

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

정답: ④
풀이:

$$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(5^{1-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

2. 함수 $f(x) = x^2 + x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답: ⑤
풀이:
 $f'(x) = 2x + 1$

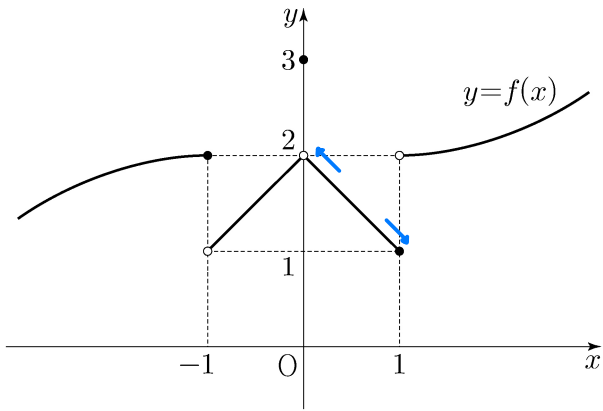
$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 5$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^5 (a_k + 1) = 9$ 이고 $a_6 = 4$ 일 때, $\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정답: ③
풀이:
 $\sum_{k=1}^5 (a_k + 1) = \sum_{k=1}^5 a_k + 5 = 9$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^5 a_k = 4$
 $\therefore \sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^5 a_k + a_6 = 8$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답: ③
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3$

5. 함수 $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

[3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정답: ⑤

풀이: $\rightarrow$ 인수에 $(x-1)$ 이 있으니까 $f'(x)$ 의 식을 구할 필요 x

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+2x+2)$$

$$\Rightarrow f'(1) = (1+1) \times (1^2 + 2 \times 1 + 2) = 10$$

여담

$$f(x) = (x-a)g(x) \text{라 할 때}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$$

$$\Rightarrow f'(a) = g(a)$$

6. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$ 일 때,

$\sin\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

정답: ①

풀이:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta = \frac{3}{5} \rightarrow \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{4}{5} \quad (\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \sin\theta < 0)$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

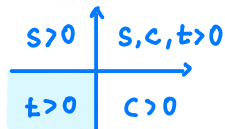
여담

$\theta \pm \frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 하는 방법

$\rightarrow n$ 이 홀수라면 함수가 바뀌고, n 이 짝수라면 함수 그대로!

$\rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 라고 가정했을 때, $\theta \pm \frac{n\pi}{2}$ 가 위치한 사분면에서의

‘원래’ 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호



7. x 에 대한 방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

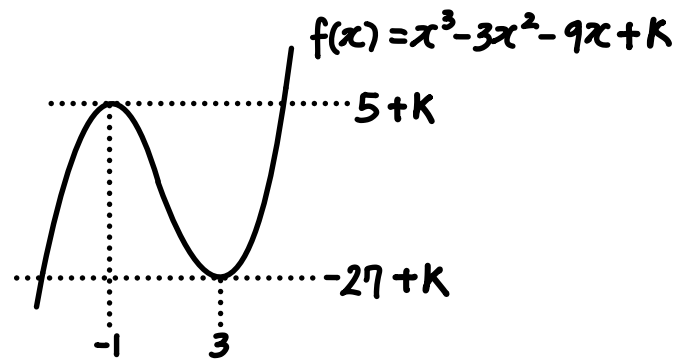
정답: ④

풀이:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$\Rightarrow f(-1) = k+5, \quad f(3) = k-27$$



$$\Rightarrow k+5=0 \text{이거나 } k-27=0 \text{일 때}$$

방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2개

$$\therefore \text{가능한 } k \text{의 값의 합은 } -5 + 27 = 22$$

8. $a_1 a_2 < 0$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 = 16, \quad 2a_8 - 3a_7 = 32$$

일 때, $a_9 + a_{11}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

정답: ①

풀이:

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면,

$$a_7 = a_6 \times r = 16r$$

$$a_8 = a_6 \times r^2 = 16r^2$$

$$\Rightarrow 2 \times 16r^2 - 3 \times 16r = 32$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad r = 2$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2} \quad (\because a_1 a_2 = (a_1)^2 \times r < 0 \rightarrow r < 0)$$

$$a_9 = a_6 \times r^3 = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -2$$

$$a_{11} = a_6 \times r^5 = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_9 + a_{11} = -\frac{5}{2}$$

9. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & (x < 0) \\ -x^2 + 3 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} f(0-) = -\frac{1}{2} \\ f(0+) = f(0) = 3 \end{matrix}$$

에 대하여 함수 $(f(x) + a)^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

정답: ③

풀이:

함수 $(f(x) + a)^2$ 이 $x=0$ 에서 연속

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2} + a\right)^2 = (3 + a)^2$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

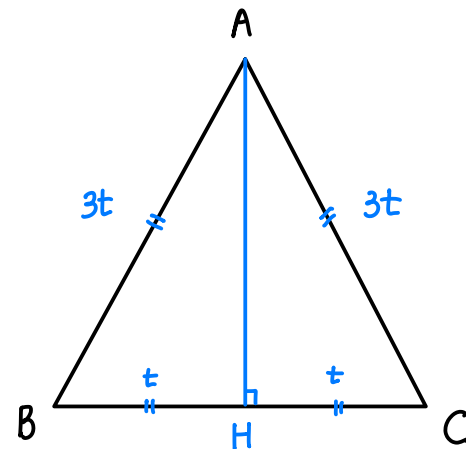
10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가

9π 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? [4점]

$$(가) \quad 3 \sin A = 2 \sin B$$

$$(나) \quad \cos B = \cos C$$

- ① $\frac{32}{9} \sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9} \sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3} \sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9} \sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9} \sqrt{2}$



정답: ⑤

풀이:

$$3 \sin A = 2 \sin B$$

$$\Rightarrow \overline{BC} : \overline{AC} = 2 : 3 \quad (\text{사인법칙} \rightarrow \text{사인비} = \text{길이비})$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 2t, \quad \overline{AC} = 3t \quad \text{라 하자.}$$

$$\cos B = \cos C$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 3t$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름을 r 라 하면 $r = 3$

($\because$ 외접원의 넓이 $9\pi = \pi r^2$) $\rightarrow \Delta ABC$ 가 이등변삼각형 $\rightarrow$ 수직이등분

점 A 에서 선분 BC 에 수선의 발을 내리고, 그 점을 H 라 하면,

$$\overline{AH} = t \rightarrow \cos B = \frac{1}{3}, \quad \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\sin^2 B + \cos^2 B = 1)$$

$$\Rightarrow 2 \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3t \quad (\because \text{삼각형 ABC 에서 사인법칙})$$

$$\Rightarrow t = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \text{삼각형 ABC 의 넓이는} \quad \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B = \frac{64}{9} \sqrt{2}$$

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-1}{x-a} = 3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 y 절편이 4일 때, $f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

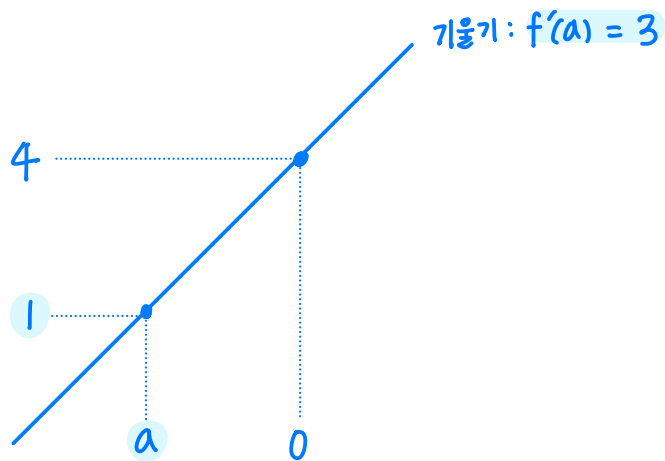
- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

정답: ⑤

풀이:

$$f(a)=1, f'(a)=3$$

점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식이 $(0, 4)$ 를 지남



$$\Rightarrow \frac{4-1}{0-a} = 3 \rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(-1)=1, f'(-1)=3$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+1)^3+p(x+1)^2+3(x+1)+1 \rightarrow p=-5 \quad (\because f(0)=0)$$

$$\therefore f(1)=4p+15=-5$$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는

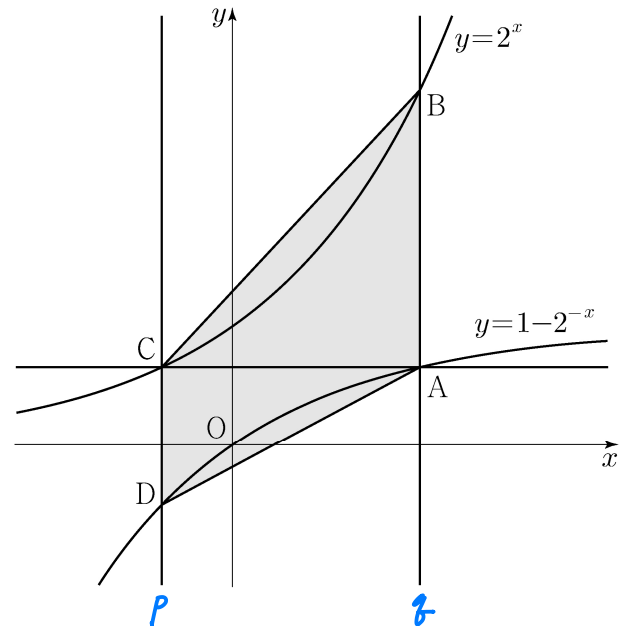
점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는

점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선

$y=2^x$ 과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y 축에 평행한 직선이

곡선 $y=1-2^{-x}$ 과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$ 일 때,

사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3 - \frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3 - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3 - \frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3 - 2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3 - \frac{9}{4}$

정답: ③

풀이:

점 C와 D의 x 좌표를 p , 점 A와 B의 x 좌표를 q 라 하자.

$$\Rightarrow 2^p = 1 - 2^{-q} \rightarrow 1 = 2^p + 2^{-q}$$

$$\overline{CD} = 2^p - (1 - 2^{-p}), \overline{AB} = 2^q - (1 - 2^{-q})$$

$$\Rightarrow 2^q + 2^{-q} - 1 = 2 \times (2^p + 2^{-p} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^q + 2^{-q} - (2^p + 2^{-p}) = 2 \times \{2^p + 2^{-p} - (2^p + 2^{-q})\}$$

$$\Rightarrow 2^q - 2^p = 2 \times (2^{-p} - 2^{-q}) \rightarrow 2^q - 2^p = 2 \times \frac{1}{2^{p+q}} \times (2^q - 2^p)$$

$$\Rightarrow 2^{p+q} = 2 \rightarrow p+q=1$$

$$\Rightarrow 2^p = 1 - 2^{p-1} \rightarrow p = \log_2 \left(\frac{2}{3} \right) \rightarrow q = \log_2 3$$

$\therefore$ 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (q-p) \times (\overline{AB} + \overline{CD}) = \frac{1}{2} \times (q-p) \times 3\overline{CD}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \log_2 3 - \log_2 \left(\frac{2}{3} \right) \right\} \times 3 \left\{ 2^{\log_2 \left(\frac{2}{3} \right)} - \left(1 - 2^{-\log_2 \left(\frac{2}{3} \right)} \right) \right\}$$

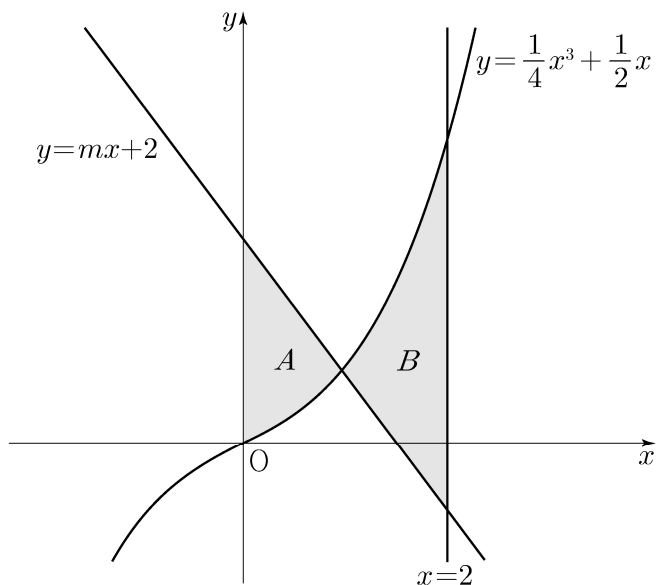
$$= \frac{7}{2} \log_2 3 - \frac{7}{4}$$

13. 곡선 $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ 와 직선 $y = mx + 2$ 및 y 축으로

둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ 와 두 직선 $y = mx + 2$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자.

$B - A = \frac{2}{3}$ 일 때, 상수 m 의 값은? (단, $m < -1$) [4점]

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



정답: ③

풀이:

$$B - A = \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx = -2m - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은? [4점]

$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4(75 - kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수가 12이다.

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

정답: ④

풀이:

step1

로그성립조건

$$\Rightarrow -n^2 + 10n + 75 > 0 \rightarrow -5 < n < 15 \quad \text{범위 1}$$

$$75 - kn > 0 \rightarrow n < \frac{75}{k} \quad \text{범위 2}$$

$$\Rightarrow k \leq 5 \text{ 일 때 } -5 < n < 15 \text{ 를 만족해야하고, } (\because \frac{75}{k} \geq 15)$$

$$k > 5 \text{ 일 때 } -5 < n < \frac{75}{k} \text{ 를 만족해야함 } (\because \frac{75}{k} < 15)$$

$$\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4(75 - kn) > 0$$

$$\Rightarrow \log_4 \frac{-n^2 + 10n + 75}{75 - kn} > 0 \rightarrow \frac{-n^2 + 10n + 75}{75 - kn} > 1$$

$$\Rightarrow n^2 - (10 + k)n < 0 \rightarrow 0 < n < 10 + k \quad \text{범위 3}$$

step2

1) $k \leq 5$ 일 때

$$-5 < n < 15, \quad 0 < n < 10 + k$$

를 모두 만족하는 자연수 n 의 개수가 12

$$\Rightarrow 12 < 10 + k \leq 13 \rightarrow k = 3$$

2) $k > 5$ 일 때

$$-5 < n < \frac{75}{k}, \quad 0 < n < 10 + k$$

를 모두 만족하는 자연수 n 의 개수가 12

$$\Rightarrow 12 < \frac{75}{k} \leq 13 \quad (\because \frac{75}{k} < 10 + k)$$

$$\Rightarrow k = 6$$

$\therefore$ 가능한 모든 자연수 k 의 값은 $3 + 6 = 9$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 $k(k \geq 0)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다. → 연속

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x g(t) \{ |t(t-1)| + t(t-1) \} dt \geq 0 \text{ 이고}$$

$$\int_3^x g(t) \{ |(t-1)(t+2)| - (t-1)(t+2) \} dt \geq 0 \text{ 이다.}$$

$g(k+1)$ 의 최솟값은? [4점]

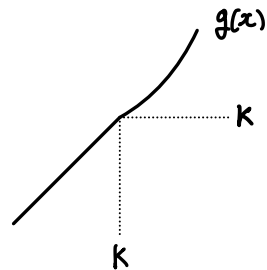
- ① $4 - \sqrt{6}$ ② $5 - \sqrt{6}$ ③ $6 - \sqrt{6}$
 ④ $7 - \sqrt{6}$ ⑤ $8 - \sqrt{6}$

정답: ②

풀이:

step1 조건 (가) 해석

$$f(k) = k, f'(k) = 2, x \geq k \text{에서 } f'(x) \geq 0$$



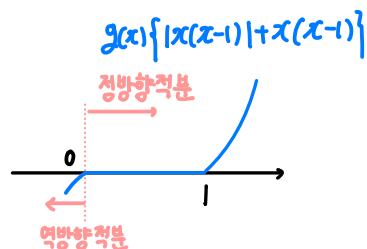
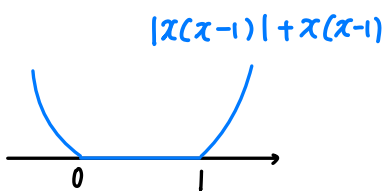
step2 조건 (나) 해석

$$|x(x-1)| + x(x-1) = \begin{cases} 2x(x-1) & (x < 0, x > 1) \\ 0 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \rightarrow 1+ \text{일 때 } g(x) \{ |x(x-1)| + x(x-1) \} \geq 0$$

$$x \rightarrow 0- \text{일 때 } g(x) \{ |x(x-1)| + x(x-1) \} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \rightarrow 1+ \text{일 때 } g(x) \geq 0, x \rightarrow 0- \text{일 때 } g(x) \leq 0$$

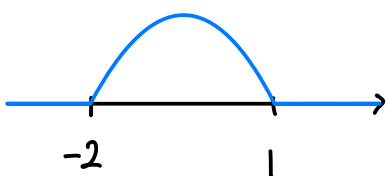


$$|(x-1)(x+2)| - (x-1)(x+2) = \begin{cases} 0 & (x < -2, x > 1) \\ -2(x-1)(x+2) & (-2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

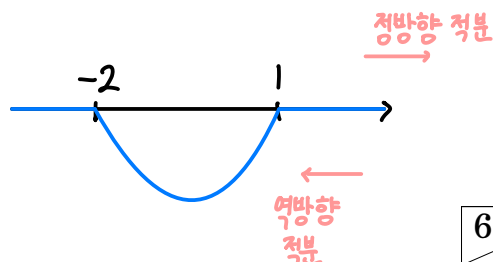
$$\Rightarrow x \rightarrow 1- \text{일 때 } g(x) \{ |(x-1)(x+2)| - (x-1)(x+2) \} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \rightarrow 1- \text{일 때 } g(x) \leq 0$$

$$|(x-1)(x+2)| - (x-1)(x+2)$$



$$g(x) \{ |(x-1)(x+2)| - (x-1)(x+2) \}$$



step3

$$g(1) = 0 \rightarrow g(1) = 2 - k = 0 \quad (\because \overline{k} \geq \overline{0} \rightarrow g(1) \leq g(k) \rightarrow 1 \leq k)$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = (x-2)^3 + p(x-2)^2 + 2(x-2) + 2 \text{라 하자.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + (2p-12)x + 14 - 4p \rightarrow x \geq k \text{에서 } f'(x) \geq 0$$

$$1) \frac{D}{4} \leq 0 \text{인 경우} \rightarrow \text{항상 성립}$$

$$\Rightarrow (p-6)^2 - 3(14-4p) \leq 0 \rightarrow -\sqrt{6} \leq p \leq \sqrt{6}$$

$$2) \frac{D}{4} > 0 \text{인 경우} \rightarrow \frac{6-p}{3} \leq 2$$

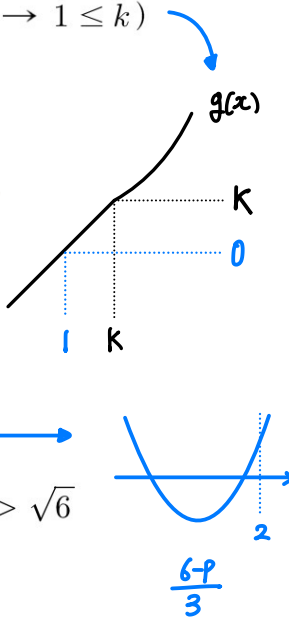
$$\Rightarrow (p-6)^2 - 3(14-4p) > 0 \rightarrow p < -\sqrt{6} \text{ 또는 } p > \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow p > \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \text{가능한 } p \text{의 값의 범위는 } p \geq -\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow f(3) = p + 5 \geq 5 - \sqrt{6}$$

$$\therefore g(k+1) = g(3) = f(3) \geq 5 - \sqrt{6}$$



단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1) - 5 = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

정답: 7

풀이:

$$\frac{(x+1)}{2^5} = \frac{1}{(x-3)} \quad (\text{단, } x > 3) \quad \text{로그성립조건}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 32 \rightarrow (x-7)(x+5) = 0$$

$$\therefore x = 7$$

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 6x^2 + 2$ 이고 $f(0) = 3$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

정답: 23

풀이:

$$f(x) = 2x^3 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow f(2) = 23$$

18. $\sum_{k=1}^9 (ak^2 - 10k) = 120$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

정답: 2

풀이:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 (ak^2 - 10k) &= a \times \sum_{k=1}^9 k^2 - 10 \times \sum_{k=1}^9 k \\ &= a \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 10 \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= 285a - 450 = 120 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

19. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

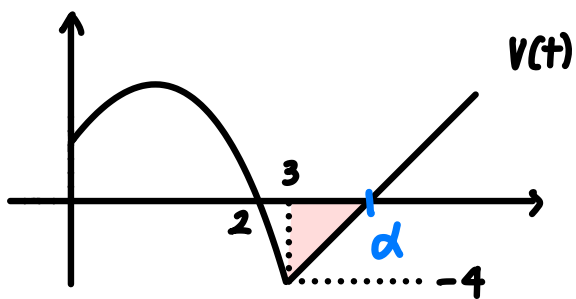
$$v(t) = \begin{cases} -t^2 + t + 2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3) - 4 & (t > 3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k 의 값을 구하시오. [3점]

정답: 16

풀이:

출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각을 $t = \alpha$ 라 하자. ($\alpha > 3$)



$$\Rightarrow v(\alpha) = k(\alpha - 3) - 4 = 0$$

$t = \alpha$ 에서 점 P의 위치가 1, $t = 0$ 에서 점 P의 위치가 0

$$\Rightarrow \int_0^\alpha v(t) dt = 1$$

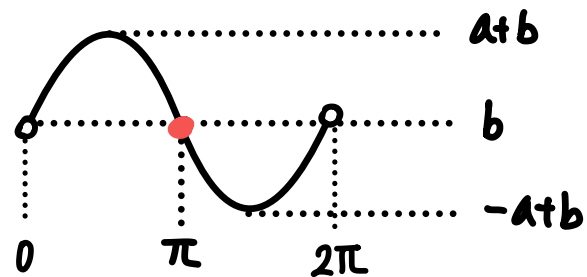
$$\int_0^3 (-t^2 + t + 2) dt + \int_3^\alpha \{k(t-3) - 4\} dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times (\alpha - 3) = 1$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow k = 16$$

삼각형의 넓이로 생각하기

20. 5 이하의 두 자연수 a, b 에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $y = a \sin x + b$ 의 그래프가 직선 $x = \pi$ 와 만나는 점의 집합을 A 라 하고, 두 직선 $y = 1, y = 3$ 과 만나는 점의 집합을 각각 B, C 라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$ 이 되도록 하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값을 구하시오. [4점]



정답: 24

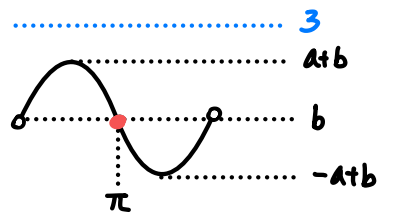
풀이:

함수 $y = a \sin x + b$ 이 세 직선 $x = \pi, y = 1, y = 3$ 과 만나는 서로 다른 모든 교점의 개수가 3개

1) $a+b < 3$

$$\Rightarrow -a+b < 1 < b \text{ 또는 } b < 1 < a+b$$

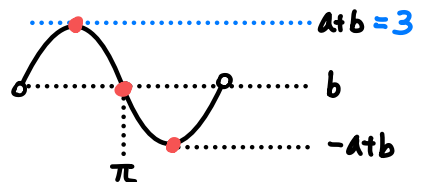
$\Rightarrow$ 가능한 (a, b) 의 조합 X



2) $a+b = 3$

$$\Rightarrow -a+b = 1$$

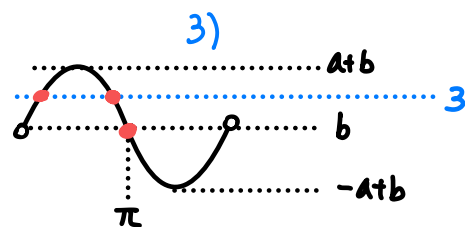
$\Rightarrow$ 가능한 (a, b) 의 조합은 (1, 2)



3) $b < 3 < a+b$

$$\Rightarrow b = 1 \text{ 또는 } -a+b > 1$$

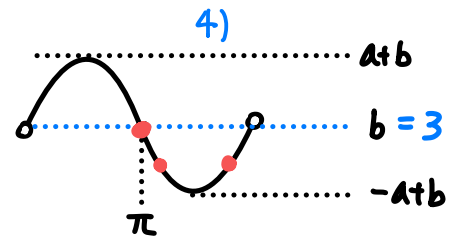
$\Rightarrow$ 가능한 (a, b) 의 조합은 (3, 1), (4, 1), (5, 1)



4) $b = 3$

$$\Rightarrow -a+b < 1 < b$$

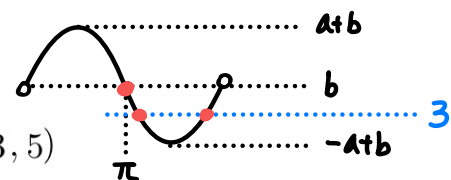
$\Rightarrow$ 가능한 (a, b) 의 조합은 (3, 3), (4, 3), (5, 3)



5) $-a+b < 3 < b$

$$\Rightarrow -a+b > 1$$

$\Rightarrow$ 가능한 (a, b) 의 조합은 (2, 4), (3, 5)



6) $-a+b \geq 3$

$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 3$ 불가능

$$\therefore M = 3 + 5 = 8, m = 1 + 2 = 3 \rightarrow M \times m = 24$$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(a) \leq 0$ 인 실수 a 의 최댓값은 2이다.
 (나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{8}{3}$ 이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

정답: 15

풀이:

극값을 가지는 x 의 개수가 1개라면 $\cup$
 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$ 의 원소의 개수는 최대 2개

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지는 서로 다른 x 의 개수가 3개

$\Rightarrow$ 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가지고,

그 실근을 α , β , 2라 하자. (단, $\alpha < \beta < 2$)

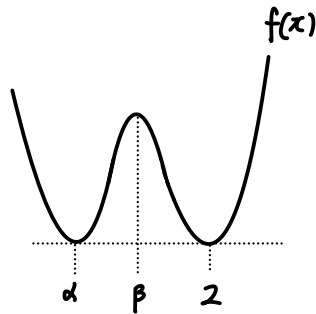
$\rightarrow \alpha=1$ 또는 $\beta=1$ ($\because f'(1)=0$)

1) $f(\alpha)=f(2)$ 인 경우

$\Rightarrow f(2) < k \leq f(\beta)$ 일 때

주어진 집합의 원소의 개수가 3이상

$\Rightarrow k$ 의 최솟값이 존재하지 않음 (모순)



2) $f(\alpha) > f(2)$ 인 경우

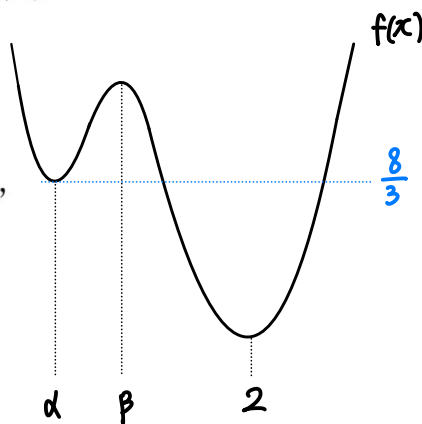
$\Rightarrow f(\alpha) \leq k \leq f(\beta)$ 일 때

주어진 집합의 원소의 개수가 3이상

$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{8}{3}$ $\begin{cases} \alpha=1 \Rightarrow \beta > \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$

이때 $\beta \geq 1 > 0$ 이므로 $f(0) \geq \frac{8}{3}$ 인데,

$f(0)=0$ 을 만족하지 않아서 모순

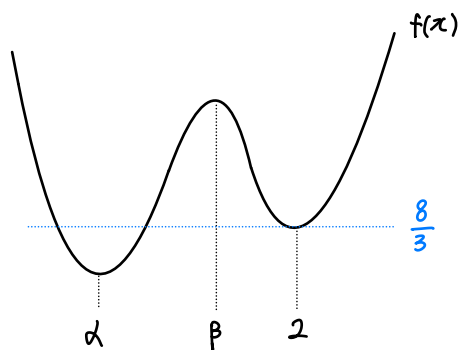


3) $f(\alpha) < f(2)$ 인 경우

$\Rightarrow f(2) \leq k \leq f(\beta)$ 일 때

주어진 집합의 원소의 개수가 3이상

$\Rightarrow f(2) = \frac{8}{3}$



$f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-p)$ 라 하자.

$\begin{cases} \alpha=1 \rightarrow \beta=p \\ \alpha=p \rightarrow \beta=1 \end{cases}$

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 4(x-1)(x-2)(x-p) dx = \int_{-1}^1 4x(x-1)(x-p+1) dx$$

$$= \int_{-1}^1 4\{x^3 - px^2 + (p-1)x\} dx = 8 \int_0^1 (-px^2) dx = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow p = -1$$

$$f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x+1), \quad f(0)=0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$$

$$\therefore f(3) = 15$$

22. 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n} \text{ 이 자연수이고 } a_n > 0 \text{ 인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

[$\sqrt{n}$ 이 자연수 X
 $a_n \leq 0$]

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 곱을 구하시오. [4점]

정답: 231

풀이:

step1 가능한 a_3 의 값 찾기

$n = 10 \cdots n = 15$ 일 때 $\sqrt{n}$ 의 값은 자연수가 아님

a_{15}	a_{14}	a_{13}	a_{12}	a_{11}	a_{10}
1	0	-1	-2	-3	-4

$n = 9$ 일 때 $\sqrt{n}$ 의 값은 자연수

$$\Rightarrow a_9 = a_{10} - 1 = -5$$

$$\text{또는 } a_9 = a_{10} + 3 \times a_3 = 3a_3 - 4 \quad (\text{단, } a_3 > \frac{4}{3})$$

$n = 5 \cdots n = 8$ 일 때 $\sqrt{n}$ 의 값은 자연수가 아님

a_9	a_8	a_7	a_6	a_5
-5	-6	-7	-8	-9

a_9	a_8	a_7	a_6	a_5
$3a_3 - 4$	$3a_3 - 5$	$3a_3 - 6$	$3a_3 - 7$	$3a_3 - 8$

step2

$n = 4$ 일 때 $\sqrt{n}$ 의 값은 자연수,

$n = 3, n = 2$ 일 때 $\sqrt{n}$ 의 값은 자연수가 아님

1) $a_5 = -9$ 일 때

$$a_4 = a_5 - 1 = -10 \quad \text{또는} \quad a_4 = a_5 + 2 \times a_2 = 2a_2 - 9 \quad (\text{단, } a_2 > \frac{9}{2})$$

a_4	a_3	a_2	a_1
-10	-11	-12	12

$$\Rightarrow a_1 = 12$$

a_4	a_3	a_2	a_1
$2a_2 - 9$	$2a_2 - 10$	$2a_2 - 11$	$-2a_2 + 11$

$$\Rightarrow a_2 = 2a_2 - 11 \rightarrow a_2 = 11 \rightarrow a_1 = -11$$

2) $a_5 = 3a_3 - 8$ 일 때 (단, $a_3 > \frac{4}{3}$)

$$a_4 = a_5 - 1 = 3a_3 - 9 \quad (\text{단, } a_3 \leq 0)$$

$$\text{또는 } a_4 = a_5 + 2 \times a_2 = 2a_2 + 3a_3 - 8 \quad (\text{단, } 2a_2 + 3a_3 - 8 > 0)$$

a_4	a_3	a_2	a_1
$3a_3 - 9$	$3a_3 - 10$	$3a_3 - 11$	$-3a_3 + 11$

$$\Rightarrow a_3 = 3a_3 - 10 \rightarrow a_3 = 5 \quad (a_3 \leq 0 \text{ 만족 X})$$

a_4	a_3	a_2	a_1
$2a_2 + 3a_3 - 8$	$2a_2 + 3a_3 - 9$	$2a_2 + 3a_3 - 10$	$-2a_2 - 3a_3 + 10$

$$\Rightarrow a_3 = 2a_2 + 3a_3 - 9, \quad a_2 = 2a_2 + 3a_3 - 10$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{11}{4}, \quad a_2 = \frac{7}{4} \rightarrow a_1 = -\frac{7}{4}$$

$$\therefore \text{가능한 모든 } a_1 \text{ 의 값의 곱은 } 12 \times (-11) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 231$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.