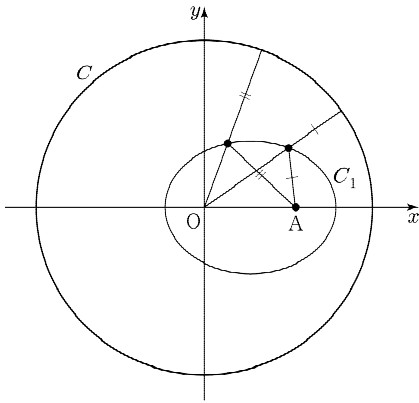
$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QA}) &= \overrightarrow{AP} \cdot (2\overrightarrow{QM}) = 0 \\ \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QM} &= 0 \end{aligned}$$

즉, 점 Q는 선분 AP의 수직이등분선 위에 있다.

또한 조건 (다)에서 점 Q는 선분 OP 위에 있다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= |\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}| \\ &= |\overrightarrow{OQ}| + |\overrightarrow{QP}| \\ &= |\overrightarrow{OQ}| + |\overrightarrow{AQ}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

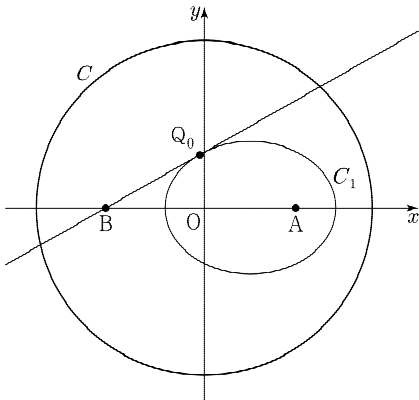
즉, 점 Q의 자취는 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 두 점 O, A를 초점으로 하는 타원이다.



이 타원을 C_1 이라 하면 타원 C_1 의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$\angle ABQ$ 의 크기가 최대가 되는 점 Q를 점 Q_0 이라 하면 다음 그림과 같이 점 B를 지나는 직선이 타원 C_1 과 점 Q_0 에서 접해야 한다.



타원 $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 기울기가 m ($m > 0$) 인 접선의 방정식은

$$y = m(x-1) + \sqrt{3m^2 + 2}$$

이 접선은 점 $B(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -3m + \sqrt{3m^2 + 2}$$

$$9m^2 = 3m^2 + 2$$

$$m^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because m > 0)$$

따라서 구하는 값은

$$\tan \theta = m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 공간도형과 공간좌표

73

정답 ④

삼수선의 정리에 의하여 선분 CD와 직선 l 이 수직이고,
선분 CD의 길이를 x 라 하면 이면각의 정의에 의하여 두 선분 AD와
CD가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{3}x$$

두 선분 AC와 BC가 서로 수직이므로, 삼각형 ABC에서
피타고라스의 정리에 의하여

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 + (\sqrt{3}x)^2, \quad x^2 = 3 \quad \therefore x = \sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

따라서 직각삼각형 BCD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{BD} = \sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{6}$$

74

정답 ①

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 이고 평면 α 와 β 가 수직이므로 직선 AB는 평면 α 와
수직이다.

그러므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 BH도 m 과 수직이다.

직각삼각형 BCH에서 $\overline{CH} = 1$, $\overline{BH} = \sqrt{3}$ 이므로 삼각형 BCH의

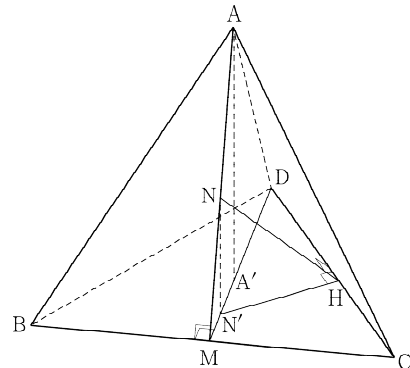
$$\text{넓이는 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이상에서 삼각뿔 ABCH의 부피는

$$\frac{1}{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

75

정답 ④



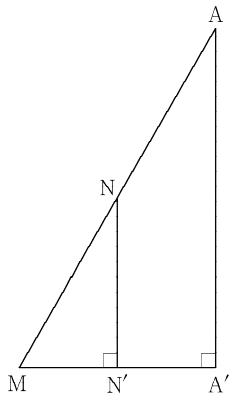
점 N에서 선분 CD와 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 H,
 N' 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 $N'H$ 와 CD도 서로
수직이다.

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 A' 이라 하면 점 A' 은
삼각형 BCD의 무게중심이므로 $\overline{A'M} = \sqrt{3}$ 이고, 점 N' 은 선분
 $A'M$ 의 중점이므로

$$\overline{A'N'} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{DN'} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

이고

$$\overline{N'H} = \overline{DN'} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$



한편, $\overline{AM} = 3\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{AA'} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

두 삼각형 $\triangle AMA'$ 과 $\triangle NMN'$ 은 닮음이고 닮음비는 2 : 1 이므로

$$\overline{NN'} = \sqrt{6}$$

직각삼각형 $\triangle NN'H$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

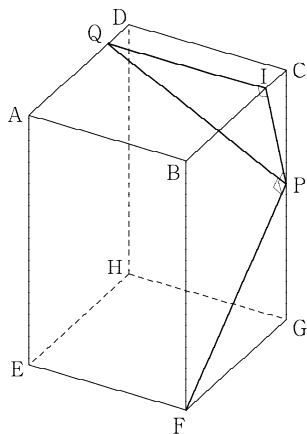
$$\overline{NH} = \sqrt{\overline{NN'}^2 + \overline{N'H}^2} = \sqrt{6 + \frac{75}{16}} = \frac{3\sqrt{19}}{4}$$

따라서 삼각형 $\triangle CDN$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3\sqrt{19}}{4} = \frac{9\sqrt{19}}{4}$$

76

정답 ④



점 Q에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\angle QPF = \frac{\pi}{2}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\angle IPF = \frac{\pi}{2}$$

또한 직각삼각형 $\triangle FPG$ 에서 $\overline{FP} = 5$, $\overline{FG} = 4$ 이므로 $\overline{PG} = 3$ 이고

직각삼각형 $\triangle PQI$ 에서 $\overline{PQ} = 5$, $\overline{QI} = 4$ 이므로 $\overline{PI} = 3$ 이다.

두 직각삼각형 $\triangle FPG$, $\triangle PIC$ 는 $\angle PFG = \angle IPC$ 이므로 서로 닮음이고

$$\begin{aligned} \overline{PC} &= \overline{PI} \times \cos(\angle IPC) \\ &= \overline{PI} \times \cos(\angle PFG) \\ &= 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\overline{AE} = \overline{CG} = \overline{PC} + \overline{PG} = \frac{12}{5} + 3 = \frac{27}{5}$$

77

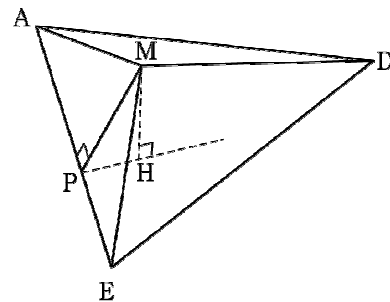
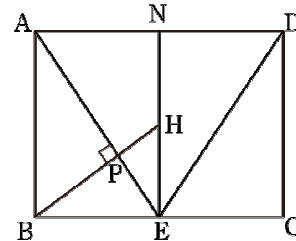
정답 ①

선분 AD의 중점을 N이라 하면 점 M에서 평면 AED에 내린 수선의 발 H는 선분 EN 위의 점이다.

또한, 점 M에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 P라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{MH}$$

따라서 직사각형 ABCD 모양의 종이에서 점 P는 점 B에서 선분 AE에 내린 수선의 발이고, 점 H는 직선 BP와 선분 EN의 교점이다.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PH}} \text{ 이므로}$$

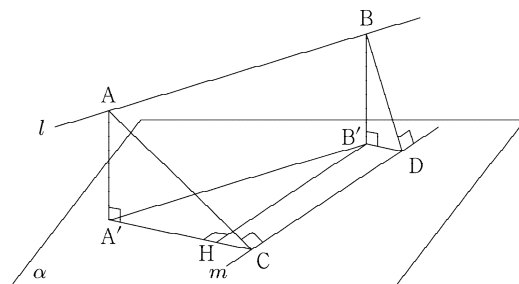
$$\overline{BP} = \overline{MP} = \frac{6}{\sqrt{13}}, \overline{HP} = \frac{8}{3\sqrt{13}}$$

직각삼각형 $\triangle MPH$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{MH} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

78

정답 ⑤



그림과 같이 두 점 A, B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 A' , B' 이라 하면

$$\overline{A'B'} = 6$$

$\overline{CD} = 3\sqrt{3}$ 이므로 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 점 B' 에서 선분 CA' 에 내린 수선의 발을



H 라 하면

$$\overline{HA'} = \overline{A'B'} \times \sin \frac{\pi}{6} = 3$$

$\overline{DB'} = k$ 라 하면

$$\overline{CA'} = k + 3$$

삼수선의 정리에 의하여

$$\angle AA'C = \frac{\pi}{2}, \angle BB'D = \frac{\pi}{2}$$

직선 l 이 평면 α 와 평행하므로 두 점 A, B 와 평면 α 사이의 거리는 같다.

$\overline{AA'} = \overline{BB'} = h$ 라 하면

$$h = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CA'}^2} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{DB'}^2}$$

위 식의 양변을 제곱하면

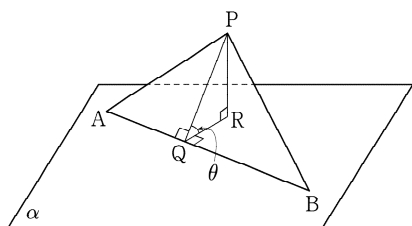
$$25 - (k+3)^2 = 10 - k^2$$

$$\therefore k = 1, h = 3$$

따라서 점 A 와 평면 α 사이의 거리는 3 이다.

79

정답 ⑥



점 P 에서 선분 AB 와 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{QR} \perp \overline{AB}, \theta = \angle PQR$$

$$\overline{AB} = 5, \overline{AP} = 3 \text{ 이고 } \angle APB = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \overline{BP} = 4$$

두 삼각형 APB, AQP 는 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

따라서 $\overline{PQ} = \frac{12}{5}$ 이고 $\overline{PR} = 2$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{6}$$

80

정답 ⑤

선분 AC 를 1 : 3 으로 내분하는 점을 S 라 하면 평면 PQS 는 평면 BCD 와 평행하므로 두 평면 BCD 와 PQR 가 이루는 예각의 크기는 두 평면 PQS 와 PQR 가 이루는 예각의 크기와 같다.

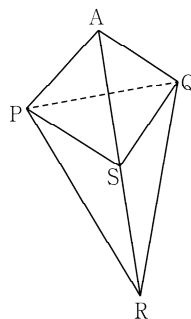
선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면 삼각형 PQS 는 한 변의 길이가 1 인 정삼각형이므로 두 선분 PQ 와 SM 은 서로 수직이다.

삼각형 APR 에서 $\overline{AP} = 1, \overline{AR} = 2, \angle PAR = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{PR} = \sqrt{3}$$

두 삼각형 APR 와 AQR 는 서로 합동이므로

$$\overline{QR} = \sqrt{3}$$



따라서 삼각형 PQR 는 이등변삼각형이고 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{MR} = \sqrt{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

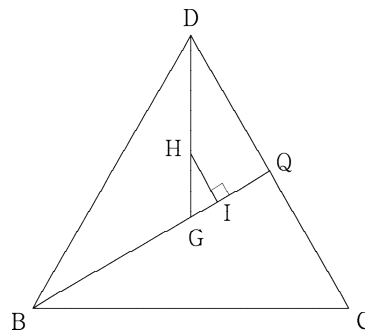
삼각형 MRS 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{MS}^2 + \overline{MR}^2 - \overline{SR}^2}{2 \times \overline{MS} \times \overline{MR}} = \frac{5\sqrt{33}}{33}$$

81

정답 ②

점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발을 G, 점 P 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 점 G 는 삼각형 BCD 의 무게중심이고, 점 H 는 선분 GD 를 1 : 2 로 내분하는 점이다.



점 H 에서 직선 BQ 에 내린 수선의 발을 I 라 할 때 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IP} \perp \overline{BQ}$ 이고, $\angle HIP = \theta$ 이다.

$$\overline{PH} = 6 \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \overline{GD} = 2\sqrt{3}, \overline{GH} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

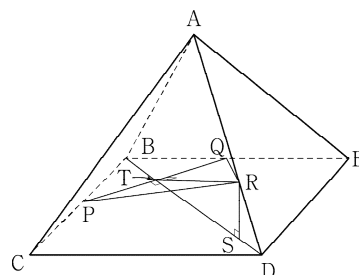
$$\overline{IH} = \overline{GH} \times \sin \frac{\pi}{3} = 1$$

이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{IH}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

82

정답 ①





그림과 같이 점 R에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 S라 하고, 선분 PQ와 선분 BD의 교점을 T라 하자.
이때 직선 PQ와 직선 BD가 서로 수직이고, 직선 RS와 직선 BD가 서로 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 PQ와 직선 RT가 서로 수직이다.

따라서 평면 PQR와 정사각뿔의 밑면이 이루는 예각의 크기 θ 는 $\angle RTS$ 이므로

$$\angle RTS = \theta$$

한편 $\overline{BT} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ 이고, 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 A'이라 할 때,

$$\overline{AA'} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

이때 삼각형 DRS에서

$$\overline{DR} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \overline{RS} = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\overline{DS} = \sqrt{\overline{DR}^2 - \overline{RS}^2} = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

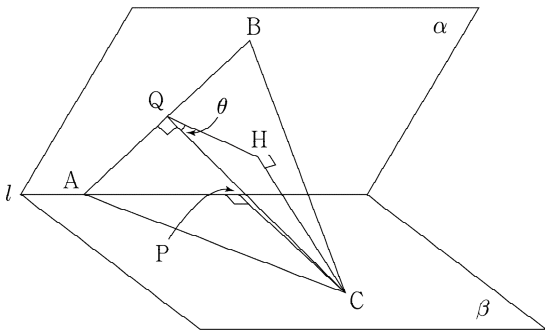
$$\overline{ST} = \overline{BD} - \overline{BT} - \overline{DS} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{7\sqrt{2}}{3}} = \frac{2}{7}$$

83

정답 ③

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 P, 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면 평면 ABC와 평면 α 가 이루는 예각의 크기 θ 는 두 선분 CQ와 HQ가 이루는 예각의 크기와 같다.



선분 AC와 직선 l이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{CP} = \overline{AC} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

또한, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CP} \perp \overline{HP}$ 이므로 이면각에 의하여

$$\angle CPH = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \overline{CH} = \overline{CP} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

한편, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 점 Q는 선분 AB의 중점이고

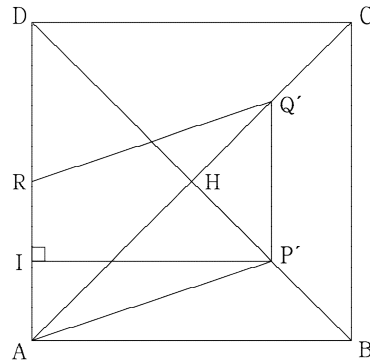
$$\overline{CQ} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CQH에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{CQ}} = \frac{3\sqrt{6}}{16}$$

84

정답 ⑤



세 점 O, P, Q에서 정사각뿔의 밑면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 H, P', Q'이라 하고, 점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 H는 정사각형 ABCD의 대각선의 교점이고, 두 점 P', Q'은 각각 선분 BH, CH 위의 점이다.

선분 P'I의 길이를 k라 하면

$$\overline{BP'} = \sqrt{2}(4-k)$$

삼각형 ODB에서 $\overline{OB} = \overline{OD} = 4$ 이고 $\overline{BD} = 4\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ODB는 직각이등변삼각형이다.

즉,

$$\overline{PP'} = \overline{BP'} = \sqrt{2}(4-k)$$

이고,

$$\tan \theta = \frac{\overline{PP'}}{\overline{P'I}} = \frac{\sqrt{2}(4-k)}{k} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

에서 $k=3$ 이다. 따라서

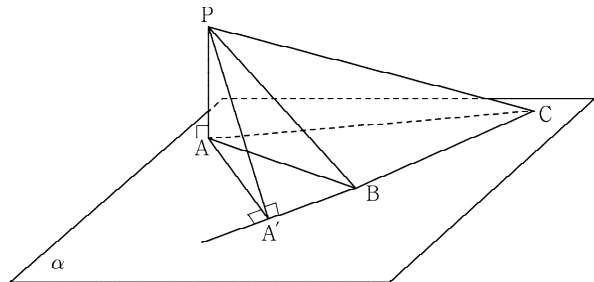
$$\overline{P'I} = 3, \overline{IP} = \sqrt{3^2 + \left(3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{11}$$

이고 $\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = 2$ 이므로 사각형 APQR의 넓이는 $2\sqrt{11}$

85

정답 ①

다음 그림과 같이 점 A에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 A'이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 선분 PA'은 직선 BC와 수직이다.



$\overline{BC} = 2$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AA'} = \sqrt{2}$$

평면 α 와 평면 PBC가 이루는 예각의 크기는 평면 α 와 평면 PA'C가



이루는 예각의 크기와 같고 이 각은 $\angle PA'A$ 이므로

$$\angle PA'A = \frac{\pi}{4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

따라서 삼각형 PAA' 은 직각이등변삼각형이므로

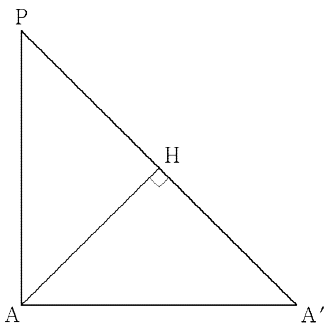
$$\overline{PA} = \sqrt{2}, \overline{PA'} = 2$$

이고 두 직각삼각형 $PA'B$, PAA' 에서

$$\overline{A'B} = \sqrt{\overline{BP}^2 - \overline{PA'}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = 1,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'B}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

⑦과 마찬가지로 두 평면 PAB , PBC 가 이루는 예각의 크기는 두 평면 PAB , $PA'B$ 가 이루는 예각의 크기와 같다.



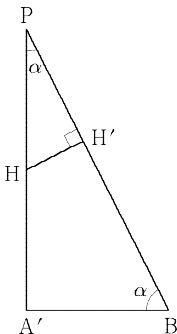
점 A 에서 선분 PA' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = 1$$

이고 선분 AH 는 평면 $PA'C$ 와 수직이다.

점 H 에서 선분 PB 에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면

$$\angle AH'H = \theta$$



한편, 삼각형 $PA'B$ 에서 $\angle PBA' = \alpha$ 라 하면

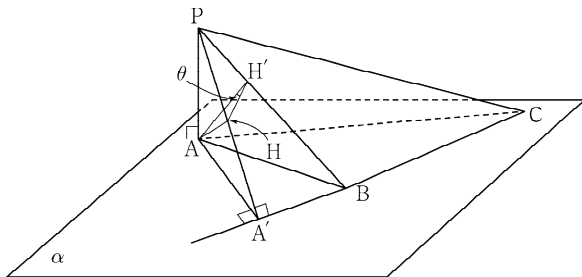
$$\cos \alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{BP}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이고 두 직각삼각형 PBA' 과 PHH' 은 서로 닮음이므로

$$\angle PBA' = \angle PHH' = \alpha$$

이때

$$\overline{HH'} = \overline{PH} \times \cos \alpha = 1 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$\text{즉, } \tan \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{HH'}} = \sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

86

정답 ⑤

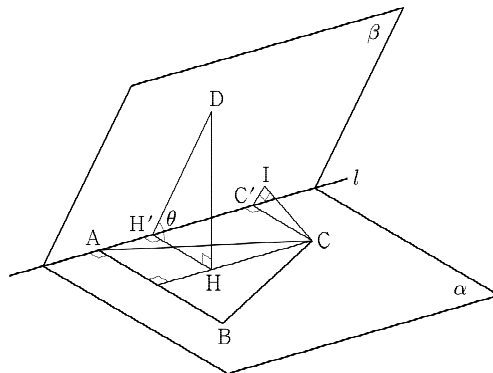
점 D 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 사면체 ABCD 가 한 변의 길이가 6 인 정사면체이고 점 H 는 삼각형 ABC 의 무게중심이므로

$$\overline{DH} = 6 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$$

한편, 두 점 H, C 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H', C' 이라 하자.

한편, 선분 AB 가 직선 l 과 수직이고 직선 CH 는 선분 AB 의 수직이등분이므로

$$\overline{HH'} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = 3$$



두 평면 α , β 가 이루는 이면각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{HH'}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \sin \theta = \frac{6\sqrt{22}}{11}$$

이고 $\overline{CC'} = 3$ 이므로 점 C 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 I 라 하면

$$\overline{CI} = \overline{CC'} \times \sin \theta = 3 \times \frac{2\sqrt{22}}{11} = \frac{6\sqrt{22}}{11}$$

따라서 구하는 값은 $\frac{6\sqrt{22}}{11}$ 이다.

87

정답 ①

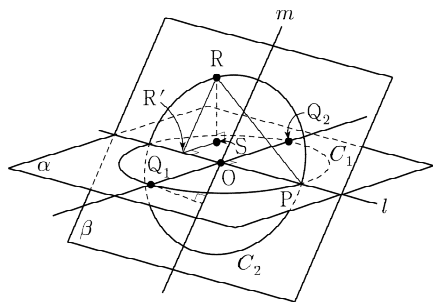
점 R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 R' 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 직선 R'S, l 은 서로 수직이다.

이때 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 두 직선 RR' ,

R'S 가 이루는 각의 크기도 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{RS} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ 이므로

$$\overline{R'S} = \frac{2}{5}, \overline{RR'} = \frac{4}{5}$$

한편, 선분 Q_1Q_2 는 원 C_1 의 지름이고 직선 Q_1Q_2 의 평면 β 위의 정사영을 직선 m 이라 하면 두 직선 l, m 은 서로 수직이고 점 Q_1 에서 평면 β 에 내린 수선의 발은 직선 m 위에 있다.



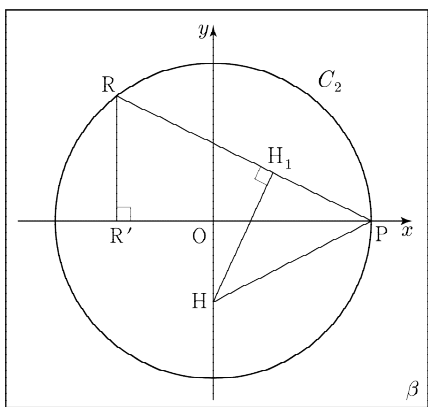
점 Q_1 에서 평면 β 와 직선 PR 에 내린 수선의 발을 각각 H, H_1 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 HH_1, PR 은 서로 수직이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{Q_1 H}}{\overline{HH_1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

이고

$$\overline{OH} = \overline{Q_1 O} \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \overline{Q_1 H} = \overline{Q_1 O} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

다음 그림과 같이 평면 β 에서 두 직선 l, m 을 각각 x 축, y 축이라 하면 점 O 는 원점이다.



이때 세 점 P, R, H 의 좌표는 각각

$$P(1, 0), R\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), H\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

이고 직선 PR 의 방정식은

$$x + 2y - 1 = 0$$

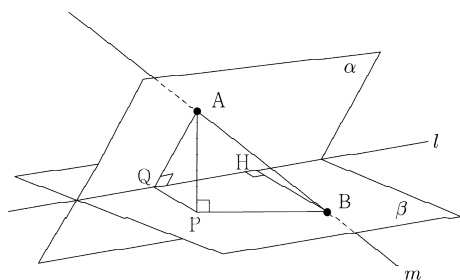
이므로 점 H 에서 직선 PR 까지의 거리는

$$\frac{|-1-1|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \therefore \overline{HH_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 값은

$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because \textcircled{1})$$

88



정답 5

점 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 P , 직선 l 에 내린 수선의 발을 Q 라 하고, 점 B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

삼수선의 정리에 의하여 선분 PQ 는 직선 l 과 수직이고 $\angle AQP$ 는 두 평면이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AQP = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \overline{AP} = \overline{AQ} \times \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}, \quad \overline{PQ} = \overline{AQ} \times \cos \frac{\pi}{3} = 2$$

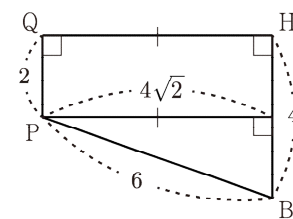
점 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발이 P 이므로 $\angle ABP$ 는 직선 m 과 평면 β 가 이루는 예각의 크기와 같고 두 선분 AP 와 BP 는 서로 수직이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} \times \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{3}, \quad \overline{BP} = \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} = 6$$

직선 m 에 포함되는 선분 AB 의 직선 l 위로의 정사영은 선분 QH 이므로 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{AB}}$$



사각형 $PBHQ$ 에서

$$\overline{PQ} = 2, \quad \overline{BH} = 4, \quad \overline{PB} = \overline{PH} = 6$$

이고 두 선분 PQ, BH 는 모두 선분 HQ 와 수직이므로 피타고라스의 정리에 의하여

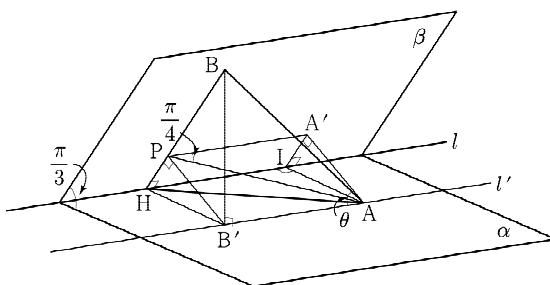
$$\overline{HQ} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{AB}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$p = 3, q = 2$ 이므로 $p + q = 5$

89

정답 20



그림과 같이 점 B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 B' 이라 할 때, $\angle BAB' = \theta$ 이고, 직선 l 과 평행하고 점 A 를 지나는 직선을 l' 이라 할 때 직선 AB 와 직선 l 이 이루는 예각의 크기 또한 θ 이므로 점 B' 은 직선 l' 위의 점이다.

즉, 선분 AB' 은 직선 l 과 평행하다.

점 B' 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 P 라 하고, 점 A 에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 A' , 직선 l 에 내린 수선의 발을 I 라 하자.



$\overline{BH}=2k$ 라 하면 $\angle BHB' = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{HB'} = \overline{BH} \times \cos \frac{\pi}{3} = k,$$

$$\overline{BB'} = \overline{BH} \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}k,$$

$$\overline{B'P} = \overline{HB'} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

이 고 두 선분 AA' 과 $B'P$ 는 평행하므로

$$\overline{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

이때 점 P 는 점 A' 에서 선분 BH 에 내린 수선의 발과 같으므로 각 APA' 이 두 평면 ABH 와 β 가 이루는 이면각이다.

즉, $\angle APA' = \frac{\pi}{4}$ 이고,

$$\overline{PA'} = \overline{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

두 선분 AB' 과 $A'P$ 가 평행하므로

$$\overline{AB'} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = 2$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로

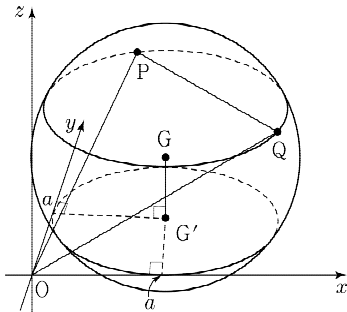
$$100 \cos^2 \theta = 20$$

90

정답 56

구 S 가 x 축과 y 축에 각각 접하므로

$$b^2 + 16 = a^2 + 16 \quad \therefore a = b$$



조건 (가)에 의하여 삼각형 OPQ 는 무게중심은 점 $(a, a, 4)$ 이고 이 점을 G 라 하자.

점 G 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 G' 이라 하면

$$G'(a, a, 0), \overline{OG'} = \sqrt{2}a$$

이 고 삼각형 OPQ 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기는 직선 OG 와 OG' 이 이루는 예각의 크기와 같다.

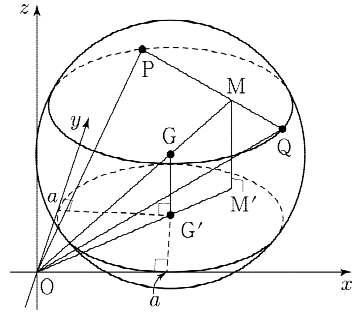
이때 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 $\tan \theta = \sqrt{2}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{GG'}}{\overline{OG'}} = \frac{4}{\overline{OG'}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{OG'} = 2\sqrt{2}, a = 2 (\because \overline{OG'} = \sqrt{2}a)$$

또한 구 S 의 반지름의 길이는

$$\sqrt{a^2 + 16} = 2\sqrt{5}$$



위 그림과 같이 선분 PQ 의 중점을 M , 점 M 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 M' 이라 하면

$$\overline{OG} : \overline{OM} = \overline{GG'} : \overline{MM'} = 2 : 3$$

$$\therefore \overline{MM'} = \overline{GG'} \times \frac{3}{2} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

즉, 세 점 P, Q, M 의 z 좌표는 6 이다.

직각삼각형 OGG' 에서

$$\overline{OG} = \sqrt{\overline{OG'}^2 + \overline{GG'}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

이므로

$$\overline{GM} = \sqrt{6}$$

직각삼각형 GMQ 에서

$$\overline{MQ} = \sqrt{\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 6} = \sqrt{14}$$

($\because \overline{GQ}$ 는 구 S 의 반지름의 길이)

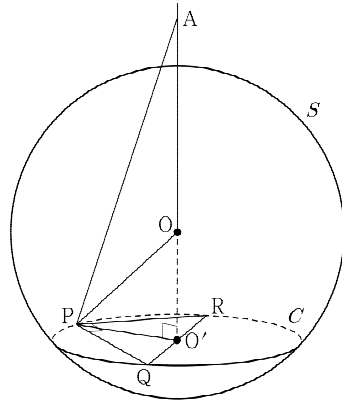
즉, $\overline{PQ} = 2\overline{MQ} = 2\sqrt{14}$ 이므로 구하는 값은

$$l^2 = \overline{PQ}^2 = (2\sqrt{14})^2 = 56$$

91

정답 13

$\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AR} = 6$ 에서 세 점 P, Q, R 은 구 S 위의 점이므로 한 원 위에 있다. 이때 이 원을 C 라 하고 원 C 의 중심을 O' 이라 하면 점 A 는 직선 OO' 위에 존재한다.



$\angle QPR = \frac{\pi}{2}$ 에서 선분 QR 은 원 C 의 지름이고 $\angle AOP = \frac{2}{3}\pi$ 에서

$$\angle POO' = \frac{\pi}{3}, \overline{OP} = 3$$

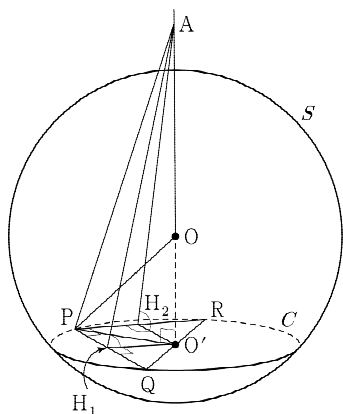
이므로

$$\overline{O'P} = \overline{OP} \times \sin(\angle POO') = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 점 O' 에서 두 직선 PQ, PR 에 내린 수선의 발을 각각 $H_1,$

H_2 라 하면 두 점 H_1, H_2 는 두 선분 PQ, PR 의 중점이고

$$\theta_1 = \angle AH_1O', \theta_2 = \angle AH_2O'$$



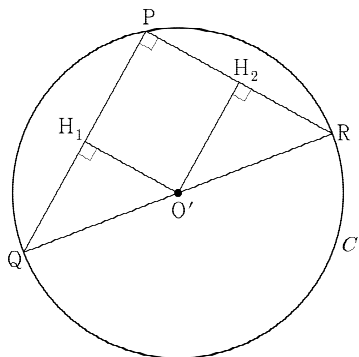
즈,

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{AO'}}{\overline{O'H_1}}, \tan \theta_2 = \frac{\overline{AO'}}{\overline{O'H_2}}$$

이므로 $\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\overline{O'H_1}}{\overline{O'H_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $\overline{O'H_1} = \sqrt{2}k$, $\overline{O'H_2} = 2k$ 라 하자.



㉠에 의하여 원 C 의 반지름의 길이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\overline{O'R} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

이고

$$\overline{O'H_1} = \overline{RH_2} = \sqrt{2}k, \overline{O'H_2} = 2k$$

이므로 삼각형 $O'PH_1$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\text{O}'\text{R}}^2 = \overline{\text{O}'\text{H}_2}^2 + \overline{\text{RH}_2}^2$$

$$\frac{27}{4} = 4k^2 + 2k^2$$

$$\therefore k = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\overline{\text{PR}}=2\sqrt{2}k=3, \quad \overline{\text{PH}}_2=\frac{3}{2}$$

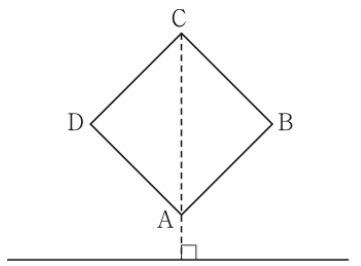
$$\overline{AH_2} = \sqrt{AP^2 - PH_2^2} = \sqrt{36 - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ 이므로 삼각형 APR 의}$$

남이

$$\frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{AH_2} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{9\sqrt{15}}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=9$ 이므로 $p+q=13$

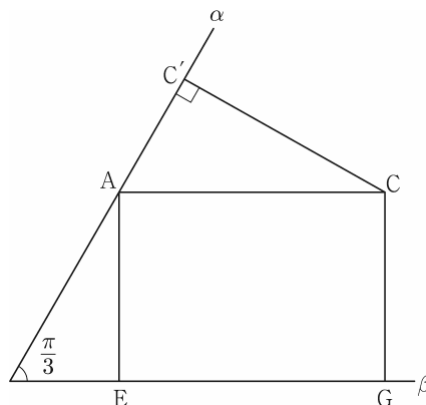
조건 (나)에 의하여 직선 AD와 직선 l 이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이고,
두 선분 AD, AB가 서로 수직이므로 직선 AB와 직선 l 이 이루는
각의 크기 또한 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 직선 AC와 직선 l 은 서로 수직이다.



삼각형 ACF는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로, 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 = 2\sqrt{3}$$

점 A는 평면 α 위의 점이므로 점 A의 평면 α 위로의 정사영은 점 A,
두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 두 점 A, C를 지나고
평면 β 에 수직인 평면으로 정육면체를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



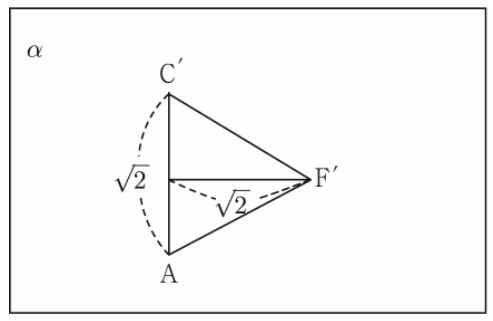
점 C에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 C'이라 하면

$$\overline{AC'} = 2\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2}$$

또한, 두 선분 AC, BD가 서로 수직이므로 직선 BD는 직선 l 과 평행하다.

따라서 직선 BD는 평면 α 와 평행하고 직선 FH는 직선 BD와 평행하므로, 선분 FH의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 선분 FH의 길이와 같다.

따라서 삼각형 ACF의 평면 α 위의 정사영 $AC'F'$ 은 다음 그림과 같다.





따라서 삼각형 $AC'F'$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$ 이므로

두 평면 ACF , α 가 이루는 각의 크기 θ 는

$$\cos \theta = \frac{\overline{AC'F'}}{\overline{ACF}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{12}, p+q=12+1=13$$

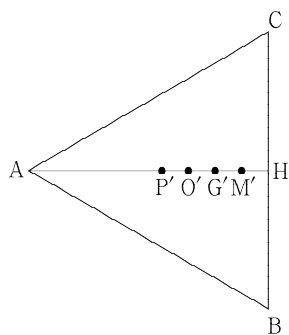
93

정답 ④

선분 QR 의 중점을 M 이라 할 때, 점 G 는 삼각형 PQR 의 무게중심이므로

$$\overline{PG} : \overline{GM} = 2 : 1$$

세 점 P, G, M 에서 평면 ABC 에 내린 수선의 발을 각각 P', G', M' 이라 하자.



$$\overline{PG} : \overline{GM} = 2 : 1 \text{ 이므로 } \overline{P'G'} : \overline{G'M'} = 2 : 1$$

한편, 선분 BC 의 중점을 H 라 하고, 점 O 에서 평면 ABC 에 내린 수선의 발을 O' 이라 할 때 O' 은 삼각형 ABC 의 무게중심이다.

$$\overline{AH} = 3\sqrt{3} \text{ 이므로 } \overline{AO'} = 2\sqrt{3}, \overline{O'H} = \sqrt{3}$$

$$\overline{AP} : \overline{PO} = 5 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP'} = \frac{5}{6} \times \overline{AO'} = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \overline{P'O'} = \frac{1}{6} \times \overline{AO'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{OM} : \overline{MH} = 2 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{O'M'} = \frac{2}{3} \times \overline{O'H} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

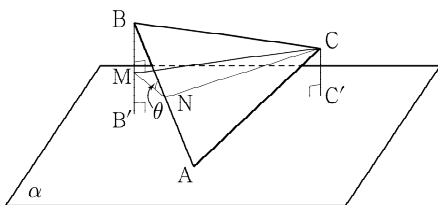
따라서 $\overline{P'M'} = \overline{P'O'} + \overline{O'M'} = \sqrt{3}$ 이고, $\overline{P'G'} : \overline{G'M'} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{P'G'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \overline{AG'} = \overline{AP'} + \overline{P'G'} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

94

정답 ③



그림과 같이 두 점 B, C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 B', C' 이라 하자.

두 선분 BB' 과 AB 의 중점을 각각 M, N 이라고 하면 평면 α 와 평면 MNC 는 평행하다.

이때, 두 평면 ABC 와 MNC 의 교선이 직선 NC 이고 두 선분 MN 과 BN 이 모두 선분 NC 와 수직이므로 삼각형 ABC 와 평면 α 가 이루는 이면각 θ 에 대하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

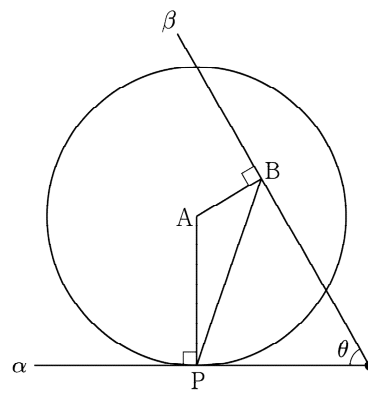
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

95

정답 19

구 S 의 중심을 A , 평면 β 와 구 S 가 만나서 생기는 원의 중심을 B 라 하자.

평면 PAB 는 두 평면 α, β 와 모두 수직이므로 세 점 P, A, B 와 두 평면 α, β 의 위치관계는 다음 그림과 같다.



그림과 같이 평면 α 와 평면 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{AP} \perp \alpha, \overline{AB} \perp \beta \text{ 에서 } \angle BAP = \pi - \theta$$

$$\overline{AP} = 4, \overline{AB} = 2, \overline{BP} = 5 \text{ 이므로}$$

삼각형 APB 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AP} \times \cos(\angle BAP) = 20 + 16 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{5}{16}$$

한편, 구 S 의 반지름은 4이고 $\overline{AB} = 2$ 이므로 평면 β 와 구 S 가 만나서 생기는 원의 반지름은 $4^2 - 2^2 = 2\sqrt{3}$ 이다.

즉, 원의 넓이는 $\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$ 이고 $\cos \theta = \frac{5}{16}$ 이므로

평면 β 와 구 S 가 만나서 생기는 원의 평면 α 로의 정사영의 넓이는

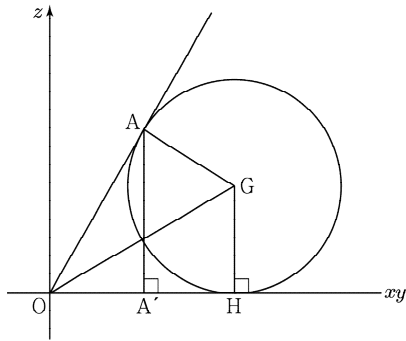
$$12\pi \times \frac{5}{16} = \frac{15}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$p = 4, q = 15 \quad \therefore p + q = 19$$



96

정답 ③



구 $S : (x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-1)^2 = 1$ 의 중심을 $G(1, \sqrt{2}, 1)$ 이라 하고, 점 G 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{OG}=2$, $\overline{GH}=1$ 이고 $\angle GH O = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle GOH = \frac{\pi}{6}$

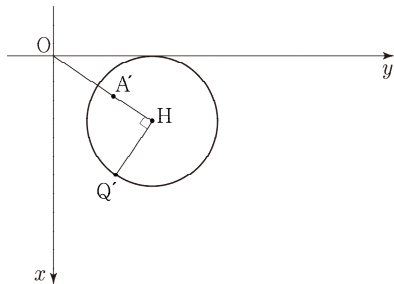
점 A 는 원점 O 에서 구 S 에 그은 접선과 구 S 의 접점 중 xy 평면과의 거리가 가장 큰 점이고, 이때 세 점 A, G, H 는 한 평면 위에 있으므로

$$\angle AOH = \frac{\pi}{3}$$

따라서 점 A 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 A' 이라 할 때,

$$\overline{OA'} = \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

점 Q 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q' 이라 할 때, 선분 OA' 과 Q' 사이의 거리는 선분 GQ 가 xy 평면과 평행하고 평면 $AOHG$ 와 수직일 때 최대이다.



따라서 삼각형 OAQ 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

97

정답 ②

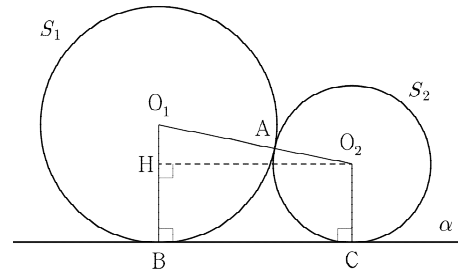
두 구 S_1, S_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하자.

두 구 S_1, S_2 가 점 A 에서 접하므로 점 A 는 선분 O_1O_2 위의 점이다.

점 O_2 에서 선분 O_1B 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{O_1O_2}=5$,

$\overline{O_1H}=1$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{O_2H} = \overline{BC} = 2\sqrt{6}$$

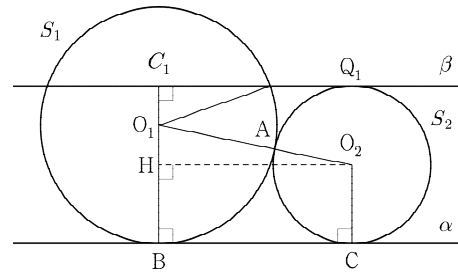


한편, 점 P 에서 평면 ABC 에 내린 수선의 발을 P' 이라 하면 삼각형 BCP 의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 BCP' 이다.

이때 두 삼각형 BCP' 과 BCQ 의 넓이가 같으므로 점 P' 과 직선 BC 사이의 거리와 점 Q 와 직선 BC 사이의 거리가 같다.

직선 BC 와 점 Q 사이의 거리를 h 라 할 때, 평면 α 와 평행하고 평면 α 까지의 거리가 h 인 평면을 β 라 하자.

구 S_1 이 평면 β 와 만나서 생기는 원을 C_1 이라 하면 점 P 는 원 C_1 위의 점이다.



이때 조건을 만족시키는 점 Q 가 Q_1 뿐이므로 평면 β 는 구 S_2 와 접해야 한다.

즉, 평면 α 와 평면 β 사이의 거리는 4이므로 삼각형 BCQ_1 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CQ_1} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 4 = 4\sqrt{6}$$

또한 평면 β 와 점 O_1 사이의 거리는 1이므로 원 C_1 의 반지름의 길이는

$$\sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$$

따라서 평면 BCQ_1 과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이고,

사면체 $BCPQ_1$ 의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{6} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

98

정답 75

두 점 P, Q 는 구 위의 점이고 $\overline{PQ}=10$ 이므로 선분 PQ 는 구의 지름이다.

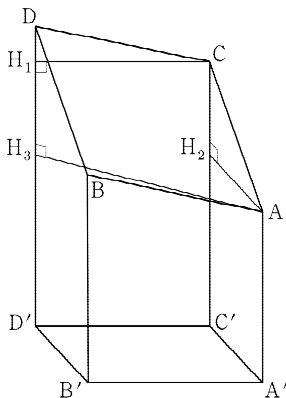
따라서 평면 PQR 과 구 S 가 만나서 생기는 도형은 구의 지름을 포함하는 원이고, 그 넓이는 25π 이다.

따라서 두 평면 PQR 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{20\pi}{25\pi} = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}$$

조건 (가)에 의하여 두 선분 AD, BC는 원 O의 지름이고 사각형 ABDC는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 사각형 ABDC의 넓이는 16이고 직선 AB와 직선 CD는 서로 평행하다.
즉, 선분 CD의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 $\sqrt{15}$ 이므로 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이도 $\sqrt{15}$ 이다.
따라서 네 점 A, B, C, D의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A', B', C', D'라 하면 사각형 A'B'D'C'은 평행사변형이다.

$$\overline{A'B'} = \overline{C'D'} = \sqrt{15}$$



한편, 점 C에서 직선 DD'에 내린 수선의 발을 H1이라 하면

$$\overline{CH_1} = \overline{C'D'} = \sqrt{15}$$

이므로

$$\overline{DH_1}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CH_1}^2 = 4^2 - (\sqrt{15})^2 = 1 \quad \therefore \overline{DH_1} = 1$$

이때 조건 (나)에서 $\overline{CC'} = b$ 이므로

$$\overline{CC'} = \overline{DD'} - \overline{DH_1} = 8 - 1 = 7 \quad \therefore b = 7$$

마찬가지로 점 A에서 직선 CC'에 내린 수선의 발을 H2라 하면

$$\overline{CH_2} = \overline{CC'} - 4 = 7 - 4 = 3$$

이므로

$$\overline{AH_2}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH_2}^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$\therefore \overline{AH_2} = \sqrt{7} = \overline{A'C'}$$

또한 점 A에서 직선 DD'에 내린 수선의 발을 H3이라 하면

$$\overline{DH_3} = \overline{DD'} - \overline{AA'} = 8 - 4 = 4$$

이므로

$$\overline{AH_3}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DH_3}^2 = (4\sqrt{2})^2 - 4^2 = 16$$

$$\therefore \overline{AH_3} = 4 = \overline{A'D'}$$

따라서 사각형 A'B'D'C'는

$$\overline{A'B'} = \sqrt{15}, \overline{A'C'} = \sqrt{7}, \overline{A'D'} = 4$$

인 평행사변형이다. 삼각형 A'C'D'에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle A'C'D') &= \frac{\overline{A'C'}^2 + \overline{C'D'}^2 - \overline{A'D'}^2}{2 \times \overline{A'C'} \times \overline{C'D'}} \\ &= \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{15})^2 - 4^2}{2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{15}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{105}} = \frac{\sqrt{105}}{35} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\angle A'C'D') = \frac{4\sqrt{70}}{35}$$

즉, 사각형 A'B'D'C'의 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{15} \times \sin(\angle A'C'D') = \sqrt{105} \times \frac{4\sqrt{70}}{35} = 4\sqrt{6}$$

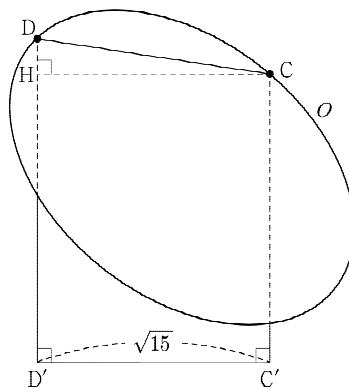
이때 주어진 조건에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\text{사각형 A'B'D'C'의 넓이})}{(\text{사각형 ABDC의 넓이})} = \frac{4\sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 이고 $\sin^2 \theta = \frac{5}{8}$ 이다.

따라서 $p = 8, q = 5$ 이므로 $p + q = 13$

[다른 풀이]

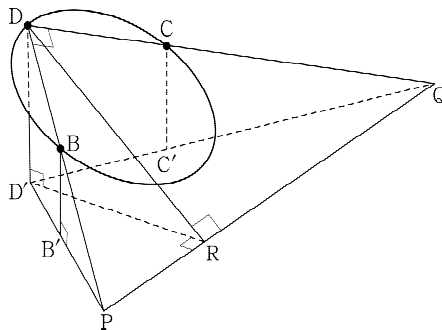


두 점 C, D에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라 하자.

$\overline{C'D'} = \sqrt{15}$ 이므로 점 C에서 선분 DD'에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CD} = 4$ 이고

$$\overline{DH} = 1 \quad \therefore b = 7$$

또한 두 선분 AB, CD는 서로 평행하므로 $a = 5$



점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 B', 직선 DB와 평면 α 가 만나는 점을 P, 직선 DC와 평면 α 가 만나는 점을 Q, 점 D에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 선분 D'R과 선분 PQ는 서로 수직이므로 원 O를 포함하는 평면과 평면 α 가 이루는 각인 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)는 두 선분 DR과 D'R이 이루는 각과 같다.

이때 두 삼각형 DD'Q와 CC'Q는 서로 닮음이므로

$$\overline{DD'} : \overline{CC'} = \overline{DQ} : \overline{CQ}$$

$$8 : 7 = \overline{DQ} : (\overline{DQ} - 4)$$

$$\therefore \overline{DQ} = 32 \quad \dots \textcircled{1}$$

마찬가지로 두 삼각형 DD'P와 BB'P는 서로 닮음이므로

$$\overline{DD'} : \overline{BB'} = \overline{DP} : \overline{BP}$$

$$8 : 5 = \overline{DP} : (\overline{DP} - 4)$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{32}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 직각삼각형 QDP의 세 변의 길이의 비는

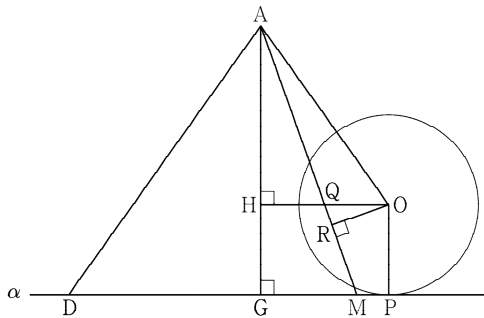


$\overline{DP} : \overline{QD} : \overline{PQ} = 1 : 3 : \sqrt{10}$
 이고 두 삼각형 QDP와 DRP는 서로 닮음이므로 $\overline{PR} = k$ 라 하면
 $\overline{DR} = 3k, \overline{DP} = \sqrt{10}k$ 이다.
 $\therefore \sqrt{10}k = \frac{32}{3}, \overline{DR} = \frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$
 따라서 $\sin^2 \theta = \left(\frac{\overline{DD'}}{\overline{DR}} \right)^2 = \frac{5}{8}$ 이므로
 $p = 8, q = 5 \quad \therefore p + q = 13$

102

정답 19

두 직선 BC, DP가 서로 수직이므로 선분 BC의 중점을 M이라 할 때,
 점 P는 직선 DM 위의 점이다.
 즉, 구 S의 중심을 O라 할 때 두 점 O, P는 평면 ADM 위의 점이다.



점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 G라 할 때, G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

$$\overline{MA} = \overline{MD} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ 이고 } \overline{MG} : \overline{GD} = 1 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{MG} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \overline{GD} = 3\sqrt{3}$$

점 O에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 H라 할 때

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 9 = 3\sqrt{6}$$

이고, 구 S의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{6}, \overline{AH} = \overline{AG} - \overline{OP} = 2\sqrt{6}$$

$\overline{OA} = 6$ 이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = 2\sqrt{3}, \overline{MP} = \overline{OH} - \overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

선분 OH와 AM의 교점을 Q라 하고, 점 O에서 선분 AM에 내린
 수선의 발을 R라 할 때 두 삼각형 AQH와 AMG는 닮음이므로

$$\overline{AH} : \overline{AG} = \overline{HQ} : \overline{GM}, \overline{HQ} = \sqrt{3}$$

즉, $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ 이고

$$\sin(\angle OQR) = \sin(\angle AQH) = \sin(\angle AMG) = \frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\overline{OR} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

즉, 점 O에서 평면 ABC까지의 거리가 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이므로 구 S와 평면
 ABC가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

따라서 원의 넓이는 $\frac{10}{3}\pi$ 이다.

구 S와 평면 ABC가 만나서 생기는 도형과 평면 α 가 이루는 예각의
 크기를 θ 라 하면 θ 는 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는
 예각의 크기와 같으므로

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

($\therefore$ 정사면체의 두 면이 이루는 예각의 크기 θ' 에 대하여

$$\cos \theta' = \frac{1}{3} \text{ 이다.})$$

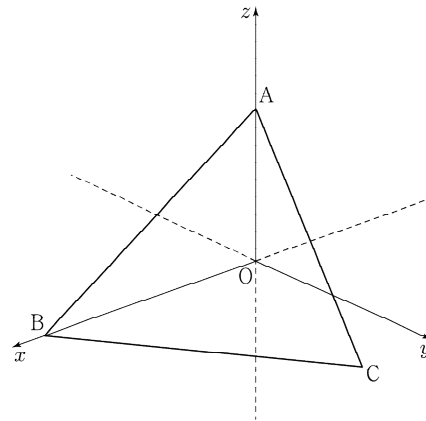
따라서 구 S와 평면 ABC가 만나서 생기는 도형의 평면 α 위로의
 정사영의 넓이는

$$\frac{10}{3}\pi \times \cos \theta = \frac{10}{3}\pi \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}\pi \quad \therefore p + q = 19$$

103

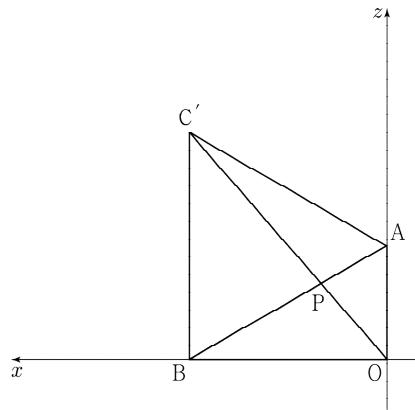
정답 ③

삼각형 ABC는 다음 그림과 같다.



점 C가 xz 평면 위에 오도록 삼각형 ABC를 펼치면 다음 그림과 같고

점 C가 이동된 점을 C' 이라 하면 $\overline{OP} + \overline{PC}$ 의 값이 최소가 되는 점
 P의 위치는 다음과 같다.



$$\angle ABO = \frac{\pi}{6}, \angle ABC' = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \angle C'BO = \frac{\pi}{2}$$

$\overline{OB} = \sqrt{3}, \overline{BC'} = 2$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여

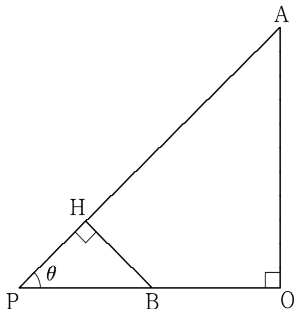
$$\overline{OC'} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$



104

정답 ②

직선 AP와 점 B 사이의 거리가 최소일 때 점 P는 P(2, 0, 0)이다.



점 B에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle BPH = \theta$ 라 할

때, $\overline{BP} = 1$, $\overline{BH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$$

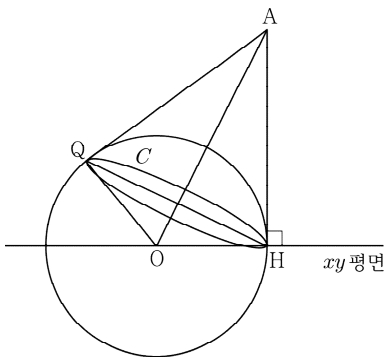
$$\therefore a = \overline{OP} \times \tan \theta = 2$$

105

정답 ④

점 $(1, a, 2\sqrt{3})$ ($a > 0$)을 A라 하면 점 A에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 에 그은 접선들의 접점이 그리는 도형이 C이고 C는 중심이 선분 OA 위에 있는 원이다.

도형 C가 xy 평면과 한 점에서만 만나므로 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH는 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 와 점 H에서 접한다.



$\overline{OH} = 2$ 이고 H(1, a, 0)이므로 $a = \sqrt{3}$ ($\because a > 0$)

$\overline{AH} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\angle OAH = \frac{\pi}{6}$

원 C의 중심을 C라 하면 두 선분 AC와 QH는 서로 수직이므로

$$\angle OHC = \frac{\pi}{6}$$

$\overline{QH} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$b = 2\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\therefore a + b = 2\sqrt{3}$$

106

정답 ①

구 S의 중심을 (a, b, c) 라 하면 구 S가 두 점 P, Q에서 각각 x 축, y 축과 접하므로

$$P(a, 0, 0), Q(0, b, 0)$$

이때 구 S의 반지름의 길이는 5이므로

$$b^2 + c^2 = 25, \quad a^2 + c^2 = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

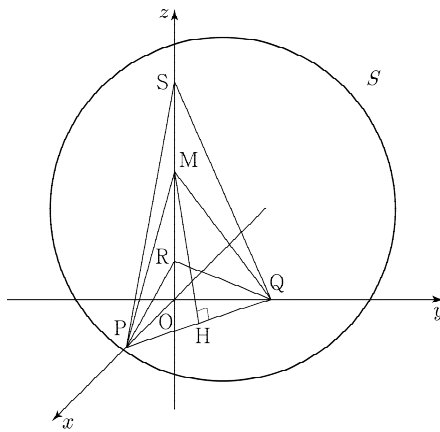
$$\therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

두 점 R, S는 구 S 위의 점이므로 선분 RS의 중점 M은 구의 중심에서 선분 RS에 내린 수선의 발과 같다.

$$\therefore M(0, 0, c)$$

삼각형 PQM은 $\overline{PM} = \overline{QM}$ 인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 선분 PQ의 중점이다.

$$\therefore H\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$$



$$\overline{MH} = \frac{\sqrt{82}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 = \frac{82}{4}$$

$$\therefore \frac{a^2}{2} + c^2 = \frac{41}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하면

$$a = 3, c = 4 \quad (\because c > 0)$$

이므로 구 S의 방정식은

$$S : (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$$

위 방정식에 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$(z-4)^2 = 25 - 18$$

$$z = 4 + \sqrt{7} \text{ 또는 } z = 4 - \sqrt{7}$$

$$\therefore R(0, 0, 4 - \sqrt{7}), S(0, 0, 4 + \sqrt{7})$$

따라서 원점 O에 대하여 사면체 PQRS의 부피는 사면체 PQOS의 부피에서 사면체 PQOR의 부피를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times \{(4 + \sqrt{7}) - (4 - \sqrt{7})\} = 3\sqrt{7}$$

107

정답 16

조건 (나)에 의하여 점 P의 z 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $P\left(a, b, \frac{1}{2}\right)$ 이라 할 때

$$\overline{AP}^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2 = 9$$



에서

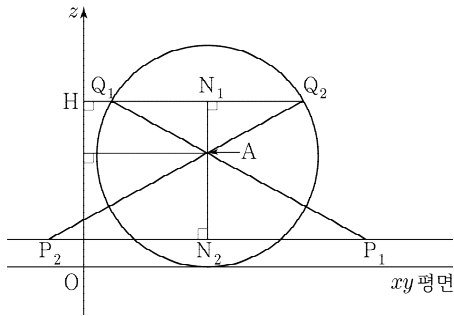
$$(a-1)^2 + (b-2)^2 = \frac{27}{4}$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ 이고 xy 평면과 평행한

평면 위의 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 인 원이다.

한편, $\overline{PQ}=5$ 이고 $\overline{AP}=3$ 이므로 점 Q는 직선 AP와 구 S의 교점 중 z 좌표가 큰 점이다.

구 S 위의 점 Q에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 Q와 z 축 사이의 거리는 다음 그림과 같이 $\overline{Q_2H}$ 가 최대, $\overline{Q_1H}$ 가 최소이다.



점 A에서 선분 Q_1Q_2 에 내린 수선의 발을 N_1 , 선분 P_1P_2 에 내린 수선의 발을 N_2 라 하자.

이때 삼각형 AP_1P_2 와 삼각형 AQ_1Q_2 는 닮음이고 닮음비는 $3:2$ 이므로

$$\overline{AN_2} : \overline{AN_1} = 3 : 2, \quad \frac{3}{2} : \overline{AN_1} = 3 : 2 \quad \therefore \overline{AN_1} = 1$$

삼각형 AN_1Q_1 에서 $\overline{N_1Q_1} = \sqrt{3}$

삼각형 AQ_1Q_2 는 이등변삼각형이므로 $\overline{N_1Q_1} = \overline{N_1Q_2}$

한편, 점 A와 z 축 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{N_1H} = \sqrt{5}$

따라서 구 S 위의 점 Q와 z 축 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각

$$M = \sqrt{5} + \sqrt{3}, \quad m = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

이므로

$$M^2 + m^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 16$$