

신성고등학교 <공통수학1> 2025년 1학년 1학기 1차지필평가 다항식 ~ 부등식	확실히 해결	계산 실수	조건을 잘못 봄	걸린 시간	채점

1. 다항식 $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$ 을 인수분해 한 식으로 옳은 것은? [4.3점]

- ① $(3a-2b)^2$ ② $(3a-b)(3a+b)^2$ ③ $(3a-b)^2(3a+b)$
 ④ $(3a-b)^3$ ⑤ $(3a+b)^3$

2. 다항식 $2x^3 - x^2 - x + 4$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는? [4.3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

해: $x = -1$ 대입
 $\Rightarrow -2 - 1 + 1 + 4 = 2$

3. 이차방정식 $x^2 - 4x + a + 1 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 옳게 나타낸 것은? [4.3점]

- ① $a > 3$ ② $a \geq 3$ ③ $a = 3$
 ④ $a \leq 3$ ⑤ $a < 3$

해: $\Delta/4 = 2^2 - (a+1) < 0$
 $\Rightarrow 3 - a < 0$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$ 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은? [4.3점]

- ① 0 ② 3 ③ 6
 ④ 9 ⑤ 12

해: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$
 $\Rightarrow 7^2 = 25 + 2\alpha\beta$
 $\Rightarrow 2\alpha\beta = 49 - 25 = 24$

5. 이차방정식 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근을 α , β 라 할 때, 두 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 을 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식으로 옳은 것은? [4.3점]

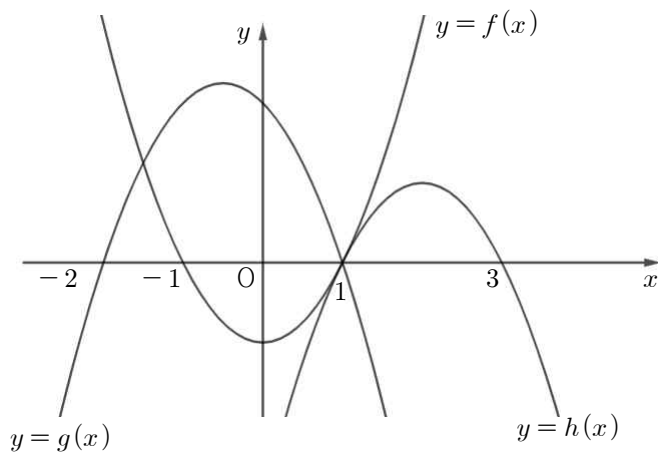
- ① $x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{14} = 0$
 ② $x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{1}{14} = 0$ 해: $14x^2 - 8x + 1 = 0$
 ③ $x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{1}{14} = 0$ $\Rightarrow x^2 - \frac{8}{14}x + \frac{1}{14} = 0$
 ④ $x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{3}{14} = 0$
 ⑤ $x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{3}{14} = 0$

6. 연립부등식 $3x-3 < 4x-1 \leq 2x+5$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는? [4.4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
 ④ 7 ⑤ 9

해: $3x-3 < 4x-1$ $4x-1 \leq 2x+5$
 $\Rightarrow -2 < x$ $\Rightarrow 2x \leq 6$
 $\Rightarrow x \leq 3$
 $\Rightarrow -2 < x \leq 3$
 $\Rightarrow x = -1, 0, 1, 2, 3$

7. 그림과 같이 최고차항의 계수의 절댓값이 같은 세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프가 있다. 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$ 의 서로 다른 모든 근의 합은? [4.5점]



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-1)(x+1) \\ g(x) &= -a(x+2)(x-1) \\ h(x) &= -a(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$+ \quad \underline{a(x-1)((x+1) - (x+2) - (x-3))}$$

$$= a(x-1)(-x+2)$$

$$\therefore x=1, 2$$

8. 이차함수 $y=x^2-2kx+a$ 의 그래프와 직선 $y=4bx-k^2+4k$ 가 실수 k 의 값에 관계없이 항상 오직 한 점에서만 만난다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [4.6점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} x^2-2kx+a &= 4bx-k^2+4k \\ \Rightarrow x^2-2(2b+k)x+k^2+k+a &= 0 \\ D_4 &= (k+2b)^2 - (k^2+4k+a) = 0 \quad \text{K의 값이 항상 } 0 \\ \underline{(4b+4)k} + \underline{4b^2-a} &= 0 \\ \underline{0} \quad \underline{0} & \\ b &= -1, a = 4 \end{aligned}$$

9. 2551×2451 을 49^2 으로 나눈 몫을 a 나머지를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [4.7점]

- ① 2701 ② 2751 ③ 2801 ④ 2851 ⑤ 2901

$$\begin{aligned} \text{Sol: } (50+50+1)(50^2-50+1) &= (50-1)^2 \cdot a + b \\ &\quad (a \text{는 정수}, 0 \leq b < 49^2) \\ (t^2+t+1)(t^2-t+1) & \\ = (t-1)^2+t+1 & (t-1)^2+t+1 \\ = (t-1)^4 + 4t(t-1)^2 + 3t^2 & \\ = (t-1)^4(t-1)^2 + 4t & + 3t^2 - 6t + 3 + 6t - 3 \\ & \quad \underline{3(t-1)^2} \\ = (t-1)^2(t-1)^2 + 4t + 3 & + 6t - 3 \\ \Downarrow \quad \Downarrow & \\ a = (50+1)^2 + 3 & \quad b = 6 \cdot 50 - 3 \\ = 2604 & \quad = 297 \end{aligned}$$

10. 8개의 면에 각각 $0, 2, 3, 5, 2i, -2i, 1+i, 1-i$ 가 적힌 정팔면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 n 번 던져서 나온 모든 수들을 곱하였더니 -64 가 되었다. 가능한 모든 n 의 값의 합은? [4.8점]

- ① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

$$\begin{aligned} \text{Sol: } z &= 1+i \\ \Rightarrow z^2 &= \pm 2i \\ \Rightarrow z^4 &= (\pm 2i)^2 = -4 \\ -64 &= -2^6 = z^{12} \\ & \quad \parallel \\ & \quad -2 \times 2^5 \\ 6 &\sim 12 \end{aligned}$$

11. 5이상의 자연수 n 에 대하여 다항식

$$P_n(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots (1+x^{n-1})(1+x^n) + 16x^2$$

$x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지도록 하는 자연수 n 의 값은? [4.9점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해: $P_n(\omega) = (x^2+x+1)Q_n(\omega)$

$x=\omega$ 대입

$$\Rightarrow P_n(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3) \cdots (1+\omega^n) + 16\omega^2 = 0$$

$\downarrow$
 $f_n(\omega)$

$$f_{3k}(\omega) = (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3) \cdots (1+\omega^{3k}) = 2^k$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $-\omega^2$ $-\omega$

$$f_{3k+1}(\omega) = 2^k (1+\omega^{3k+1}) = 2^k (1+\omega)$$

$$f_{3k+2}(\omega) = 2^k (1+\omega)(1+\omega^2) = 2^k$$

$$f_n(\omega) = -16\omega^2 = 2^4(\omega+1) \Delta \quad \begin{matrix} k=4 \\ \therefore n=3k+1 \\ =13 \end{matrix}$$

12. 두 자연수 m, n 에 대하여 삼차방정식

$$x^3 + mx^2 + nx + 2025 = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. m 은 3의 배수이고 n 이 5의 배수일 때, m 의 값은? [5점] $\alpha, \alpha, \beta < 0$

- ① 39 ② 87 ③ 135 ④ 183 ⑤ 231

해: $\alpha \neq \beta$ 실근 α 가 무리수 $\Rightarrow \beta$ 는 정리 무리수.
 α, α, β 모두

$$\therefore \alpha$$
는 유리수 $\Rightarrow 2025$ 의 약수

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -m \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = n \\ \alpha^2 \beta = -3^4 \cdot 5^2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \alpha = -1, -3, -5, -9, -15, -45$$

$$\beta = (-45)^2, -18, -25, -9, -25, -1$$

$$\Rightarrow -30 - 9 = -m$$

$$m = 39$$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 2 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 정수가 되도록 하는 30 이하의 모든 자연수 m 의 값의 합은? [5.1점]

- ① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

해: $x = \frac{-(2m+1) \pm \sqrt{4m+9}}{2}$ 가 정수

$$\Leftrightarrow 4m+9 \text{ 가 어떤 홀수의 제곱}$$

$$13 \leq \frac{4m+9}{1} \leq 129$$

$$5^2, 7^2, 9^2, 11^2$$

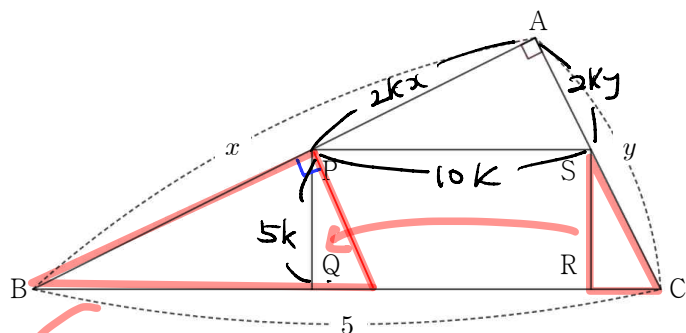
$$\Rightarrow 4m = 5^2 - 9, 7^2 - 9, 9^2 - 9, 11^2 - 9$$

$$= 16, 40, 72, 112$$

$$\Rightarrow m = 4, 10, 18, 28$$

$$\Rightarrow 4 + 10 + 18 + 28 = 60$$

14. 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 변 AB 위에 점 P를, 변 BC 위에 두 점 Q와 R을, 변 S를 사각형 PQRS가 $\overline{PQ} : \overline{QR} = 1 : 2$ 인 직사각형이 되도록 각각 잡는다. 두 삼각형 PBQ, SRC의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$ 일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는? (단, $x > y > 0$, $\overline{PQ} < \frac{3}{2}$) [5.2점]



- ① $5 + \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ② $5 + \frac{5\sqrt{13}}{3}$ ③ $5 + \frac{5\sqrt{14}}{3}$
 ④ $5 + \frac{5\sqrt{15}}{3}$ ⑤ $\frac{35}{3}$

풀이: $x^2 + y^2 = 5^2$

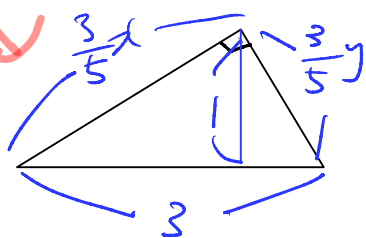
$\Rightarrow \frac{1}{2}(5 - 10k) \cdot 5k = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -50k^2 + 25k = 3$

$\Rightarrow 50k^2 - 25k + 3 = 0$

$\Rightarrow (5k - 1)(10k - 3) = 0$

$\Rightarrow k = \frac{1}{5}, \frac{3}{10} (\because 5k < \frac{3}{2})$



$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}x \right) \left(\frac{3}{5}y \right) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow xy = \frac{25}{3}$

$\Rightarrow (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25 + \frac{50}{3} = \frac{125}{3}$

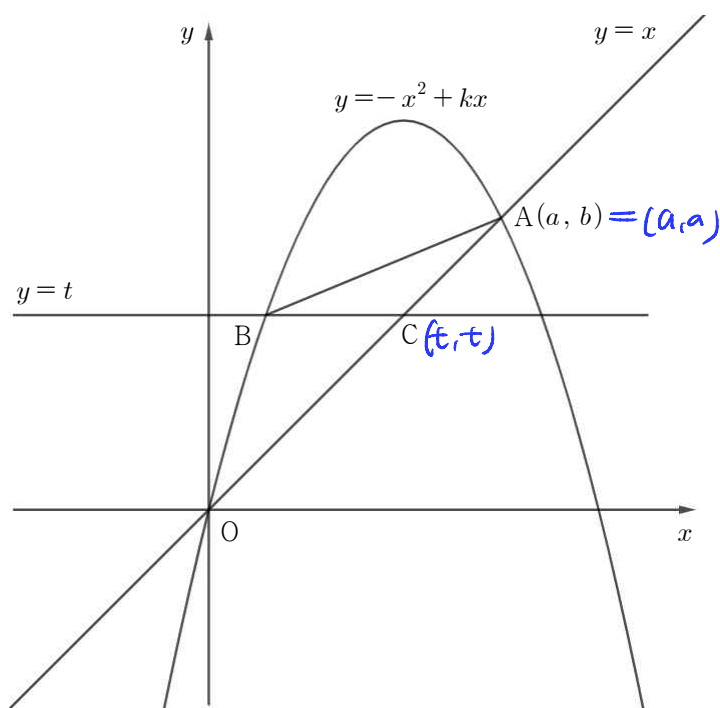
$\Rightarrow x+y = \frac{5\sqrt{15}}{3}$ $\therefore x+y+5 = 5 + \frac{5\sqrt{15}}{3}$

15. 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + kx$ ($k > 1$)의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 A(a, b)라 할 때, $y = -x^2 + kx$ 의 그래프와 직선 $y = t$ ($t < b$)가 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 B, 두 직선 $y = x$ 와 $y = t$ 가 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 ABC와 삼각형 OBC의 넓이의 비가 2:3일 때, 모든 계수가 정수인 두 이차식 $f(k)$ 와 $g(k)$ 에 대하여 삼각형 ABO의 넓이는

$S(k) = \frac{1}{20} \{f(k) + (k-1)\sqrt{g(k)}\}$ 이다.

이차방정식 $f(k) = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하고, 이차방정식 $g(k) = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha + \beta) \times \gamma \times \delta$ 의 값은? [5.3점]



- ① $\frac{83}{5}$ ② $\frac{167}{10}$ ③ $\frac{84}{5}$ ④ $\frac{169}{10}$ ⑤ 17

풀이: $\triangle ABC : \triangle OBC = 2 : 3$

$\Rightarrow t = \frac{3}{5}a$

$-x^2 + kx = x$ 의 두 근: $x=0, a$

$\Rightarrow x^2 + (1-k)x = 0$ $a = k-1$

$y = \frac{3}{5}(k-1), y = -x^2 + kx$

$\Rightarrow x^2 - kx + \frac{3}{5}k - \frac{3}{5} = 0$

$5x^2 - 5kx + 3k - 3 = 0$

$x = \frac{5k \pm \sqrt{25k^2 - 60k + 60}}{10}$

$S(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}(k-1) - \frac{5k - \sqrt{25k^2 - 60k + 60}}{10} \right) \cdot (k-1)$

$= \frac{1}{20} \left\{ \underbrace{(k-6)(k-1)}_{f(k)} + (k-1) \underbrace{\sqrt{25k^2 - 60k + 60}}_{g(k)} \right\}$

단답형1.

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - i$ 일 때, $z_1 + z_2$ 를 구하시오. [4점]

sol: $7 + 2i$

단답형2.

서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a - b = 5$, $a - c = 2$ 이고
 $a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3 = -180$ 을 만족할 때,
 $|ab + bc + ca|$ 의 값을 구하시오. [6점]

sol: $b = a - 5$, $c = a - 2$

$$\Rightarrow a^2(-3)^3 + (a-5)^2(-2)^3 + (a-2)^2 \cdot 5^3 = -180$$

$$\Rightarrow -27a^2 - 8a^2 + 80a - 200 + 125a^2 - 500a + 500 = -180$$

$$\Rightarrow 90a^2 - 420a + 480 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 14a + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (3a - 8)(a - 2) = 0$$

i) $a = \frac{8}{3}$

ii) $a = 2$

$$\Rightarrow b = -\frac{7}{3}, c = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow b = -3, c = 0$$

$$\left| \frac{-56}{9} - \frac{14}{9} + \frac{16}{9} \right| \Rightarrow \boxed{6}$$

$$= \left| \frac{34}{9} \right| = \boxed{6}$$

단답형3.

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하고, $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 $f(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Q_1(1) + Q_2(1) = 12$

(나) $f(1) + f(2) = 10$

(다) $Q_1(3) = 14$

$f(4)$ 의 값을 구하시오. [6점]

sol: $f(x) = (x-1) \overset{Q_1(x)}{\boxed{x^2+ax+b}} + R$
 $f(x) = (x-2) \boxed{x^2+cx+d} + 10-R$ (by 나)

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=10 & \text{(by 가)} \\ 3a+b=5 & \text{(by 다)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^3 + (a-1)x^2 + (b-ax-b+R \\ & = x^3 + (c-2)x^2 + (d-2c)x - 2d + 10 - R \end{aligned}$$

$$a-1=c-2, b-a=d-2c, -b+R=-2d+10-R$$

$$b = -3a + 5$$

$$c = a + 1$$

$$\Rightarrow a + (-3a + 5) + (a + 1) + d = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{d = a + 4}$$

$$(3a + 5) - a = (a + 4) - 2(a + 1)$$

$$\Rightarrow -4a + 5 = -a + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}, \boxed{b=2}, \boxed{c=2}, \boxed{d=5}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+2) + 1$$

$$f(4) = 3 \cdot 22 + 1 = \boxed{67}$$

단답형4.

다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - (4a + 2b + 10)x + 4$ 와 최고차항의 계수가 1이고 계수와 상수항이 모두 정수인 두 다항식 $g(x), h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 실근은 정수이다.
- (나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 중근을 갖는다.
- (다) 다항식 $f(x)$ 는 두 다항식 $g(x), h(x)$ 로 각각 나누어떨어지고, $h(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 $7x - 14$ 이다. g(x)는 2차 이상

다항식 $f(x)$ 를 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [7점]

sol: $f(x) = (x-2)(x^3 + (a+2)x^2 + (2a+b+4)x - 2)$

case 1: $x=2$ (중근)

$$f(x) = (x-2)^2 (x^2 + (a+4)x + 1)$$

$x = \pm 1$ 중근 or 허근.

$$\Rightarrow g(x) = f(x), (x-2)^2, (x-2)(x \pm 1)^2, (x \pm 1)^2,$$

$\Rightarrow h(x)$ 가 f(x)의 약수. 맞지 않음.

$\therefore x^2 + (a+4)x + 1 = 0$ 이 해

$$\Rightarrow g(x) = (x-2)^2 \text{ or } x^2 + (a+4)x + 1 \text{ or } f(x).$$

$$h(x) = (x-2)^2 Q(x) + 7(x-2)$$

$$= (x-2)((x-2)Q(x) + 7)$$

1 or $x \pm 3$.

$$= (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$a = -3$.

$$f(x) = (x-2)^2 (x^2 + x + 1)$$

단답형5.

두 이차함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. f(x)는 $\cap$, g(x)는 $\cup$.

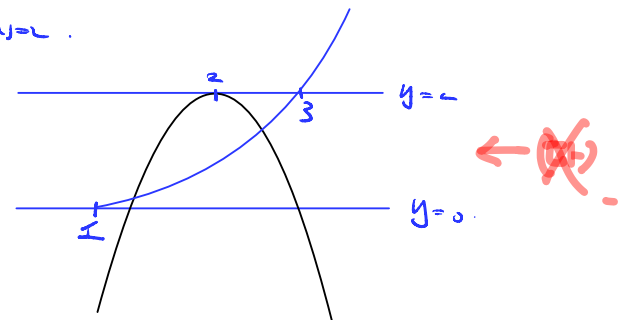
- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - 2 \leq 0 \leq g(x)$
- (나) $\alpha^2 = 1$ 인 어떤 실수 α 에 대하여 $g(\alpha) + 2 = f(2\alpha) = g(3\alpha)$ 이다.
- (다) $k-1 \leq x \leq k+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $k-1 \leq x \leq k+1$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최솟값보다 크거나 같게 되도록 하는 실수 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $Mm = 0$ 이다.

$f(1) < 0$ 일 때, x 에 대한 이차방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근의 합을 구하시오. (단, M, m 은 상수이다.) [7점]

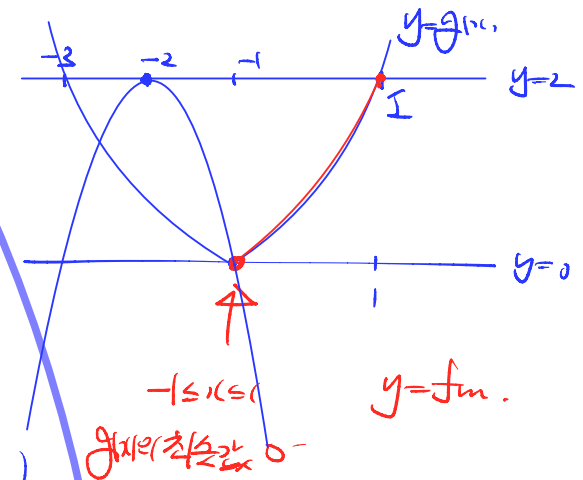
sol: $f(x) \leq 2 \leq g(x) \Rightarrow$

i) $\alpha = 1$

$g(1) = 0, f(1) = 2$



ii) $\alpha = -1$



$$\Rightarrow f(x) = -2(x+2)^2 + 2$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 9x - \frac{13}{2}$$

$$\frac{-9}{(-\frac{5}{2})} = \boxed{\frac{-18}{5}}$$

- 1) ④
- 2) ②
- 3) ①
- 4) ⑤
- 5) ③
- 6) ③
- 7) ③
- 8) ③
- 9) ⑤
- 10) ④
- 11) ②
- 12) ①
- 13) ③
- 14) ④
- 15) ③

단답형1. $7 + 2i$

단답형2. 6

단답형3. 67

단답형4. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

단답형5. $-\frac{18}{5}$