

2026학년도 부영이 모의고사 1회 해설

제 2 교시

수학 영역

공통과목

1	2	3	4	5
⑤	④	①	③	②
6	7	8	9	10
⑤	③	④	④	③
11	12	13	14	15
②	④	①	④	②
16	17	18	19	20
2	8	564	20	7
21	22			
74	19			

확률과 통계

23	24	25	26	27
28	29	30		

미적분

23	24	25	26	27
⑤	②	①	③	①
28	29	30		
③	9	32		

기하

23	24	25	26	27
⑤	②	①	③	④
28	29	30		
②	8	170		

예상 1컷

미적	기하	확률과 통계
80-82	82-84	100

공통 총평

전체적으로 작년 수능의 기조를 따라가려고 노력했습니다.

전체적으로 난이도는 확통 < 공통 객관식 < 공통 주관식< 미적분으로 설정하여 작년 수능의 느낌을 내려했던 시험이었습니다.

공통에서는 14번, 21번, 22번이 변별력 있는 문항으로 작용했을 것입니다. 특히 14, 22번과 같은 문항은 꼼꼼히 케이스 분류를 해서 차근차근 풀어야만 하는 문항이기에 귀찮게 느껴질 수 있었을 것입니다. 하지만 250620이나 251122처럼 실수 없이 완벽히 문제를 푸는게 현재 평가원이 주도하는 질서이기에 이러한 케이스 분류 문제에 대한 완벽한 대비가 갖춰줘야 한다고 생각합니다.

6모가 얼마나 남지 않았는데 모두들 힘내서 공부 열심히 하시길 응원합니다.

9번: ④

실수 전체의 집합에서 연속이도록 하는 a 는

방정식 $a^3 + 4a^2 + 8a + 2 = ka - 4$ 를 만족시킨다.

이 방정식의 해가 2개 이기에 중근 2개와 실근 1개를 지님을 알 수 있고 따라서

$$x^3 + 4x^2 + (8-k)x + 6 = 0 \quad - \text{ ①},$$

$$3x^2 + 8x + (8-k) = 0 \quad - \text{ ②이다.}$$

①과 ②을 연립하면 $x = 1, k = 19$ 이다.

문제 코멘트

4점대의 문을 여는 문제답게 어렵지는 않은 문항이다.
연속이게 하는 실수 a 의 개수가 2개뿐이라는 것과 연속이라는 말의 의미를 좀만 생각하면 풀 수 있었을 것이다.

10번: ③

$S_n - S_{n-1} = a_n$ 을 이용하면

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k = 3n^2 - 14n - \{3(n-1)^2 - 14(n-1)\} = 6n - 17$$

$$= a_n b_n \quad \therefore b_n = \frac{6n-17}{a_n} \text{이다. } a_n > 0 \text{이기에}$$

$b_2 < 0, b_3 > 0$ 이다. b_n 을 $2n+k$ 로 두면 (k 는 정수)

$4+k < 0, 6+k > 0$ 따라서 $-6 < k < -4$

$$k = -5 \text{이다. } a_5 = \frac{13}{b_5} = \frac{13}{5}$$

문제 코멘트

먼저 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 을 이용해 $a_n b_n$ 의 일반항을 구하는 건 당연한 행동이다.
이후 주목해야 할 것은 a_n 양수조건과 b_n 의 정수조건.
 b_n 의 초항만을 모르기에 이를 알아내기 위해
양수, 정수 조건을 써야겠다는 추론을 통해서
문제를 풀어나가면 되었을 것이다.

11번: ①

두 점 P, Q의 속도가 같아지기 위한 순간이 존재하지 않기

위해서는 $x_1' = x_2'$ 가 되게 하는 t 가 $t > 0$ 에서 존재하지

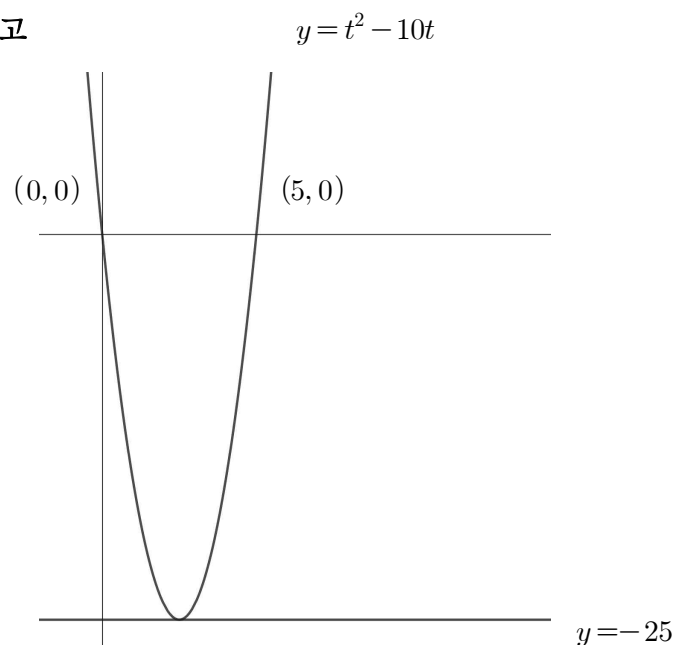
않아야 한다. 따라서 $t^2 - 8t = 2t + a$ 는 $t > 0$ 에서 실근이

존재하지 않는다.

정리하면 곡선 $t^2 - 10t$ 와 직선 a 가 $t > 0$ 에서 만나지 않기에

$a < -25$ 이고, 정수 a 의 최댓값은 -26 이다.

참고

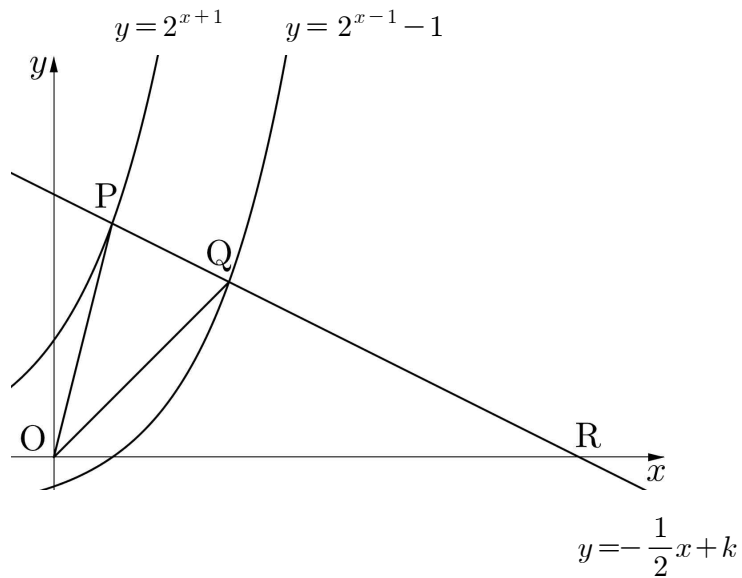


문제 코멘트

간단한 속도, 가속도 문제이다.

하나 주의할 점은 생각 없이 접하겠지 하고 $a = -25$ 으로
생각하면 안 된다는 것이다. 속도가 같아지는 순간이 없음의
의미를 정확히 알고 있지 않았으면 자칫 실수할 수 있었을
것이다.

12번: ④



$y = 2^{x-1} - 1$ 은 $y = 2^{x+1}$ 을 x 축으로 2만큼, y 축으로 -1 만큼 평행이동 시킨 그래프이다. 만나는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이기에 점 P에서 x 축으로 2, y 축으로 -1 만큼 평행이동 시키면 점 Q이다. 삼각형 OPR의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 4배이기에 $\overline{PQ} : \overline{PR} = 1 : 4$ 이다.

(원점에서 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$ 까지의 거리를 공통 높이로 삼각형 OPR와 삼각형 OPQ가 공유하기 때문에)

점 P와 점 Q의 y 좌표 차는 1, $\overline{PQ} : \overline{PR} = 1 : 4$ 이기에 점 P의 y 좌표는 4이다. 따라서 점 P의 x 좌표는 1, 따라서 $k = \frac{9}{2}$

문제 코멘트

길이비를 좌표비로 생각하는 문제는 자주 나오기도 하지만 중요한 파트라는 생각이 들어 넣어 보았다. 넓이비를 길이비로 변환, 이를 좌표비로 변환, 이 부분이 매끄럽게 흘러갔다면 쉽게 넘어갈 수 있었던 문제였을 것이다.

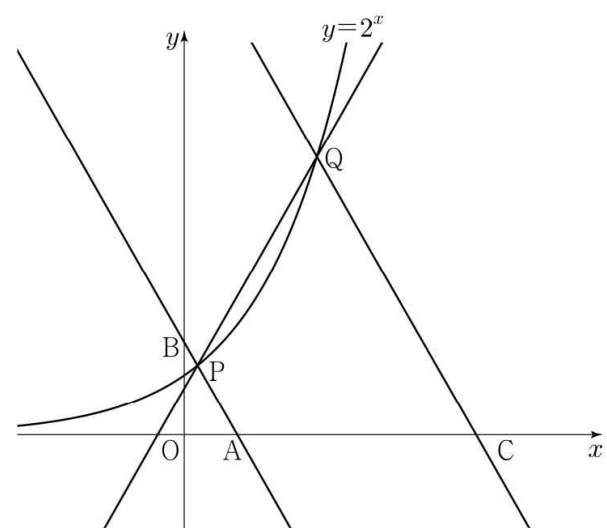
유사 기출

2023학년도 9월 평가원 21번

그림과 같이 곡선 $y = 2^x$ 위에 두 점 $P(a, 2^a)$, $Q(b, 2^b)$ 이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m 이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{AB} = 4\overline{PB}, \quad \overline{CQ} = 3\overline{AB}$$

일 때, $90 \times (a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < a < b$)



이 문항 또한 길이비를 좌표비로 변환해서 생각하는 부분이 필요한 문제였다. 특히 기울기가 m 과 $-m$ 인 것의 관계를 해석하여 길이적인 측면과 좌표적인 측면 양쪽 모두를 잘 다뤄야 했던 문제였다. 지수, 로그 함수 자체에서는 특성이랄게 그렇게 많지는 않기 때문에 평가원에서도 지수, 로그 함수 자체의 특성보다는 고1 수학적인 측면을 자주 사용하는 점이 보이기도 한다.

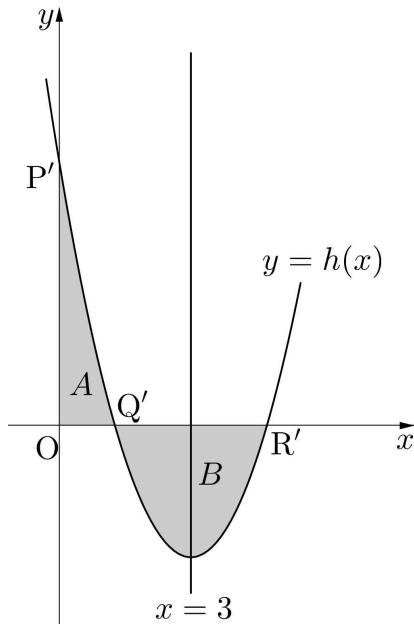
정답: 220

13번: ①

곡선 $y = x^2 - 2x + 2$ 와 직선 $y = kx - 4$ 의 차함수인

$h(x) = x^2 - (k+2)x + 6$ 를 생각해보자.

조건에 의하면 $h(x)$ 에서 넓이는 다음과 같다.



$2A = B$, $A = \frac{1}{2}B$, 따라서 $h(x)$ 를 0부터 $h(x)$ 의

대칭축인 $\frac{k+2}{2}$ 까지 적분한 값은 0이다.

따라서 $\int_0^{\frac{k+2}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{k+2}{2}} \{x^2 - (k+2)x + 6\}dx =$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{k+2}{2}x^2 + 6x \right]_0^{\frac{k+2}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{k+2}{2}\right)^3 - \left(\frac{k+2}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{k+2}{2}\right) = 0$$

계산의 편의상 $\frac{k+2}{2} = t$ 로 치환시 $-\frac{2}{3}t^3 + 6t = 0$

$$t = \frac{k+2}{2} = \pm 3,$$

두 점 P, Q는 제 1사분면 위의 점이므로 $k=4$ 이다.

문제 코멘트

다항함수에서 적분파트에서 중요한 점은 항상 계산량을 최대한 줄일 수 있는 방향으로 생각하는 것이다. 그렇기에 대부분의 문항에서 차함수 해석이 계산량을 줄여준다는 점을 인지하고 있어야 한다. 문항 자체의 난이도는 그렇게 높았지 않았지만 자칫하면 계산 지옥에 빠질 수 있었던 문제였다.

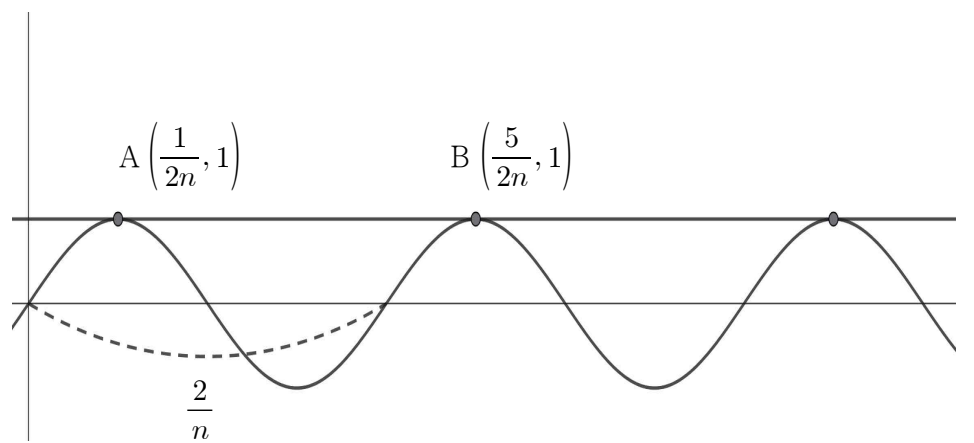
14번: ④

$f(x) = a \sin(n\pi x)$ 이기에 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 $\sin(n\pi x)$ 는 n 번 반복됨을 알 수 있다. $a=1$ 일 경우 $f(x)=1$, 다시 말하면

$$x = \frac{1}{2n} + \frac{2}{n}(k-1) \text{ - ① } (k \text{는 자연수})$$

일 때만 실근을 갖는다.

참고



1) 그렇기에 $a=1$ 일 때 모든 근의 합을 계산하면

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{n}k - \frac{3}{2n} \right\} = \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{2n} \times n = n - \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 $30 \leq n - \frac{1}{2} \leq 50$, n 은 31부터 50 총 20개

2) $a=2$ 일 경우 $f(x)$ 는 $y=3$ 과는 만나지 않고 $y=1$ 과의

교점만을 갖는다. $2\sin n\pi x = 1$ 의 근은 $\frac{1}{2n} + \frac{2}{n}(k-1)$ 에 대해

대칭성을 지니기에 총 근의 합은 $2 \times (n - \frac{1}{2})$ - ②

따라서 $30 \leq 2n - 1 \leq 50$, n 은 16부터 25까지 총 10개

3) $a=3$ 일 경우 $f(x)=3$ 의 근의 합은 ① 식을 이용해 $n - \frac{1}{2}$,

$f(x)=1$ 의 근의 합은 ②에 따라 $2n-1$, 따라서

총 근의 합은 $3n - \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $30 \leq 3n - \frac{3}{2} \leq 50$, n 은 11부터 17까지 총 7개

4) $a=4$ 일 경우 $f(x)=3$ 과 $f(x)=1$ 의 근의 합은 모두 ②에 따라 $2n-1$ 따라서 총 근의 합은 $4n-2$ 이다.

따라서 $30 \leq 4n - 2 \leq 50$, n 은 8부터 13까지 총 6개 이다.

따라서 총 순서쌍은 $20 + 10 + 7 + 6 = 43$

문제 코멘트

까다로운 개수 세기 문항이었지만 근의 합에 대한 일반적인 식을 찾고 난 이후는 꽤 수월하게 풀리는 문제였다. 삼각함수 문제를 접근할 때는 주기성과 대칭성을 항상 염두에 두어야 한다. 이 문제에서도 $a=1$ 일 때 $f(x)$ 와 $y=1$ 근의 위치를 찾는 데 주기성, 이 후 a 가 커짐에 따라 실근이 기존 찾은 좌표에 대해 대칭성을 가지기에 이미 만든 근의 합 식에 2를 곱하기만 한다는 것을 찾는데 대칭성이 활용되었다.

현재는 삼각함수 개수 세기 문항이 많아지는 추세이기에 (ex: 250620, 28예시16) 이에 대비하여 꼼꼼히 모든 케이스를 고려하는 능력을 키워야 한다.

유사 기출

2028학년도 예비시행 16번

두 자연수 a, b 에 대하여 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = |2\sin ax + b|$$

가 있다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수가 10이 되도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

정답: ④

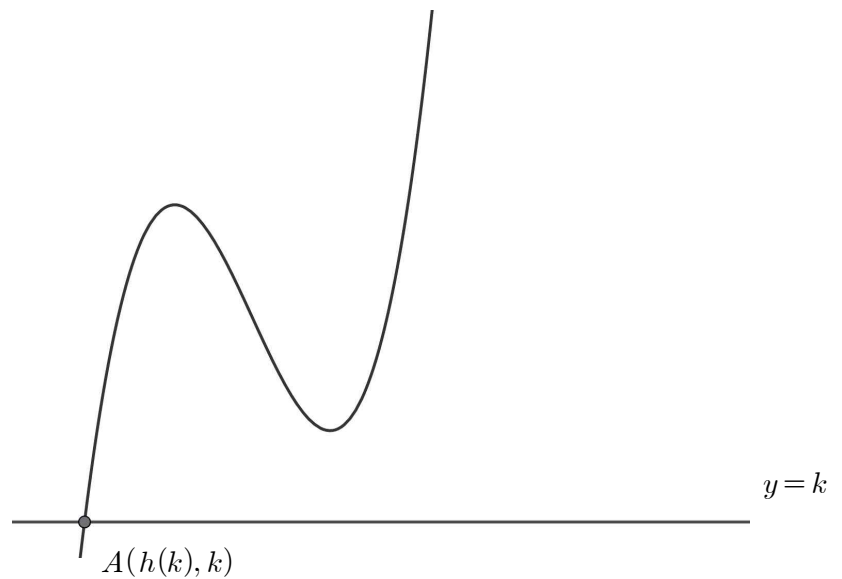
15번: ②

$a \leq p \leq q$ 모든 실수 p, q 에 대하여 부등식

$$\int_p^q \{f(x) - mx - k\} dx \geq 0$$
을 만족하기 위해선 $x \geq a$ 에서 항상

$f(x) - mx - k \geq 0$ 이어야 한다. $f(x) - mx = g(x)$ 로 두면

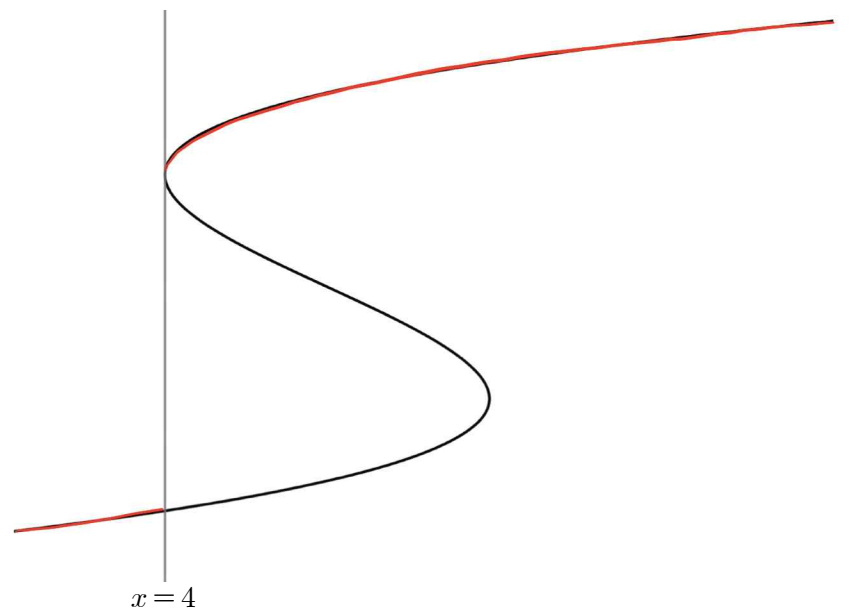
$g(x)$ 는 다음과 같이 그래프를 그려 볼 수 있을 것이다.



실수 a 의 최솟값이 $h(k)$ 이기에 $g(h(k))=k$ 임을 알아낼 수 있다.

또한 $x \geq h(k)$ 에서 항상 $g(x) \geq k$ 이기에 $h(k)$ 는 다음과 같은

양상을 보인다.



따라서 $h(k)$ 는 $g(k)$ 의 부분역함수가 된다. $h(k)$ 가 $k=4$ 에서만

불연속, $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t) = 3$ 이기에 $g(k)$ 의 극솟값은 4, 이때 x 좌표는

3이다. 연립해서 식을 세우면 $g(x) = (x-3)^2(x-A) + 4$,

문제에서의 조건에 의해 $f(x) = g(x) = 0$ 이기에 A 는 $\frac{4}{9}$ 이고

$$f'(0) = g'(0) + m = 12 \text{이기에}$$

$$g'(x) = 2(x-3)(x-\frac{4}{9}) + (x-3)^2, \quad g'(0) = \frac{35}{3} = 12 - m$$

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{3},$$

$$f(x) = g(x) + mx = (x-3)^2(x-\frac{4}{9}) + \frac{1}{3}x + 4$$

$$f(6) = 9 \times (6 - \frac{4}{9}) + 4 + \frac{1}{3} \times 2 = 56 \text{이다.}$$

문제 코멘트

생김새에 비해 난이도는 그렇게 높지 않은 문항이었다. 이번 3모 14번과 꽤나 유사한 문항이기도 하면 기본적인 정적분 해석 아이디어는 22 예비시행 12번에서 가져왔다. 이후는 부분역함수의 해석이 들어가기는 하지만 실질적으로 부분 역함수를 생각하지 않고도 연속성만으로도 해석이 되기 때문에 그렇게 어려움을 겪지는 않았을 것이다.

유사 기출

2022학년도 예비시행 12번

$0 < a < b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

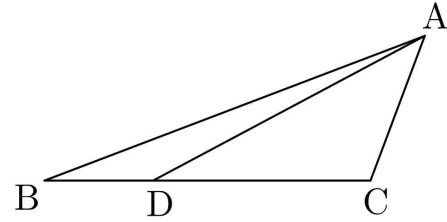
$$\int_a^b (x^3 - 3x + k) dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답: ②

20번: 7



먼저 $\sin \angle ABC : \sin \angle ACB = 2 : 2\sqrt{7}$ 이기에 사인 법칙에 의해서

$$\overline{AB} : \overline{AC} = 2\sqrt{7} : 2 \text{ 이다. 이후 } \sin \angle ACB : \sin \angle ADC = 2\sqrt{7} : \sqrt{7}$$

로 사인 법칙에 의해서 $\overline{AD} : \overline{AC} = 2 : 1$ 이다.

따라서 선분 AB, AD, AC를 $\sqrt{7}k, 2k, k$ 로 하면

삼각형 ABD와 삼각형 ADC에서 코사인 법칙으로 인해

$$7k^2 = 4k^2 + 4 - 8k \cos(\angle ADB), \quad k^2 = 4k^2 + 16 - 16 \cos(\pi - \angle ADB)$$

의 두 식을 얻을 수 있고 $\cos(\angle ADB)$ 에 대해 식을 정리하면

$$\frac{4-3k^2}{8k} = -\frac{3k^2+16}{16k} = \cos \angle ADB \text{ 따라서}$$

$$k = 2\sqrt{2}, \quad \cos(\angle ADB) = -\frac{5}{4\sqrt{2}}, \quad \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

$$S = 2k \times 2 \times \frac{1}{2} \times \sin \angle ADB = \sqrt{7}, \quad S^2 = 7 \text{이다.}$$

문제 코멘트

전체적으로 25학년도 6월 10번과 9월 10번을 참고하여 디자인 한 문항이다. 사인값의 비를 통해서 사인법칙을 활용해 변의 길이비를 알아내고 이 후 코사인 법칙을 활용해 마무리 하는 문제로 현재 수능 기조에 맞게 발상적인 부분이 없도록 만들었다.

- 1) 사인비 활용하기
- 2) 코사인 법칙으로 연립해서 풀기

이 두 개만 잘 해냈으면 쉽게 풀렸을 것이다. 마지막 코사인 법칙으로 통해 미지수를 알아낼 때도 “미지수 개수=식 개수이기에 바로 미지수를 특정할 수 있겠다”라는 생각으로 확신을 가진 채 식을 푸는 태도를 가져야 한다.

유사 기출

2025학년도 6월 평가원 10번

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$

(나) $\cos B = \cos C$

- ① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
 ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

정답: ⑤

21번: 74

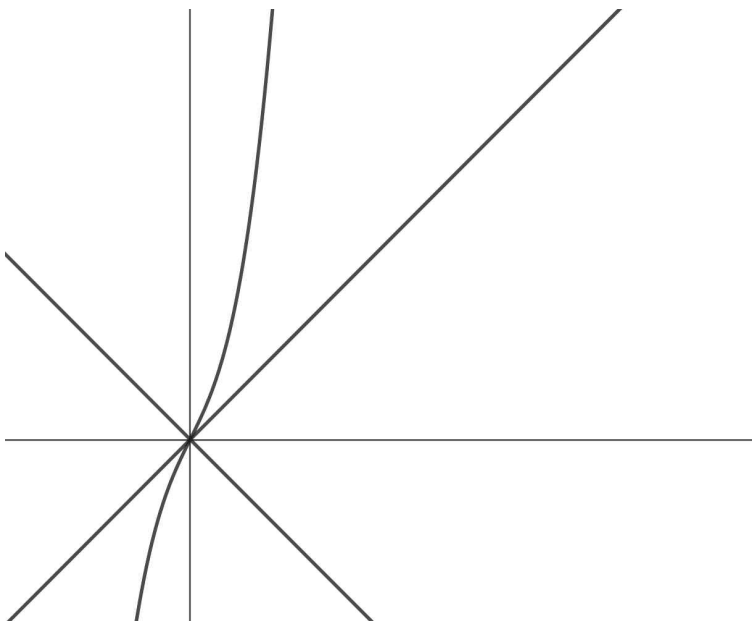
먼저 (가)조건을 분석하면 $f(x)=\pm x$ 의 실근의 개수는 1개

$f(x)=x$ 와 $f(x)=-x$ 의 실근 모두 최소 1개 이기 때문에

따라서 공통 근을 1개를 가져야 한다.

$x=-x$ 의 실근은 0이기 때문에 따라서 $f(x)=\pm x$ 의 근은 0만

존재한다. 따라서 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 실근이 1개만 존재하기 위해서는 $f(x)=x$ 의 실근이 $x=0$ 에서만 존재하며 $f'(0)>0$

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ 로 두면 $f'(0)>0$, $b>0$ 이며

$x(x^2+ax+b)=x$, $x^2+ax+b=1$ 은 실근을 가지지 않으며

따라서 방정식 $x^2+ax+b-1=0$ 의

판별식 $D_1=a^2-4(b-1)<0$ 이다.

이제 (나)조건을 해석하면 일단 함수 $f(x)$ 는 0에서만 부호가 바뀌기에 $|f(x)|=|3x|$ 는 $f(x)=3x$ 와 같다.

$f(x)=x(x^2+ax+b)=3x$, $f(x)=x(x^2+ax+b)=3x$,

$x^2+ax+b-3=0$ 의 실근의 합은 2, 따라서 $x^2+ax+b-3=0$

이 중근을 가질 경우 $a=-4$, $b=7$

두 개의 서로 다른 실근을 가질 경우 $a=-2$,

판별식 $D_2=4-4(b-3)>0$ 이다.

먼저 $a=-4$, $b=7$ 일 경우 $f(2)$ 는 정수이기에 케이스 만족,

$f(4)=28$

두 개의 서로 다른 실근을 가질 경우 $a=-2$,

$D_1=4-4(b-1)<0$, $D_2=4-4(b-3)>0$ 이기에 $2<b<4$

$f(2)=2b$ 는 정수이기에 $4<2b<8$, $2b$ 는 5, 6, 7 만 가능하다.

$f(4)=32+4b$

이 경우 $f(4)$ 의 최솟값은 42, 최댓값은 46이다.

따라서 $M=46$, $m=28$, $M+m=74$ 이다.

문제 코멘트

과도한 개형 추론은 없애고 삼차함수의 근에 대해 분석하는 점에서 25학년도 21번을 많이 참고했다. 마지막에 판별식을 쓰는 과정에서도 비슷한 느낌을 받을 수 있었을 것이다. (가)조건 해석은 $f(x)=\pm x$ 로 생각을 해도 되고 그냥 $|f(x)|$ 와 $|x|$ 의 그래프를 그려 비교해봐도 $f(x)$ 가 (0,0)을 지난다는 것을 쉽게 알 수 있었을 것이다.

여기서 중요했던 것은 판별식을 통해 범위를 살피는 것이다. 최댓값, 최솟값이 주어졌을 경우 항상 그래프를 찍는 것보다는 확실하게 접근하여 범위를 좁히는 것을 우선시 해야 한다.

(나)에서 중근을 갖는 경우를 생략해서 답이 88이 나온 분들도 꽤 있었을 것 같다. 이러한 실수를 방지하기 위해서는 케이스를 다 분석해야 하며 25학년도로 넘어오며 엄밀한 케이스 분석을 중요하게 여기게 된 수능 기조에 따라 이러한 연습은 필요할 것이다.

또한 정수 조건이 어떤 식으로 쓰여야 하는지도 생각해봐야 한다. 정수 조건은 부등호 사이에서 가능한 값을 특정하는 역할로 사용될 수 있는데 이러한 사용은 25학년도 21번에서 부등식 $-3<a<5$ 에서 a 의 최댓값을 특정하는 부분에서도 살펴볼 수 있다.

유사 기출

2025학년도 수능 21번

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x\rightarrow\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

정답: 16

22번: 19

짝수, 홀수 여부에 따라서 a_{n+1} 가 다르게 결정되는 수열이기에 k 를 케이스를 나누어서 분석하도록 하자.

1) $k=4n-3$ (n 은 자연수)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$4n-3$	3	$6n-3$	$7n-3$		

$a_3+a_4=13n-6$ 이기 때문에

i) n 이 홀수일 경우 $a_5=13n-6, a_6=20n-9$
 $20\leq 20n-9\leq 30$ 을 만족하는 홀수 n 은 존재하지 않는다.

ii) n 이 짝수일 경우 $a_5=\frac{21}{2}n-6, a_4+a_5=\frac{35}{2}n-9$
 $\frac{35}{2}n-9$ 이 홀수일 경우 $20\leq \frac{35}{2}n-9\leq 30$ 만족시키는

짝수 n 은 존재하지 않는다. $\frac{35}{2}n-9$ 이 짝수일 경우

$20\leq \frac{35}{4}n-\frac{9}{2}+4n-3\leq 30$ 을 만족시키는 짝수 n 은 존재하지 않는다. (사실 이 경우 n 에 2부터 대입시켜 봐도 성립하지 않는 것을 더 쉽게 알 수 있다.)

2) $k=4n-2$ (n 은 자연수)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$4n-2$	3	$4n+1$	$6n$	$10n+1$	$16n+1$

$20\leq 16n+1\leq 30$ 을 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

3) $k=4n-1$ (n 은 자연수)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$4n-1$	3	$6n$	$6n+3$	$12n+3$	$13n+2$

$20\leq 13n+2\leq 30$ 을 만족하는 자연수 n 은 2이다.
따라서 $k=7$

4) $k=4n$ (n 은 자연수)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$4n$	3	$4n+3$	$6n+3$	$9n+3$	

$a_4+a_5=15n+6$ 이기에 n 이 짝수일 경우 $a_6=\frac{23}{2}n+3,$
 $20\leq \frac{23}{2}n+3\leq 30$ 를 만족시키는 $n=2, k=8$

n 이 홀수일 경우 $a_6 = 15n + 6$,

$20 \leq 15n + 6 \leq 30$ 을 만족시키는 $n = 1$, 따라서 $k = 4$

가능한 k 의 합은 $7 + 8 + 4 = 19$ 이다.

문제 코멘트

수열 문제를 풀 때 가장 중요한 점은 어떤 케이스도 빼먹지 않고 모두 살펴보는 것이다. 그러한 점에서 이 문제의 해설처럼 처음 미지수가 되는 숫자를 케이스를 나눠서 살펴보는 것도 꽤 도움이 될 수 있다.

사실 문제 자체의 내용은 거의 없는 편이다. 현재 기조처럼 추론은 없고 오직 단순 나열이 주가 되었다. 실수로 변별하겠다는 것이 조금은 치사하게 느껴질 수 있지만 그게 현재 수능 기조인 만큼 이에 맞춰서 공부해나갈 필요가 있다.

27번: ①

주어진 대로 식을 세워봅시다.

$$e^{x-t} + \frac{1}{2}x^2 = f(t) \quad \text{--- ①}$$

한점에서만 만나기에 접한다는 것을 알 수 있고

따라서

$$e^{x-t} + x = 0 \quad \text{--- ②}$$

 $t = -1$ 일 때 $e^{x+1} + x = 0$ 이기에 $x = -1$,

$$e^{x-t} + \frac{1}{2}x^2 = f(t) \text{에 } t = -1 \text{과 } x = -1 \text{ 를 대입하면 } f(-1) = \frac{3}{2}$$

 $f'(t)$ 를 구하기 위해 $e^{x-t} + \frac{1}{2}x^2 = f(t)$ 을 t 에 대해 미분하면

$$\left(\frac{dx}{dt} - 1\right)e^{x-t} + x \times \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad t = -1 \text{과 } x = -1 \text{ 를 대입하면}$$

$$f'(-1) = \frac{dx}{dt} - 1 - \frac{dx}{dt} = -1$$

$$\text{따라서 } f(-1) \times f'(-1) = -\frac{3}{2}$$

문제 코멘트

간단한 음함수 미분법 문제였다. 사실 한 점에서 만난다는 것이 접한다라고 연결되는 것은 그렇게 엄밀한 풀이라고 할 수는 없다. 하지만 음함수 미분법 문제를 풀 때 한정해서는 접하기에 문제가 성립하는 것이기 때문에 이러한 식으로 접근하는 것이 옳다고 할 수 있다.

$e^{x+1} + x = 0$ 의 실근이 $x = -1$ 인 것이 자연스럽게 보이지 않을 수도 있지만 초월함수와 다항함수를 엮었을 때 일반적인 근을 구할 수는 없다. 따라서 이러한 형태에서는 무조건 가능할 법한 실수를 대입해서 찾아내는 것만이 유일한 방법이다. 25학년도 수능 30번에서 $\sin x = x$ 의 실근이 0뿐이라는 것을 찾아내는 것과 비슷하다고 할 수 있다.

또한 마지막 $f'(-1)$ 를 구하는 과정에서 $\frac{dx}{dt}$ 가 제거되기에

$\frac{dx}{dt}$ 를 직접 구하지 않았어도 됐지만 만약 제거가 안되는

상황에서는 $e^{x-t} + x = 0$ 를 t 에 대해 미분해서 구했어야 하는 것을 기억하고 있다.

24학년도 수능 27번에서도 꽤 난이도 높은 음함수 미분이 나왔던 것처럼 미적분은 언제 27번에 당황할 문제가 나와도 이상하지 않은 끈찍한 과목이다. 그렇기에 미적분을 선택한 이상 이 정도의 문제는 바로 풀고 넘어갈 수 있을 정도의 실력을 갖춰야 할 것이다.

유사 기출

2024학년도 수능 미적분 27번

실수 t 에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y = \frac{1}{e^x} + e^t$ 에 접하는

직선의 기울기를 $f(t)$ 라 하자. $f(a) = -e\sqrt{e}$ 를 만족시키는 상수 a 에 대하여 $f'(a)$ 의 값은?

$$\text{① } -\frac{1}{3}e\sqrt{e} \quad \text{② } -\frac{1}{2}e\sqrt{e} \quad \text{③ } -\frac{2}{3}e\sqrt{e}$$

$$\text{④ } -\frac{5}{6}e\sqrt{e} \quad \text{⑤ } -e\sqrt{e}$$

정답: ①

어려운 음함수 미분법 문제이다. 문제 해석 자체는 간단한 축에 속했지만 이후 계산 과정은 상당히 실수할 부분도 많고 복잡하다고도 할 수 있었기에 현장에서 풀었을 때는 상당히 시험지 운영에 문제를 일으키 만한 문제였다.

이러한 음함수 미분 문제를 풀 때는 무엇이 변수이고 무엇이 그로 인해 변화하는 함수인지에 대한 명확한 인지가 선행되어야 수월한 문제 풀이가 가능할 것이다.

정답률 또한 36%로 미적분 표본에 3점 짜리에 불과함에도 상당히 어려웠음을 알 수 있다.

28번: ③

$g(x) = \int_a^x e^{f(t) + |f(t)|} dt$ 에서 양변을 미분하면

$g'(x) = e^{f(x) + |f(x)|}$ 따라서

$f(x) \leq 0$ 일 때는 $g'(x) = 1$, $f(x) > 0$ 일 때는

$g'(x) = e^{2f(x)} > 1$ 이다.

따라서 $g'(x) \geq 1$ 이기에 $g(x)$ 와 $g^{-1}(x)$ 의 교점은 $g(x) = x$

의 근에서만 나온다.

(가)조건에 의해 $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ 이고

$g'(x) \geq 1$ 이기에 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서는 $g'(x) = 1$ 이다.

여기서 최솟값이 0, 최댓값이 1 이기에

$\lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) > 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+} g'(x) > 1$ 임을 알 수 있다.

따라서 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) > 0$

그렇기에 $f(x) = x(x-1)(x-k)$ ($k < 0$) 으로 나타낼 수 있다.

(나)조건에 의해

$$\int_0^2 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx + \int_1^2 f'(x)g'(x)dx$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $g'(x) = 1$ 이고

구간 $[1, \infty)$ 에서 $g'(x) = e^{2f(x)}$ 이기에

$$\int_0^1 f'(x)g'(x)dx + \int_1^2 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 f'(x)dx + \int_1^2 f'(x)e^{2f(x)}dx$$

$$= f(1) - f(0) + \left| \frac{1}{2} e^{2f(x)} \right|_1^2 = \frac{1}{2} e^{2f(2)} - \frac{1}{2} = \frac{e^{10} - 1}{2}$$

따라서 $f(2) = 2 \times 1 \times (2 - k) = 5$, $k = -\frac{1}{2}$ 이다.

$$f(5) = 5 \times 4 \times \left(5 + \frac{1}{2} \right) = 110$$

문제 코멘트

$g(x)$ 라는 함수를 분석하기에 미분하는 것은 매우 자연스러운 수순일 것이다. 미분한 $e^{f(t) + |f(t)|}$ 도 당황스러운 생김새일 수 있지만 $f(t) + |f(t)| \geq 0$ 임을 알아낸 이후는 비교적 쉽게 풀 수 있었을 것이다.

(가)조건을 의미하는 것이 가장 중요했던 문제로서 구간 내에서 평균변화율과 도함수의 최솟값이 같을 때 직선 형태로 이어진다는 부분은 미적분 뿐만 아니라 공통에서도 기출에서 꽤 다루어졌던 소재였다.

이후 (나)조건은 구간에 따라 $g'(x)$ 의 형태가 달라지기에

당연히 $\int_0^2 f'(x)g'(x)dx$ 를 분리해서 적분하게 되고

이를 통해 $f(x)$ 의 나머지 근을 알아낼 수 있었다.

$f(t) + |f(t)|$ 나 $f(t) - |f(t)|$ 와 같은 형태는 가장 최근에는 25학년도 6월 15번에서도 다루어졌으며 기출에서 꽤 흔히 볼 수 있는 형태이다. 보통 적분과 관련해서 다뤄지는 경우가 많은데 이러한 형태의 그래프가 어떤식으로 표현되는 지는 알아 두는게 중요하다.

29번: 9

a_n 과 b_n 에 대하여 주어진 정보가 별로 없기에 $a_m = b_m = k$ 를 만족시키는 m 에 대하여 먼저 생각을 해보자 a_n 은 홀수항은 양수, 짝수항은 음수고 b_n 은 모든 항이 양수이기 때문에 m 은 홀수라는 정보를 알 수 있다.

c_3 에 대한 범위가 주어졌는데 현재 미지수는 m, k 두 개,

식으로 주어진 것은 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 89$ 하나 밖에 없기에

범위 조건으로 m 을 특정시킬 수 있을 것이다.

그렇기에 c_n 에서 m 주변을 조사하면 다음과 같다.

c_{m-4}	c_{m-3}	c_{m-2}	c_{m-1}	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}
$65k$	$35k$	$5k$	$5k$	0	$\frac{5}{6}k$	$\frac{5}{36}k$

m 은 홀수라는 정보를 이미 알고 있기 때문에

c_3 에 대해 생각하면 c_{m+2t} (t 는 정수)에 대해서만 찾아보면

되는데 범위 조건을 통해서 c_{m-2} 가 c_3 임을 쉽게 알 수 있다.

따라서 $m=5$ 이고 이를 통해서 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 에 대한 식을 세우면

n 이 홀수 일 때 $n=5$ 를 경계로 $|b_n - a_n|$ 의 부호가 바뀌고

앞의 표를 활용하면 $\sum_{n=1}^5 c_n = 110k$ 이기 때문에

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 110k + \sum_{n=5}^{\infty} |b_n - a_n| =$$

$$110k + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} k \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} k \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{445k}{4} = 89$$

따라서 $k = \frac{4}{5}$, $p+q=9$

문제 코멘트

먼저 c_3 에 대해 값이 아닌 범위로 주어진 부분에 집중해야 할 것이다. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 89$ 라는 식을 제외하고는 정보가 제한되었기 때문에 이러한 범위가 특정 값을 알아내는데 도움을 줄 것이라는 생각을 해야 하고 m 이 홀수라는 점에서 착안해서 범위와 엮어서 m 에 대한 정보를 얻을 수 있다는 생각으로 c_m 의 주변을 조사함으로써 m 에 대한 직접적인 값을 얻을 수 있었다. 마지막에서 $\sum_{n=1}^5 c_n = 110k$ 을 얻는 과정에서도 굳이 식을 작성하지 않아도 c_n 의 $n=5$ 까지의 항은 단순 산수를 통해서 얻을 수 있었기에 계산을 줄이기 위해 이후 $n > 5$ 에서의 항만 등비급수의 계산공식을 활용했다.

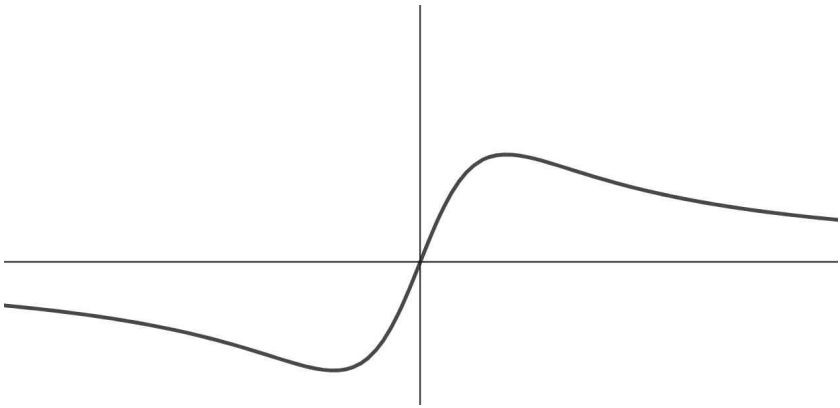
30번: 32

먼저 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 에 대하여 분석하면 점 $(0, c)$ 에 대하여 대칭이고

미분시 $a\frac{-x^2+b}{(x+b)^2}$ 으로 $-\sqrt{b}$ 에서 최솟값 $-\frac{a}{2\sqrt{b}}+c$, $+\sqrt{b}$ 에서

최댓값 $\frac{a}{2\sqrt{b}}+c$ 을 갖는다. 또한 $y=c$ 를 점근선으로 갖는다.

참고) $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 의 그래프



$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라 정의되었기에

$\sin f(x)$ 의 치역인 닫힌구간 $[-1, 1]$ 내에서만 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 의

함수값이 존재해야 할 것이다.

$f(x)$ 에 대하여 분석하기 위해 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin f(x)$ 을

생각하면 이 둘 모두 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 의 점근선인 c 로 수렴한다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A_2$ 로 수렴한다고

생각할 수 있다. ($\lim_{x \rightarrow \infty} \sin A_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin A_2 = c$)

$g(t)$ 의 불연속점에 대하여 생각하면 $g(t)$ 가 불연속일 수 있는

t 값은 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이기에

$f(x)$ 의 점근선의 y 좌표와 극값의 y 좌표 뿐이다.

$$f'(x)\cos f(x) = \frac{-x^2+b}{(x^2+b)^2}, f'(x) = \frac{-x^2+b}{(x^2+b)^2} \times \frac{1}{\cos f(x)}$$

이기에 $f(x)$ 는 최대 2개의 극값만을 갖는다.

$\alpha_1 = f(-2)$ 에서 만약 $f'(-2)$ 가 0이 아니라면 α_1 보다 작은

$g(t)$ 가 불연속인 t 값이 존재할 수 밖에 없기 때문에

$$f'(-2) = 0 \text{이다. 따라서 } f'(-2) = \frac{-4+b}{(4+b)^2} \times \frac{1}{\cos f(-2)} = 0$$

으로 $b=4$ 이다.

앞에서 말했듯 $g(t)$ 가 불연속일 수 있는 t 값은 $f(x)$ 의 점근선의

y 좌표와 극값의 y 좌표 뿐인데 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 모두

점근선으로 수렴하고 α_1 이 극값인게 확실한 상태이기에 가능한

경우는 불연속점이 극값 2개와 점근선 1개 또는 점근선 2개와

극값 하나인 경우다. 첫 번째 케이스부터 생각해보면

1) 극값 2개, 점근선 1개

$$\sin \alpha_1 = -\frac{a}{2\sqrt{b}} + c, \sin \alpha_2 = c, \sin \alpha_3 = \frac{a}{2\sqrt{b}} + c \text{이기에}$$

$$\sin^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_3 \text{의 조건을 만족하지 못한다.}$$

2) 극값 1개, 점근선 2개

이게 가능하기 위해선 $f(x)$ 가 하나의 극값만을 가져야 하기에

$$f'(2) \text{가 } 0 \text{이 아니어야 하며 따라서 } f'(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} \times \frac{1}{\cos f(x)}$$

에서 $\cos f(2) = 0$, $\sin f(2) = 1$ 이어야 한다.

($\sin f(-2) < \sin f(2)$ 이기 때문에 $\sin f(2)$ 가 -1 일 수는 없다.)

$$\frac{ax}{x^2+b}+c \text{의 범위와 이를 연결지으면 } \frac{ax}{x^2+4}+c \text{의 최댓값}$$

$$\frac{a}{4}+c=1 \text{이다.}$$

(닫힌구간 $[-1, 1]$ 내에서만 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 의 함수값이 존재하기 때문에)

$$\sin \alpha_1 = -\frac{a}{4} + c, \sin \alpha_2 = c, \sin \alpha_3 = c \text{이기에 } c^2 = \left(-\frac{a}{4} + c\right)^2,$$

$$\frac{a}{4} + c = 1 \text{을 이용해 정리하면}$$

$$c^2 = (2c-1)^2, c = \frac{1}{3}, a = \frac{8}{3}, k = \frac{1}{9} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{abc}{k} = \frac{\frac{8}{3} \times \frac{1}{3} \times 4}{\frac{1}{9}} = 32 \text{이다.}$$

문제 코멘트

어렵다.

$\sin f(x)$ 의 치역을 통해 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 의 함수값의 범위를 알아

내야 했고 $g(x)$ 가 어떤 경우에 불연속이 될 수 있는지를 알아
냈어야 했다. 함수 $g(x)$ 가 점근선과 극값에서만 불연속이 될
수 있다는 점을 알아내고 이후 이를 통하여 남은 조건으로
값들을 특정해냈어야 했던 문제였다.

해설에서는 그래프를 크게 활용하지는 않았지만 해설의 풀이를
떠올리지 못했을 경우에는 $\sin x$ 와 $\frac{ax}{x^2+b}+c$ 를 직접 그려가며
 $f(x)$ 의 형태를 유추하는 풀이도 꽤나 괜찮았을 것이다.

미적분 총평

미적분은 어려웠습니다. 공통보다 확실히 난이도가 있게
구성했으며 아마 27번부터 막힌 분들도 꽤 있었으리라
생각합니다. 전체적으로 24수능 미적분을 참고했습니다.
그렇기에 24수능처럼 27번의 음함수 미분법, 28번의 깨닫기
전에는 안 풀리는 구성, 29번의 계산을 동반한 수열,
30번에는 삼각함수로 구성했습니다.

27번은 음함수 미분으로 24수능 27번과 비슷하게
만들었습니다. 미적분 27번은 항상 어렵기에 딱 미적분 27번
난이도에 걸맞게 구성했다고 생각합니다.

28번은 약간은 생소할 수 있는 주제로 만들었습니다.
개인적으로는 24수능 28번처럼 문제의 조건이 무엇을 말하는
것인지를 정확히 깨닫기 전까지는 풀기 어렵도록 만들려고
노력했습니다. 물론 24수능 28번보다는 쉽긴 합니다.

29번은 항상 나오던 등비급수에 약간의 변조를 줬습니다.
절댓값이 있기에 어려움을 느낄 수는 있지만 결국에
수열에서는 관찰과 해석만 한다면 풀 수 있다는 점을 생각하길
바랍니다.

30번은 어렵습니다.
함수의 치역, 극값, 점근선 등 약간 정확하게 생각하지 않은
소재들을 완벽하게 이해해야만 풀 수 있게 구성했습니다.
물론 운 좋게 개형을 찍어맞춰 풀 수도 있지만 개인적으로는
왜 저렇게 되는지 완벽히 이해하는 것이 더 중요하다고
생각합니다.

아마 26수능의 미적분은 어려울 것입니다.
현재 수능 기조가 계속되는 이상 확통은 쉽고 미적분은 어려울
것으로 예상되기에, 수험생 여러분들도 그러할 것이라는
생각을 갖고 대비하시길 당부합니다.

문제 코멘트

최대/최소는 언제나 고정값을 기준으로 관찰하고 변형한다.
 최대일 때를 기준으로 미지의 고정값을 구해야 하므로
 고정값인 $\overline{PH}$ 에 주목하는 것이 유리하다.
 $\overline{PH}$ 와 $\overline{QP}:\overline{OQ}$ 의 연관성을 이용하여 평면을 연장해야 하는
 방향이 정해지고, 남은 것은 고정 위치 파악.

29번: 8

STEP 1: 평행선을 이용하여 답을 찾자.
 두 점 Q, R의 x 좌표가 같으므로,
 직선 QR가 y 축 $\Rightarrow$ 직선 OF와 평행하다.
 따라서, 두 삼각형 OPF, QPR이 닮음이다.
 $\overline{QO}:\overline{FR}=3:4$ 이므로, 계산의 편의상 네 선분
 $\overline{QO}$, $\overline{OP}$, $\overline{PF}$, $\overline{FR}$ 의 길이를 각각 $3k$, $3t$, $4t$, $4k$ 라 하자.

STEP 2: 포물선의 정의에 입각하여 상황을 조사하자.
 점 P에서 두 포물선 C_1 , C_2 의 점근선에 내린 수선의 발을 각
 각 H_1 , H_2 라 하고, 점 Q에서 포물선 C_1 의 점근선에 내린 수
 선의 발을 I_1 , 점 R에서 포물선 C_2 의 점근선에 내린 수선의
 발을 I_2 라 하자. 포물선의 정의에 의하여 네 선분
 $\overline{QI_1}$, $\overline{PH_1}$, $\overline{PH_2}$, $\overline{RI_2}$ 의 길이는 각각 $3k$, $3t$, $4t$, $4k$ 이다.
 이때,

$$\cos(\angle QPH_1) = \frac{3t-3k}{3t+3k} = \frac{t-k}{t+k},$$

$$\cos(\angle RPH_2) = \frac{4t-4k}{4t+4k} = \frac{t-k}{t+k},$$

$$\Rightarrow \cos(\angle QPH_1) = \cos(\angle RPH_2) \text{이므로}$$

$$\angle OPF = \frac{\pi}{2}$$

STEP 3: 마무리하자.

$$\overline{OP}:\overline{PF}=3:4 \text{이고 } \angle OPF = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \overline{OP}=12, \overline{PF}=16 \text{이고}$$

두 직선 OP, PF의 기울기가 각각 $\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$ 이다.

$$\text{포물선의 정의에 의하여 } p = \frac{12}{5}, q = \frac{16}{5}, 2p+q=8$$

문제 코멘트

비주얼이 복잡할수록 이차곡선의 정의를 중심으로 하여
 생각한다. 정의에 따른 보조선을 그려보고, 답음과 합동을
 우선하자. 외의 조건이 보이지 않는다면, 각과 길이에 따른
 계산을 염두에 두자.

다만, 위 문항에 한정하여 포물선의 통째 답음으로 해결할
 수 있다. 통째로 답음이고 90° 회전이므로 직선도 90° .

30번: 170

STEP 1: 익숙한 꼴이 보이면 연관지어 변형한다.

$$\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{BQ}|} = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}|} \times \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}|} = \cos(\angle APQ) = \cos(\angle ABQ) \text{이므로}$$

$$\cos(\angle ABQ) \times \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}| \times \cos(\angle ABQ)} = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = 5\sqrt{2}$$

STEP 2: 나머지 내적 조건을 이용하여 계산한다.

$|\overrightarrow{BP}| = p$, $|\overrightarrow{BQ}| = q$ 라 할 때, 삼각형 BPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$p^2 + q^2 - 2pq \cos(\angle PAQ) = p^2 + q^2 - 2(\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ}) = 50,$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = -10 \text{이므로 } p^2 + q^2 = 30$$

두 삼각형 APB, AQB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2 = 10^2 - p^2 + 10^2 - q^2 = 170$$

문제 코멘트

익숙한 형태가 보인다면 이를 기준으로 끌고 가는 것이 좋다. 각을 나타내는 형태가 보이므로, 그 형태가 보이도록 변형, 사인법칙에 해당하는 식을 얻을 수 있다. 구조상 지름 길이를 알고 내적 조건에 각이 포함돼있으므로 사실 각 자체를 구할 필요는 없다.