



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00037927032>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/8588>

입니다. 감사합니다!

도파민 해설

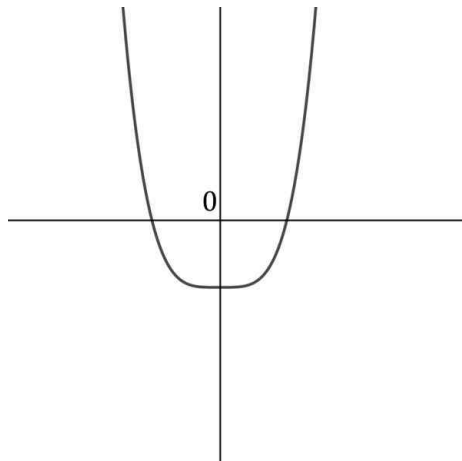
1. 정답 ⑤

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 조건해석

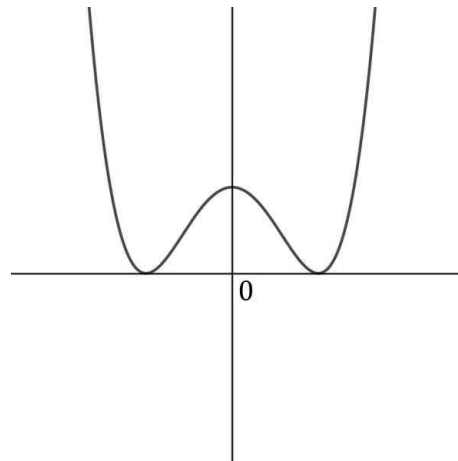
$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 가 있는데 최고차항의 계수가 양수라고 합니다. 일단 $a > 0$ 이구요. 그리고 함수를 잘 관찰해보면 지금 짝수차항만 있네요? 우함수입니다. y 축 대칭이에요. 대칭 꼭 떠오르죠?

(가)조건에서 $f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수가 3개라고 합니다. 그 x 좌표가 α, β, γ 라고 하네요.

어? $f(x)$ 의 개형을 생각해 보세요.



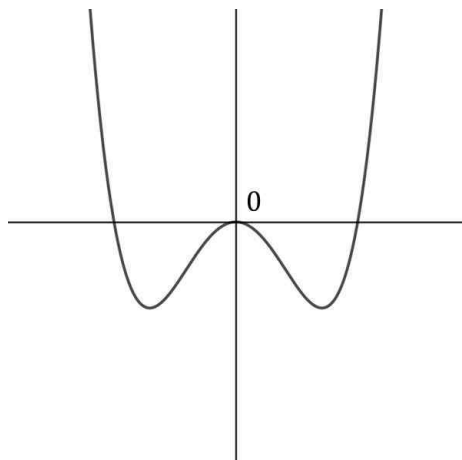
아니면



이래야 하잖아요.

그런데 왼쪽의 개형은 애초에 3개의 점에서 x 축과 만날 수가 없는 개형이에요. 최대가 2개인데요.

오른쪽의 개형은 3개의 점에서 만나는 것이 가능하죠!



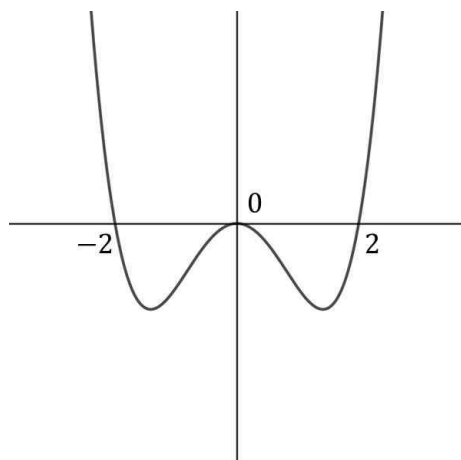
이렇게 x 축과 $x = 0$ 에서 접하면 되잖아요. 따라서 $f(0) = 0$ 이고

$c = 0$ 입니다. $f(x) = ax^4 + bx^2$ 이네요.

(나)조건에서 $f(1) = -\frac{3}{4}$, $f'(-1) = 1$ 이라고 합니다. 이걸 그냥 계산하면 될 것 같은데요?

$f(1)=a+b=-\frac{3}{4}$ 이구요, $f'(x)=4ax^3+2bx$ 이니까 $f'(-1)=-4a-2b=1$ 입니다. 연립하면

$a=\frac{1}{4}$, $b=-1$ 이고 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2=\frac{1}{4}x^2(x^2-4)=\frac{1}{4}x^2(x-2)(x+2)$ 이네요. x 축과 $x=2$, -2 에서 그냥 만나고 $x=0$ 에서 접하는 그래프입니다.



이렇게 되는 거죠.

아까 $f(x)$ 와 x 축이 만나는 x 좌표를 작은 순서대로 α , β , γ 라고 했잖아요? 따라서

$\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$ 입니다.

ㄱ에서 $f(0)=0$ 이냐고 묻네요. 맞죠? ㄱ은 맞습니다.

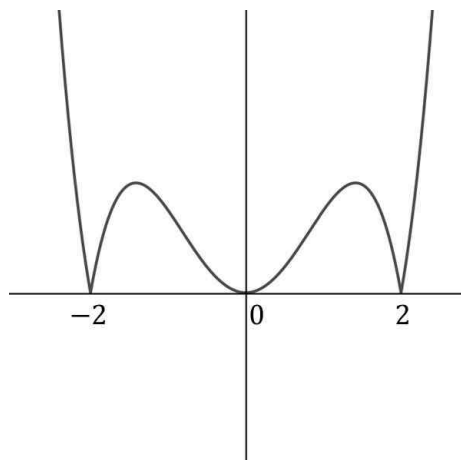
ㄴ에서 $f'(\alpha)=-4$ 냐고 묻습니다. 아까 $\alpha=-2$ 라고 했었죠? 이걸 미분하고 넣어봐야 알 것 같아요.

$f'(x)=x^3-2x$ 입니다. 따라서 $f'(\alpha)=f'(-2)=-4$ 이네요. 맞죠? ㄴ도 맞습니다.

2) 절댓값 함수, ㄱㄴㄷ 유기성

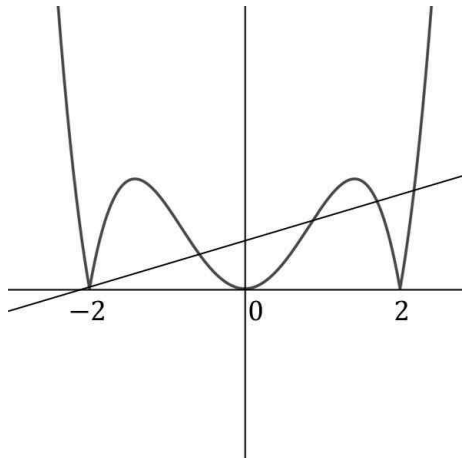
ㄷ에서 $|f(x)|=k(x-\alpha)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k 의 범위를 구합니다. 다시 해석하면 $y=|f(x)|$ 와 $y=k(x-\alpha)$ 가 만나는 점이 3개가 되도록 k 를 움직여봐라 이런 거죠? 그리고 아까 $\alpha=-2$ 라고 했었으니까 $y=|f(x)|$ 와 $y=k(x+2)$ 가 만나는 점이 3개가 되도록 해야 합니다.

가볼게요. 일단 그래프부터 그려봅시다. 아까 그려놓은 그래프에 절댓값을 씌워서 접어 올리면

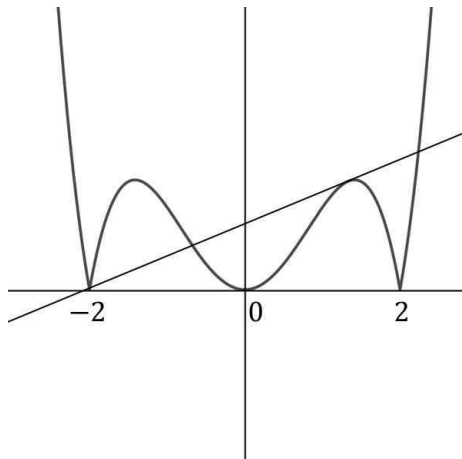


이렇게 됩니다. 여기서 기울기가 양수이고, $(-2, 0)$ 을 지나는 직선

$y = k(x+2)$ 을 그려야 하잖아요? 그리고 만나는 점의 개수가 3이 되는 k 의 범위를 찾아내야 해요. 일단 x 축을 시작으로

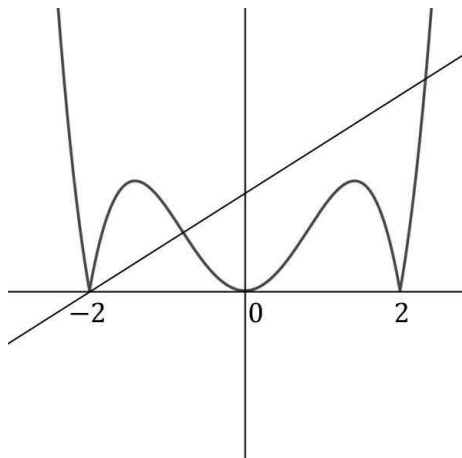


이렇게 되면 5개의 점에서 만나죠. k 를 더 움직여야겠어요.



이렇게 한 점에서 접하게 그리면 4개의 점에서 만납니다. 그리고 조금만

더 움직이면..!



이렇게 3개의 점에서 만납니다. 오! 범위 안으로 들어왔어요! 그러면

일단 접할 때의 기울기를 m 이라 하면 $m < k$ 에서 3개의 점에서 만나는 거죠?

m 을 구해봅시다. 일단 $-2 < x < 2$ 에서 $|f(x)|$ 는 $f(x)$ 를 접어 올린 거니까 $-f(x)$ 예요. x 축 아래에 있던 걸 $(-)$ 곱해서 위로 올린 거잖아요?

그러면 $(t, -f(t))$ 에서 접선을 그어서 $(-2, 0)$ 을 지나게 하고 그 기울기를 구하면 되겠네요.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ 이고 $f'(x) = x^3 - 2x$ 이니깐 $-2 < x < 2$ 에서 $|f(x)| = -f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$ 입니다.

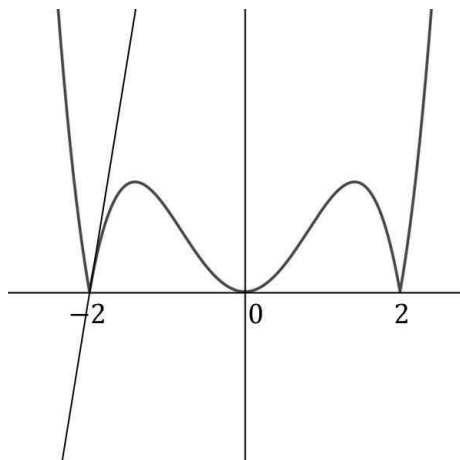
$(t, -f(t))$ 에서의 접선은 $(-t^3 + 2t)(x - t) - \frac{1}{4}t^4 + t^2$ 이고 정리하면 $(-t^3 + 2t)x + \frac{3}{4}t^4 - t^2$ 입니다. 이 직선이 $(-2, 0)$ 을 지나야 하니까 $\frac{3}{4}t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t = 0$ 이고 정리하면 $3t^4 + 8t^3 - 4t^2 - 16t = 0$ 입니다.

이거 인수분해하면 $t(t+2)^2(3t-4)=0$ 이 나오죠? 그런데 지금 접하는 점은 $x > 0$ 에 있으니까 $t = \frac{4}{3}$ 입니다.

이제 기울기를 구해봅시다. $|f(x)| = -f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$ 이니깐 미분하고 $x = \frac{4}{3}$ 을 집어 넣으면 $\frac{8}{27}$ 이

나오네요. $m = \frac{8}{27}$ 이고 $\frac{8}{27} < k$ 에서 3개의 점과 만납니다.

그리고 계속 기울기를 키워봐요. 계속 3개의 점과 만나다가



이렇게 $x = -2$ 에서 접할 때 2개의 점에서 만나게 됩니다. 이 기울기를

n 이라 하면 $\frac{8}{27} < k < n$ 에서 3개의 점에서 만나게 되는 거죠.

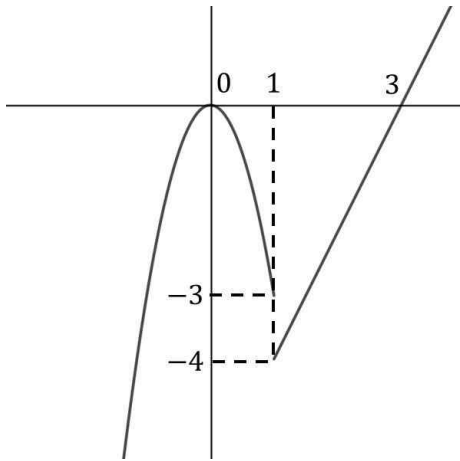
이젠 n 을 구해봅시다. 어? 그런데 아까 ㄴ에서 $f'(-2) = -4$ 라고 하지 않았나요? 지금 $|f(x)| = f(x)$ 의 좌미분계수는 -4 이지만 $-2 < x < 2$ 에서는 $f(x) < 0$ 이어서 $(-)$ 를 곱하니까 $|f(x)| = -f(x)$ 가 되고 우미분계수는 4 가 되는 거잖아요. 이미 ㄴ에서 힌트를 준 거네요! 따라서 $x = -2$ 에서 접할 때의 기울기는 4 가 되고 $n = 4$ 입니다. 범위는 $\frac{8}{27} < k < 4$ 가 되네요. 맞죠! ㄷ도 맞습니다. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

2. 정답 80

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & (x < 1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases} \text{인데 } g(x) = \int_0^x (t-1)f(t)dt \text{라고 하네요.}$$

일단 $f(x)$ 의 그래프부터 그려볼까요? 일단 $x < 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 x 축에 접하는 이차함수이구요, $x > 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 x 축을 지나는 일차함수입니다.



이런 함수네요.

그때 $g(x)$ 는 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$ 을 넣으면 $g(0)=0$ 이 됩니다.

그리고 미분하면 $g'(x) = (x-1)f(x)$ 가 되네요. $x=1$ 을 넣으면 $g'(1)=0$ 입니다.

2) 함수끼리 사칙연산은 범위까지 그대로

$$g'(x) = (x-1)f(x) \text{의 식을 구해봅시다. } g'(x) = \begin{cases} -3x^2(x-1) & (x < 1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x \geq 1) \end{cases} \text{이네요.}$$

이때 $y=t$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $h(t)$ 라고 하네요. 그리고

$$\left| \lim_{t \rightarrow a+} h(t) - \lim_{t \rightarrow a-} h(t) \right| = 2 \text{를 만족시키는 } a \text{에 대하여 } |a| \text{를 구하랍니다. 그럼 일단 그래프를}$$

그려봐야겠는데요?

$$\text{그럼 } g'(x) \text{를 적분해야겠어요. } g'(x) = \begin{cases} -3x^3 + 3x^2 & (x < 1) \\ 2x^2 - 8x + 6 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이니까 적분하면}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + C_1 & (x < 1) \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases} \text{입니다. 아직 적분상수는 몰라요.}$$

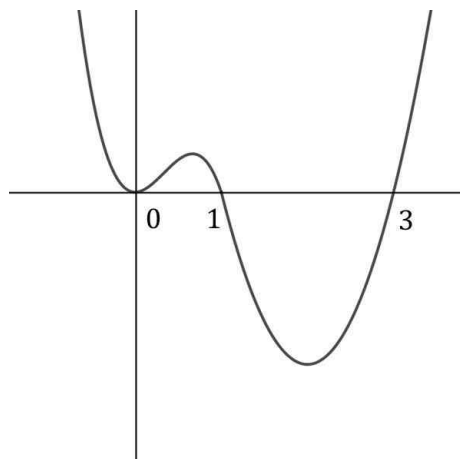
그런데 아까 $g(0)=0$ 라고 했었죠? $C_1=0$ 이고 $g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1) \end{cases}$ 입니다.

그리고 방금 $g'(1)=0$ 라고 했었잖아요. $x=1$ 에서 미분계수가 존재한다는 건 $x=1$ 에서 미분가능하다는 거고 연속이기도 한다는 거죠. 따라서 $\lim_{x\rightarrow 1^-} g(x)=\frac{1}{4}=\lim_{x\rightarrow 1^+} g(x)=\frac{8}{3}+C_2$ 이고 $C_2=-\frac{29}{12}$ 입니다.

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x\geq 1) \end{cases} \text{이네요.}$$

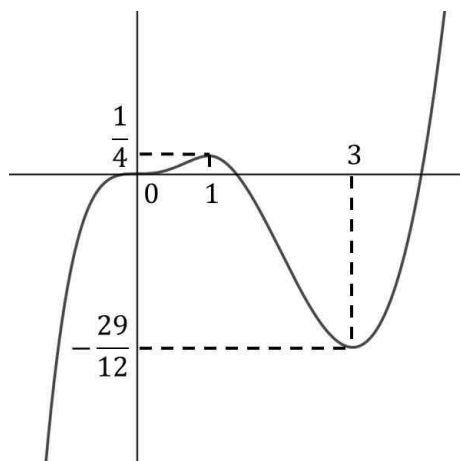
이제 그래프 그려봅시다. 일단 $g'(x)=\begin{cases} -3x^2(x-1) & (x<1) \\ 2(x-1)(x-3) & (x\geq 1) \end{cases}$ 의 그래프를 그려보면 $x<1$ 에서는

$x=0$ 에서 접하고, $x=1$ 에서 x 축과 만나구요, $x\geq 1$ 에서는 $(1, 0)$, $(3, 0)$ 두 점을 지나는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수입니다.



이렇게 되네요.

위의 그림을 보면 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서는 접하면서 방향 그대로 가구요, $x=1$ 에서는 극대가 되구요, $x=3$ 에서 극소가 됩니다. 극댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고 극솟값은 $-\frac{29}{12}$ 인 함수입니다.

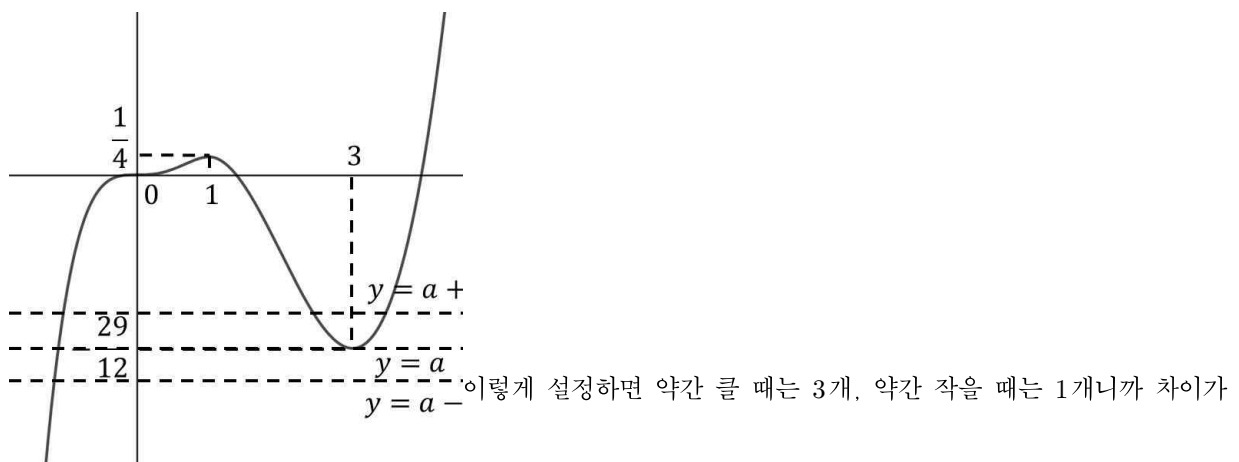
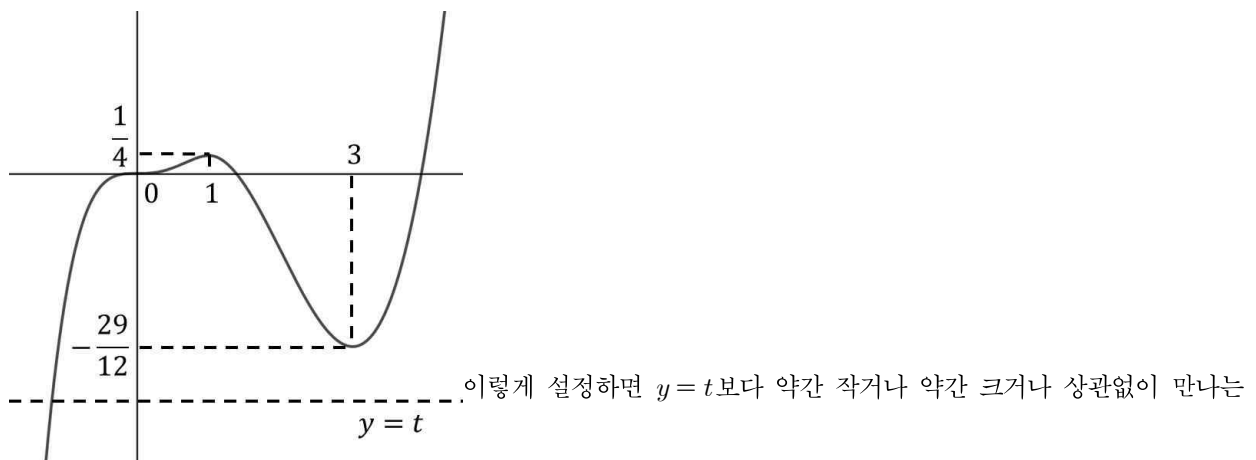


이런 함수이죠. 여기에 $y=t$ 와 이 함수가 만나는 점의 개수가 $h(t)$ 인데

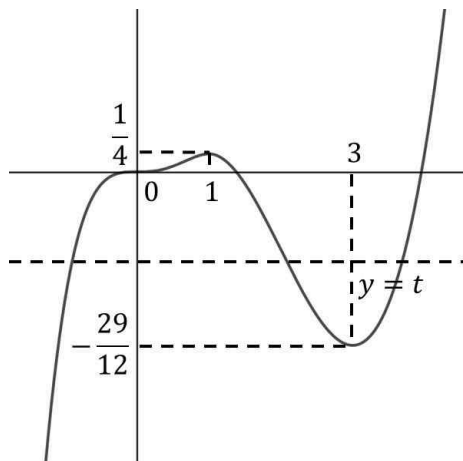
$\left| \lim_{t \rightarrow a+} h(t) - \lim_{t \rightarrow a-} h(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 a 를 구해야 해요.

저 식은 뭔가요? 일단 $\lim_{t \rightarrow a+} h(t)$ 는 $y = a +$ 와 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수구요, $\lim_{t \rightarrow a-} h(t)$ 는 $y = a -$ 와 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수예요. 그러니까 다시 말하면 $y = a$ 보다 큰 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수와 $y = a$ 보다 작은 쪽에서의 수평선과 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수의 차이가 2개가 되는 a 를 찾으라는 거네요.

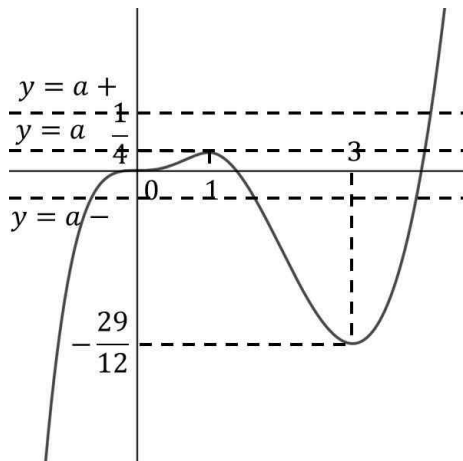
그럼 이제 막 $y = t$ 를 설정해봅시다.



2만큼 나네요. 일단 $a = -\frac{29}{12}$ 하나는 찾았어요.



이렇게 설정하면 변하지 않아요. 계속 3개잖아요.



이렇게 설정하면 되죠. 클 때는 1개, 작을 때는 3개니까 차이가

2잖아요. $a = \frac{1}{4}$ 도 됩니다.

그 위로는 계속 1개니까 안 되겠네요. 지금까지 찾은 a 에 절댓값 씌우고 더하면 $S = \frac{1}{4} + \frac{29}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$ 입니다.

$30S = 80$ 이네요.

3. 정답 ⑤

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

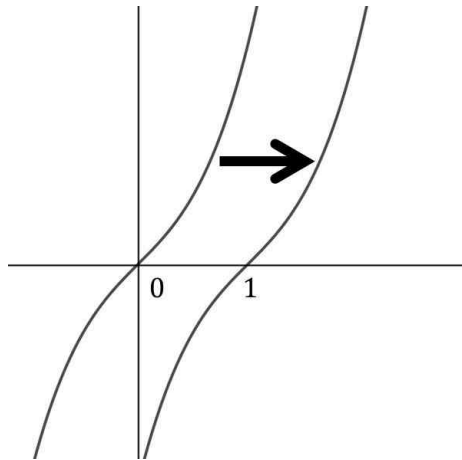
일단 함수가 있어요. $f(x) = (x-1)^3 + (x-1)$ 가 있네요. 함수를 이런 방식으로 준 건 이유가 있겠죠?

미분하지 말고 그래프를 그려봅시다.

일단 $f(x)$ 는 $x^3 + x$ 라는 함수를 x 축방향으로 1만큼 평행이동한 함수예요. 따라서 $x^3 + x$ 를 먼저 그리고 그

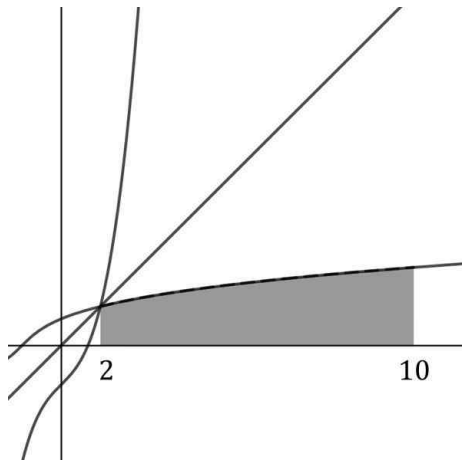
그래프를 1만큼 오른쪽으로 움직이면 되겠어요.

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$ 이니까 x 축과는 $x = 0$ 에서만 만나구요, 미분하면 $3x^2 + 1$ 이니까 극점없이 계속 증가하는 그래프입니다.



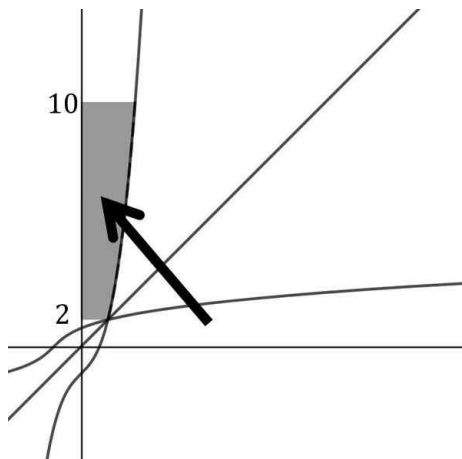
이렇게 되네요.

이때 역함수가 $g(x)$ 인데 $\int_2^{10} g(x) dx$ 를 구합니다. 이것도 그리고 넓이를 색칠해봅시다.



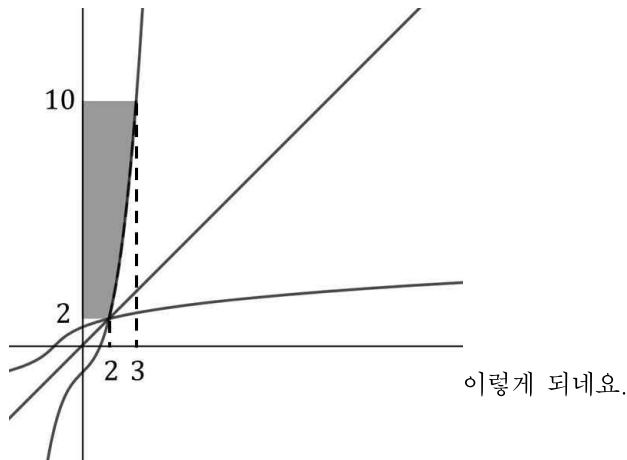
이렇게 되네요.

역함수를 적분할 수는 없으니 이걸 $y = x$ 축 대칭시킨 부분에 옮겨야겠죠?



이렇게 됩니다.

이제 식을 세워봅시다. 일단 $y = (x-1)^3 + (x-1)$ 와 $y = 2$ 가 만나는 점은 $(x-1)^3 + (x-1) = 2$ 이고 정리하면 $x = 2$ 가 나옵니다. 그리고 $y = (x-1)^3 + (x-1)$ 와 $y = 10$ 이 만나는 점은 $(x-1)^3 + (x-1) = 10$ 이고 정리하면 $x = 3$ 이 나오게 돼요!



이거는 밑변의 길이가 3이고 높이가 10인 직사각형에서 $\int_2^3 f(x)dx$ 와 한 변의 길이가 2인 정사각형을 뺀 거죠?

직사각형의 넓이는 $3 \times 10 = 30$ 이구요, 정사각형의 넓이는 $2 \times 2 = 4$ 입니다.

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 ((x-1)^3 + (x-1))dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} \right]_2^3 = \frac{21}{4} \text{이네요. 따라서 구하는 부분의 넓이는}$$

$$30 - 4 - \frac{21}{4} = \frac{83}{4} \text{입니다. 답은 ⑤번이네요.}$$

4. 정답 160

1) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

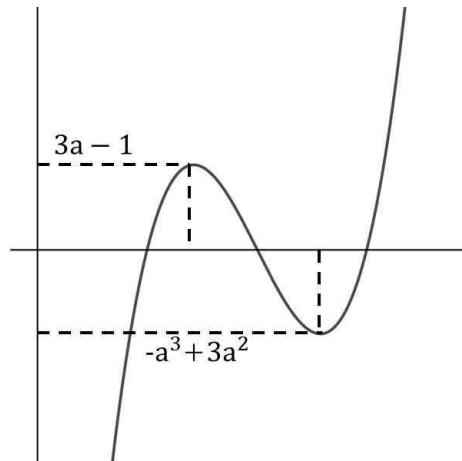
함수가 있어요. 일단 관찰부터 해볼까요? $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$ 를 인수분해하면

$x(2x^2 - 3(a+1)x + 6a)$ 가 되는데 인수분해가 안 되네요? 이걸 그래프를 그려서 파악해야겠어요.

미분하면 $f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6(x^2 - (a+1)x + a) = 6(x-1)(x-a)$ 입니다. a 가 자연수인데

$a = 1$ 이라면 $f(x) = 0$ 이 세 실근을 갖는 건 불가능합니다. 계속 증가하는 모양이잖아요. 일단 $a \geq 2$ 이어야 합니다.

그러면 $x = 1$ 에서 극대, $x = a$ 에서 극소네요. 극댓값은 $3a - 1$ 이고 극솟값은 $-a^3 + 3a^2$ 입니다.

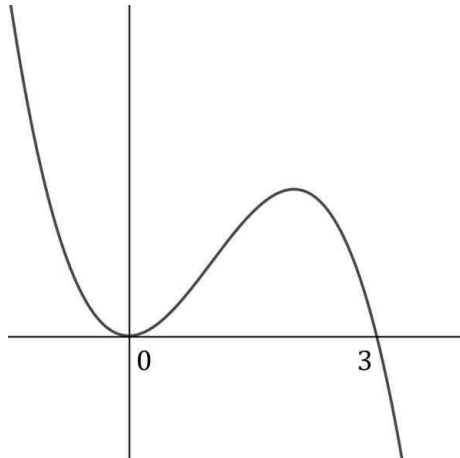


이렇게 되네요.

세 실근을 가지려면 $3a - 1 > 0$ 이고 $-a^2(a - 3) < 0$ 이어야겠죠?

$a > \frac{1}{3}$ 은 뭐 어차피 a 가 $a \geq 2$ 인 자연수니까 당연한 거구요. $-a^2(a - 3) < 0$ 가 되는 걸 찾아봅시다.

$-a^2(a - 3)$ 을 그려보면 $a = 0$ 에서 a 축에 접하고, $a = 3$ 에서 그냥 지나가는



이런 함수가 됩니다. 이게 0보다 작으려면 결국 $a > 3$ 이 되어야겠네요.

이걸 만족하는 자연수 a 는 4, 5, 6, ...입니다. n 번째 수를 a_n 라고 했으니까 $a_n = n + 3$ 이네요.

$a = a_n$ 일 때 $f(x)$ 의 극댓값이 b_n 입니다. 방금 그려놓은 그래프를 보면 $3a - 1$ 이 극댓값이었으니까

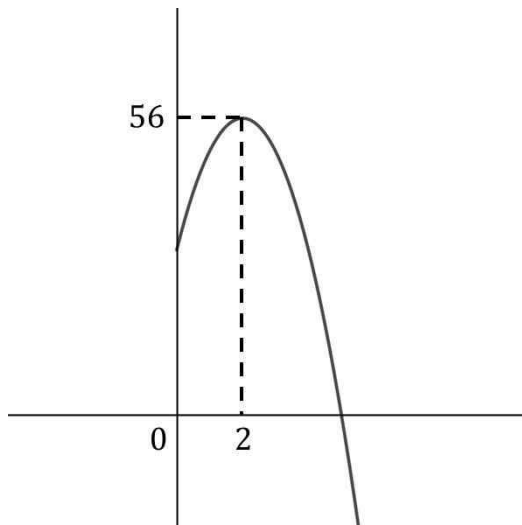
$b_n = 3a_n - 1 = 3n + 8$ 이네요. $\sum_{n=1}^{10} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{10} 2n + 5 = \frac{(7+25)}{2} \times 10 = 160$ 입니다.

5. 정답 56

1) 함수 구하기 - 인수정리

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 x 축과 x 좌표가 $-2t, 0, t$ 인 점에서 만난답니다. 다시 말해서 $f(x)=0$ 의 세 실근이 $-2t, 0, t$ 이라는 거죠? 인수정리에 의하여 $f(x)$ 는 $(x+2t), x, (x-t)$ 라는 인수를 적어도 하나 갖고요, $t > 0$ 이니까 겹치지도 않네요. 따라서 $f(x)=x(x+2t)(x-t)=x^3+tx^2-2t^2x$ 입니다.

이때 $f'(4)$ 의 최댓값을 구합니다. 미분하면 $f'(x)=3x^2+2tx-2t^2$ 이고 $f'(4)=-2t^2+8t+48$ 입니다. 이거의 최댓값을 구하려면 t 를 변수로 해서 그래프를 그림 다음 판단해야 할 것 같은데요? 일단 미분하면 $-4t+8$ 으로 $t=2$ 에서 극대입니다. 극댓값은 56이구요. 그림 그려보면



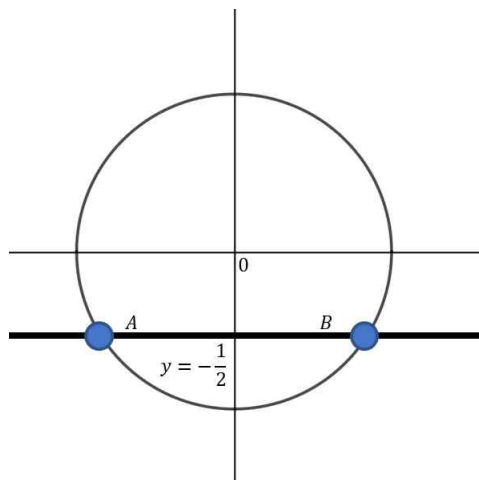
입니다. 최댓값은 $t=2$ 일 때 56이죠?

6. 정답 ③ (그림 다시 해야 함)

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

중심이 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이 있는데 이 원이랑 $y = -\frac{1}{2}$ 가 만나는 점을 A, B라고 한답니다.

대충 그래프 그려보면



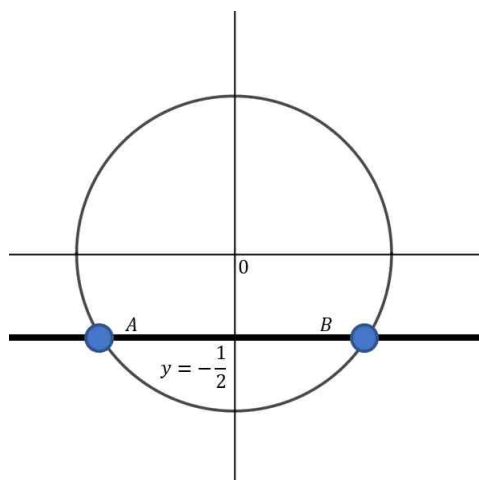
이렇게 되겠네요. 거기에 $P(0, t) \left(t \neq -\frac{1}{2} \right)$ 가 있는데 다음 조건을

만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$ 라고 한답니다.

2) 조건해석

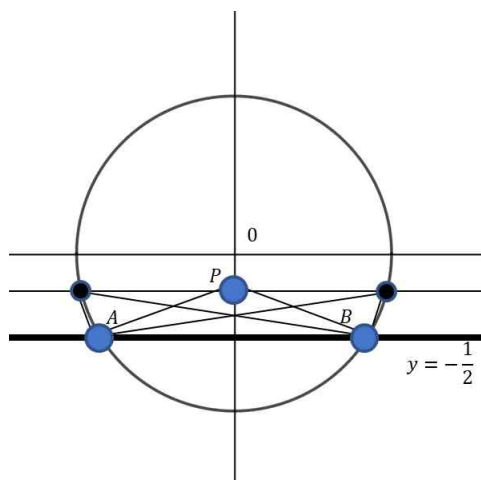
(가)조건에서 C는 A, B가 아닌 원 위의 점이네요.

(나)조건에서 삼각형 ABC의 넓이와 ABP의 넓이는 같답니다. 이 두 조건을 만족하는 점 C의 개수를 $f(t)$ 라고 하는 거죠. 무슨 의미일까요? 그러면 일단 $P(0, t)$ 의 좌표를 아무거나 잡아봅시다. $f(t)$ 를 이해는 해야 하잖아요. 예를 들어



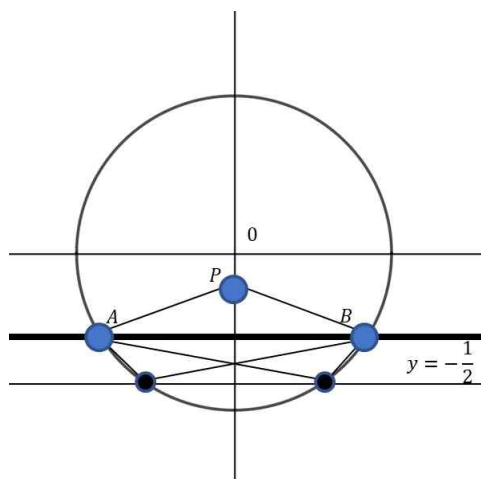
이렇게 P를 잡아볼게요. 저 삼각형과 넓이가 같으려면 원 위의 점을

어떻게 잡아야 할까요? 밑변이 고정되어 있으니까 높이만 같으면 되겠죠? 아! 그러면 P를 지나고 x 축에 평행한 직선을 그어서 그 직선이 원과 만나는 점을 C라고 하면 되겠네요.



이렇게 2개의 검은색 점을 잡으면 되죠. 이게 끝일까요? 잘

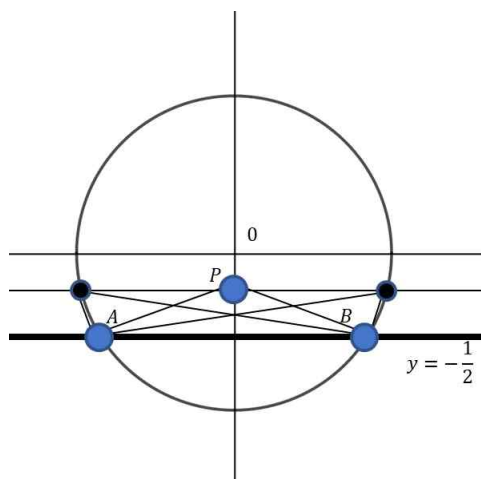
생각해보세요.



이렇게 아래로 굽는 건 안 되나요? 높이가 같으니까 괜찮죠? 아~

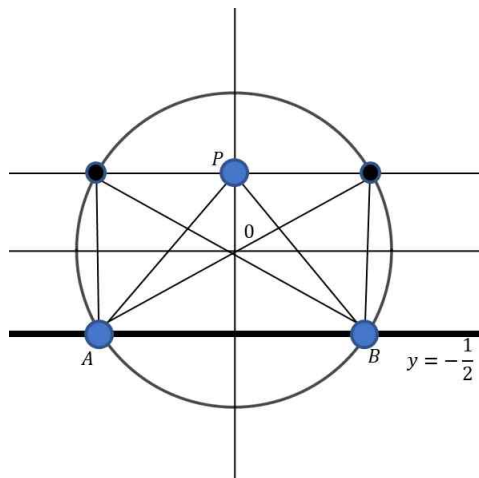
그러면 $f(t)$ 는 점 P 를 지나는 직선과 원과 만나는 점 2개와 직선을 $y = -\frac{1}{2}$ 축 대칭시켜서 원과 만나는 점 2개 이렇게가 가능한가봐요.

어라? 그런데 점 P 가 원점이라면 $y = -\frac{1}{2}$ 축 대칭시켜서 원과 만나는 점이 1개밖에 없는데요?



이렇게 3개밖에 안 되잖아요. 그리고 만약 $t > 0$ 이라서 점 P 가 x 축

위로 올라가 버리면



아래로 내려갈 수가 없어요. 점 P의 위치에 따라 $f(t)$ 의 값이

달라지네요. 뭐 이 정도면 해석은 충분히 한 것 같아요.

이제 $f(a) + \lim_{t \rightarrow a-} f(t) = 5$ 이고 $\lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = b$ 일 때 $a+b$ 의 값을 구해봅시다.

2) $\lim_{x \rightarrow \alpha+} f(x) = x = \alpha$ 보다 큰 쪽에서의 $f(x)$ 의 함숫값, $\lim_{x \rightarrow \alpha-} f(x) = x = \alpha$ 보다 작은

쪽에서의 $f(x)$ 의 함숫값

$f(a) + \lim_{t \rightarrow a-} f(t) = 5$ 이거부터 해볼까요? $\lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 는 $t = a$ 보다 작은 쪽에서의 $f(t)$ 의 함숫값이죠? 어라?

그런데 잘 생각해보세요. 일반적인 상황에서는 $f(a)$ 의 값과 $\lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 의 값이 다를 리가 없어요. 약간 작다고

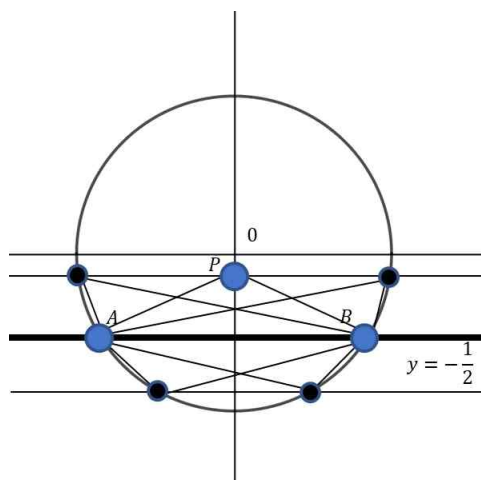
값이 변하지 않잖아요. 그러니까 $f(a)$ 와 $\lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 를 더해서 5가 나올 리가 없다는 거죠.

보통의 경우에는 $1+1=2$, $2+2=4$, $3+3=6$ 이렇게 되겠죠. 그런데 $f(a) + \lim_{t \rightarrow a-} f(t) = 5$ 라는 건 $f(a)$ 의

값과 $\lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 의 값이 달라지는 부분이라는 거예요. 그러면 a 는 굉장히 특수한 부분이겠죠? 아까 $f(t)$ 를

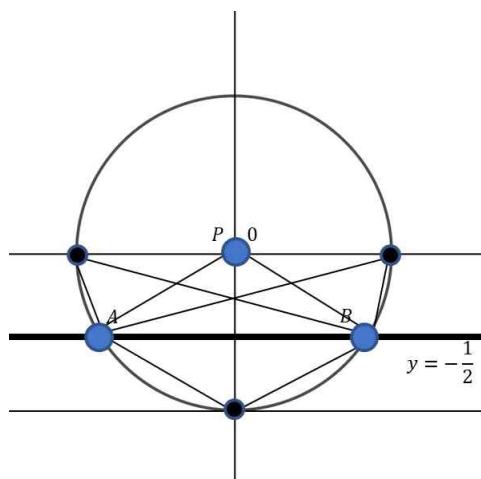
해석할 때 갑자기 값이 변하는 부분이 있었죠? 다시 가봅시다.

만약 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 이라면



이죠? $f(a)$ 와 $\lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 의 값이 같으니까 여긴 아니네요. 값이

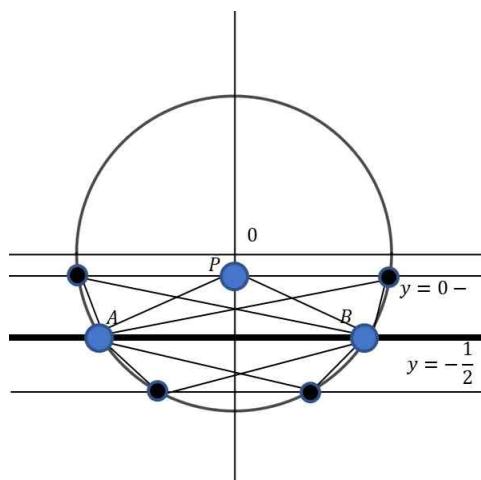
변하는 부분을 찾아야 해요. 값이 변하는 부분은



이렇게 원점일 때가 있어요. 이때는 그림에서 보는 것처럼

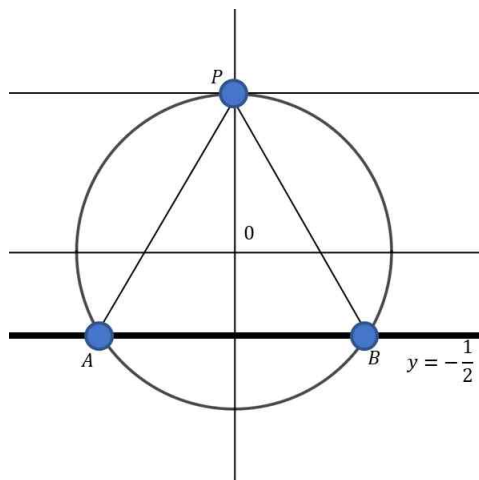
$f(0)=3$ 입니다.

그리고 $\lim_{t \rightarrow 0-} f(t)$ 은 $t=0$ 일 때보다 약간 작아야 하잖아요.



이런 그림처럼 말이죠. 4개가 가능하죠? $\lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 4$ 입니다. 더해서

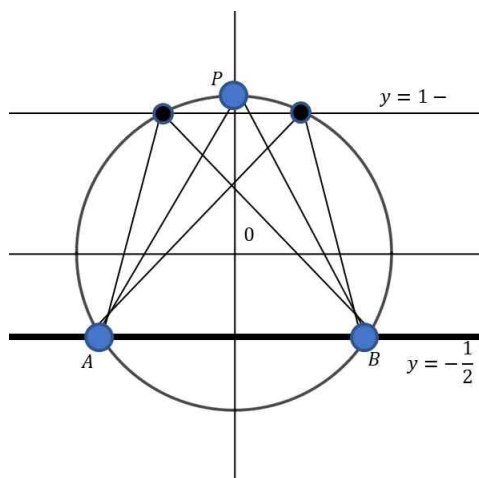
5가 아니네요? 다른 거 찾아봅시다.



이렇게 $t = 1$ 일 때도 되네요. 이 경우 $f(1) = 1$ 이네요? 가능한 게 점

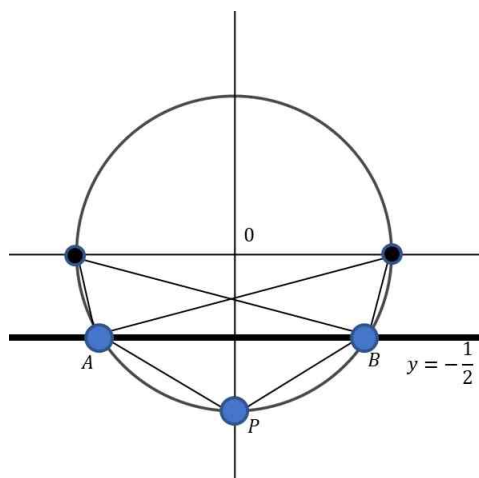
P와 같을 때 하나가 있네요.

$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$ 은 $t = 1$ 일 때보다 약간 작아야 하는데



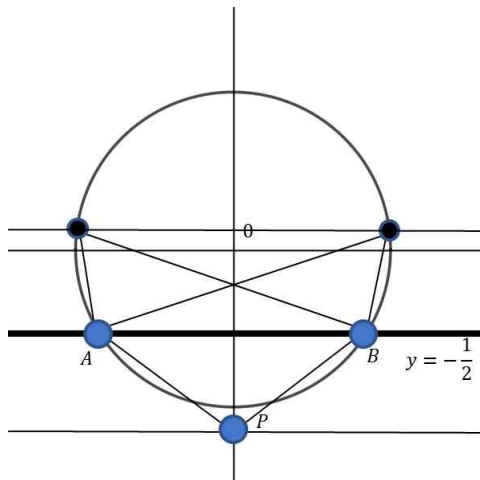
이런 그림처럼 되겠군요. $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 2$ 입니다. 더해서 5가 안

나오는데요? 어... 또 값이 변하는 부분이 뭐가 있을까요?



이렇게 $t = -1$ 일 때도 있죠? 검은색 점 2개에다가 점 P와 같을 때도

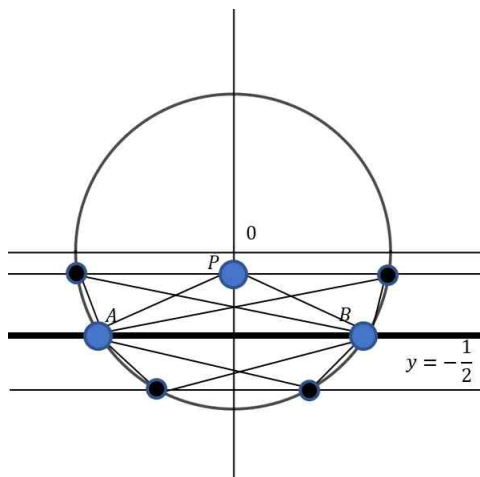
있으니까 총 3개라서 $f(-1) = 3$ 인데 t 가 -1 보다 약간 작으면



점 P가 이렇게 원 밖으로 나가버리면서 위쪽에만 2개가 가능하네요.

$\lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = 2$ 입니다. 오! 더해서 5가 되네요! $a = -1$ 입니다.

이제 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = b$ 이거 해봅시다. 아까 해봤었죠? $t = 0$ 보다 약간 작을 때의 함숫값이니까



이거잖아요. 4개네요. 따라서 $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = b = 4$ 입니다.

$a + b = 4 - 1 = 3$ 이네요. 답은 ③번입니다.

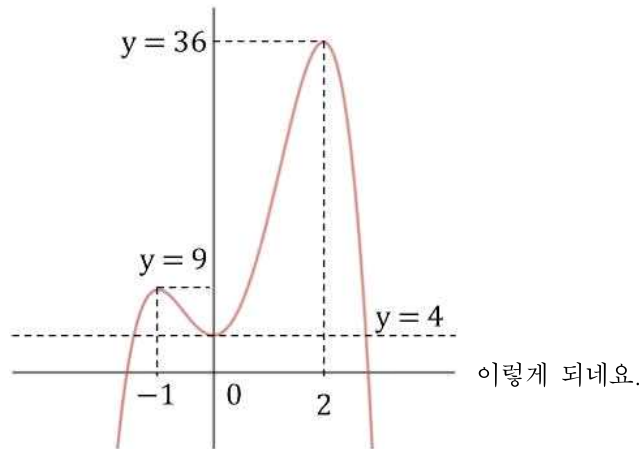
7. 정답 36

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

a 가 35이하인 자연수래요! 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 4$ 라고 합니다. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는.... 쉽지 않은 것 같네요.

미분해서 극점 찾아봅시다. $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x = -12x(x+1)(x-2)$ 이니까 $x = -1, 2$ 에서 극대, $x = 0$ 에서 극소입니다. $f(-1) = 9, f(0) = 4, f(2) = 36$ 이네요.

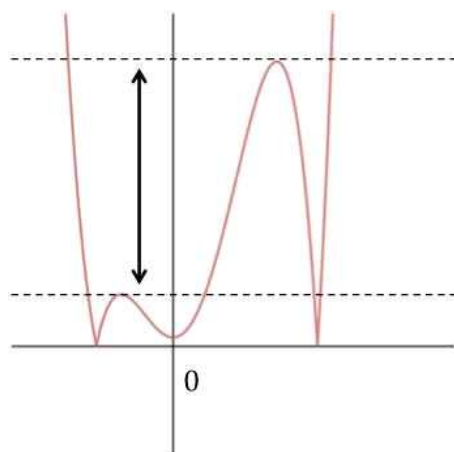


2) 절댓값 함수

이때 $g(x) = |f(x) - a|$ 라고 합니다. 일단 $f(x) - a$ 는 $f(x)$ 를 a 만큼 아래로 내린 함수예요. 그 함수를 절댓값을 씌워서 접어 올린 거죠.

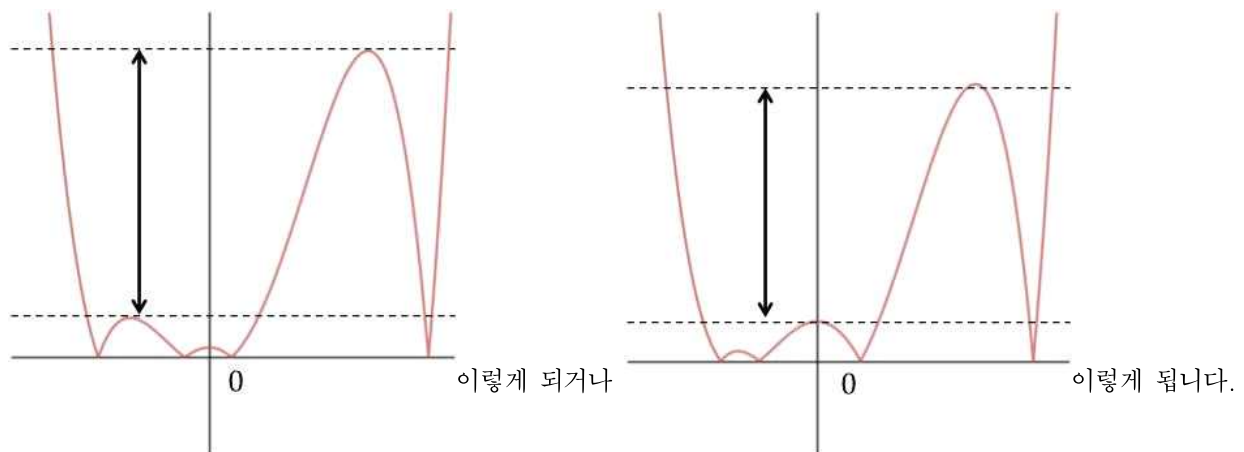
3) 조건해석

(가)조건에서 $y = g(x)$ 와 $y = b$ 가 4개의 점에서 만난다고 합니다. 그냥 스윙쩍 그래프 그려서 확인만 해볼까요? 일단 위에 있는 $f(x)$ 를 a 만큼 내리고 접어 올리면...! 어? 그런데 문제가 있어요. a 가 얼마인지에 따라 접어 올렸을 때 $g(x)$ 의 개형이 달라지는데요? 만약 a 가 1부터 극솟값인 4까지라면



화살표 사이에 있으면 되겠네요.

그런데 a 가 극솟값보다 큰 5부터 극댓값인 9까지라면

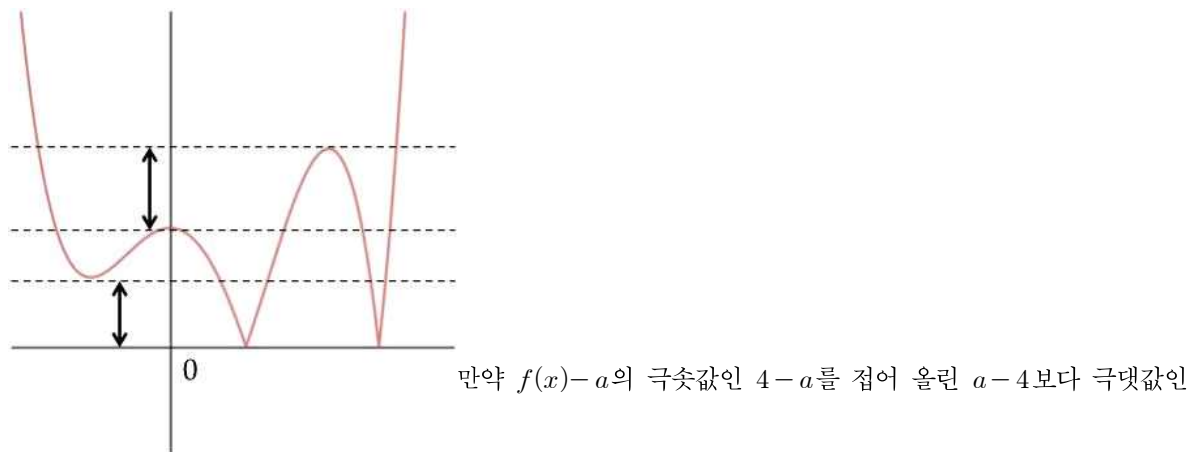


이거는 사실 $f(x)-a$ 의 극솟값인 $4-a$ 를 접어 올린 $a-4$ 와 극댓값인 $9-a$ 중 어느 게 더 큰가에 따라서

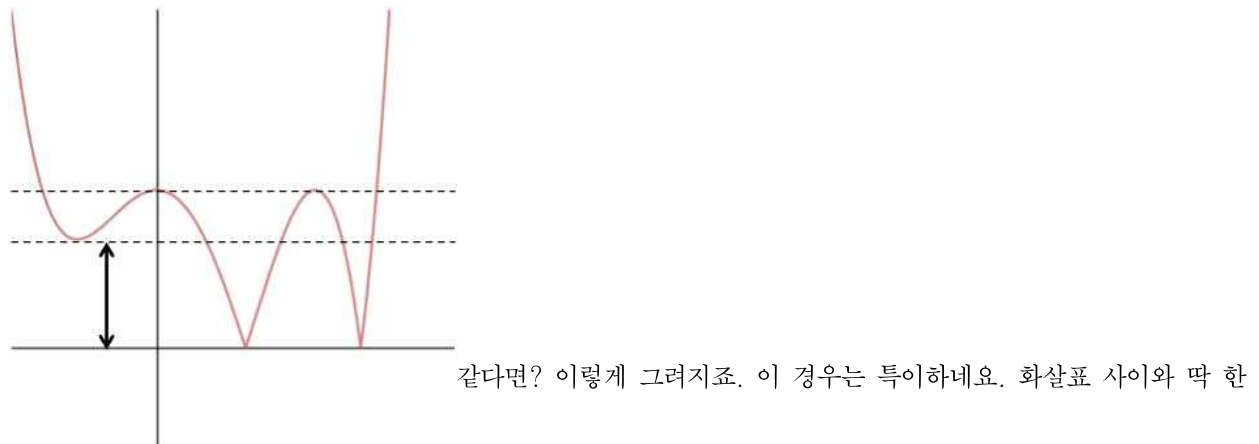
그래프가 갈리긴 해요. 그러니까 $a-4 < 9-a$ ($a < \frac{13}{2}$)이면 왼쪽의 그림이 그려지구요,

$a-4 > 9-a$ ($a > \frac{13}{2}$)이라면 오른쪽의 그림이 그려집니다. 아무튼 4개의 점에서 만나려면 $y=b$ 가 화살표 사이에 있어야 합니다.

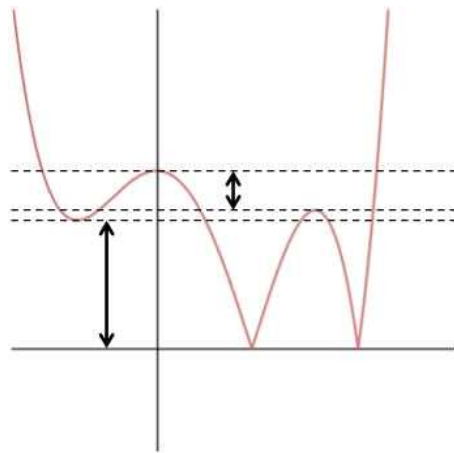
a 가 극댓값보다 큰 10부터 35까지일 때를 볼게요.



$36-a$ 가 크다면 ($a < 20$ 이라면) 이렇게 그래프가 그려집니다. 화살표 사이에 있어야 하구요.



변 4개의 점에서 만나는 부분이 있어요. 이 두 개의 경우만 4개의 점에서 만납니다.



$f(x)-a$ 의 극솟값인 $4-a$ 를 접어 올린 $a-4$ 이 극댓값인 $36-a$ 보다

크다면($a > 20$ 이라면)이렇게 됩니다. 이것도 사실 엄밀하게 따지자면 더 나눌 수 있는데... 일단은 넘어갈게요.

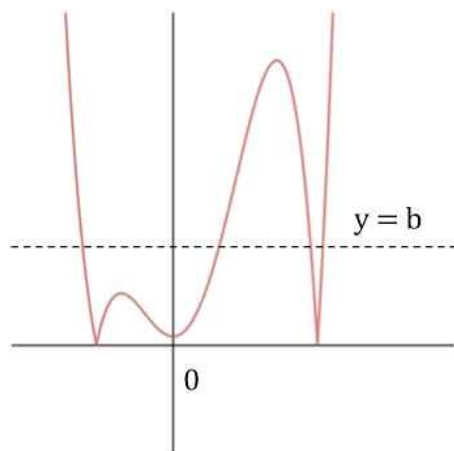
아무튼 화살표 사이에 있어야 합니다.

뭐 이정도가 $g(x)$ 의 개형인 것 같아요. (가)조건도 대충 해석이 된 것 같구요. 다음으로 가봅시다.

어이구야....(나)조건에서 $|g(x)-b|$ 가 미분불가능한 점이 4개랍니다. 하.... 절댓값으로 접어 올린 걸 또다시 접어 올려야 하네요. 딱 봐도 쉽지 않아 보이는데요? 그래도 아까 개형 다 나뉘었으니까 케이스 분류하고 천천히 가봅시다.

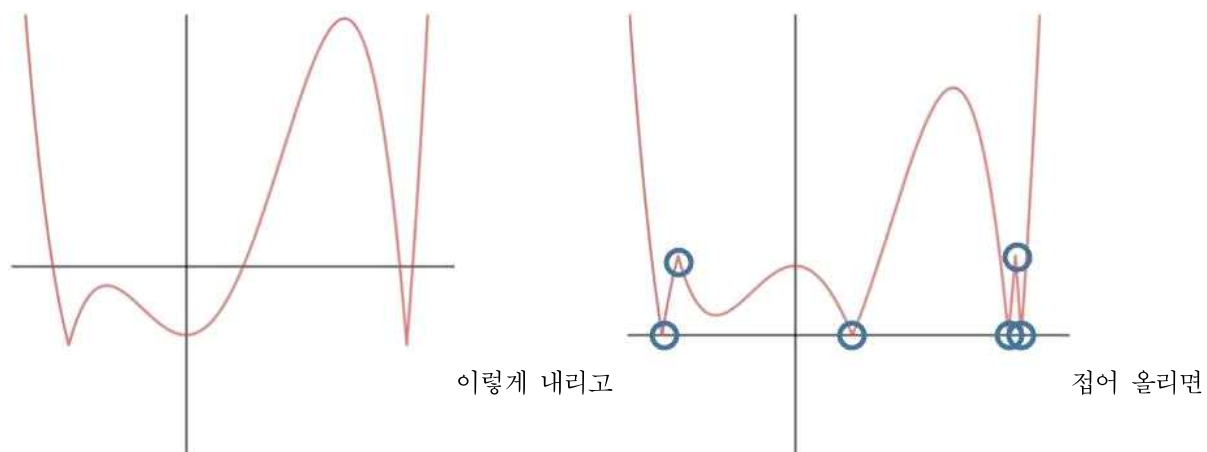
4-1) 케이스 분류

4-1-1) $1 \leq a \leq 4$ 일 때



이렇게 되는 거죠? 오? 그런데 $g(x)-b$ 라는 함수는 지금 보고 있는

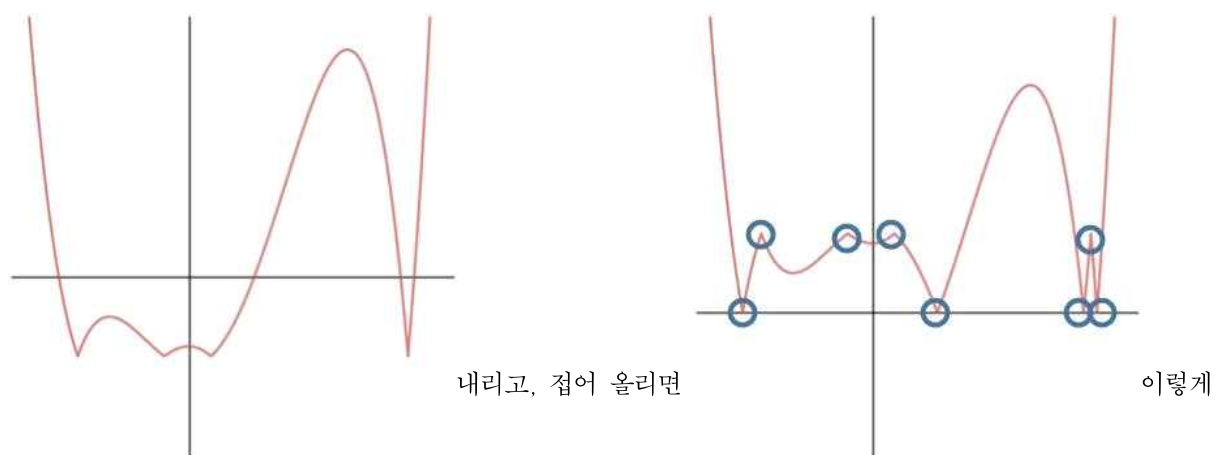
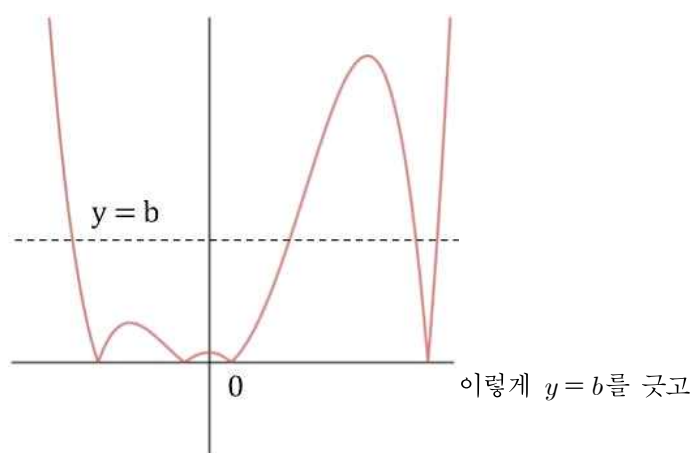
$g(x)$ 를 b 만큼 내린 함수잖아요. 그런데 지금 $y=g(x)$ 와 $y=b$ 가 만나네요? 이거 그대로 x 축에 만나게끔 내리고 접어 올리면 되겠어요.



이렇게 됩니다. 미분불가능한 점이 6개나 되는데요?

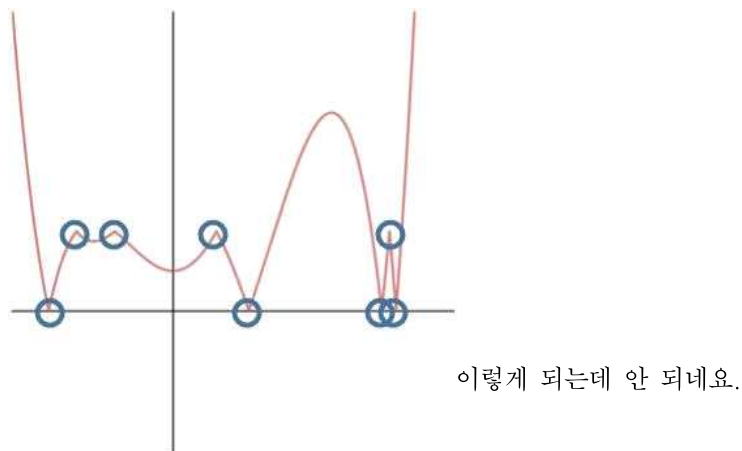
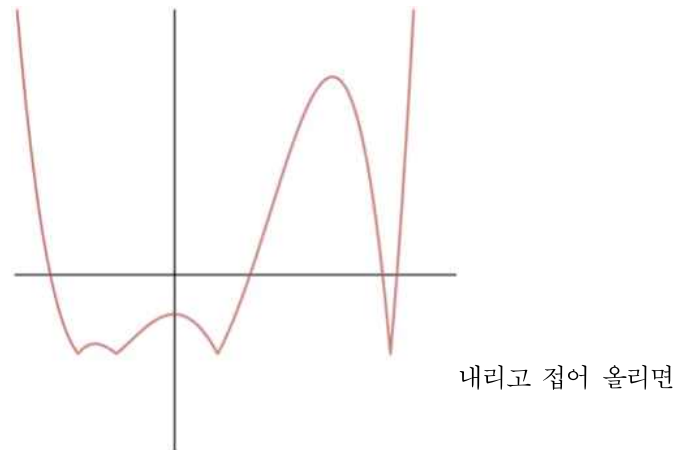
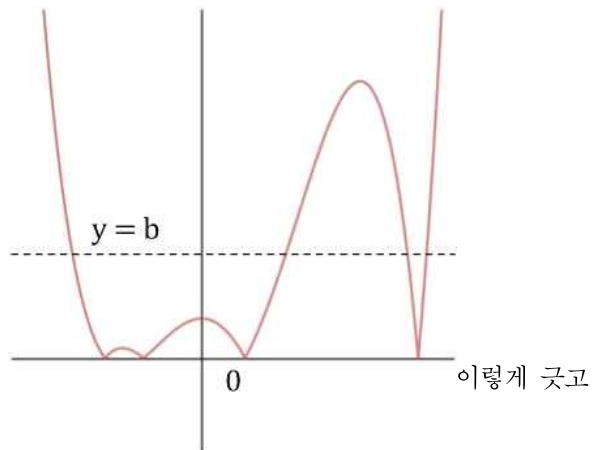
4-1-2) $5 \leq a \leq 9$ 일 때

4-1-2-1) $5 \leq a \leq 6$ 일 때



됩니다. 안 되죠?

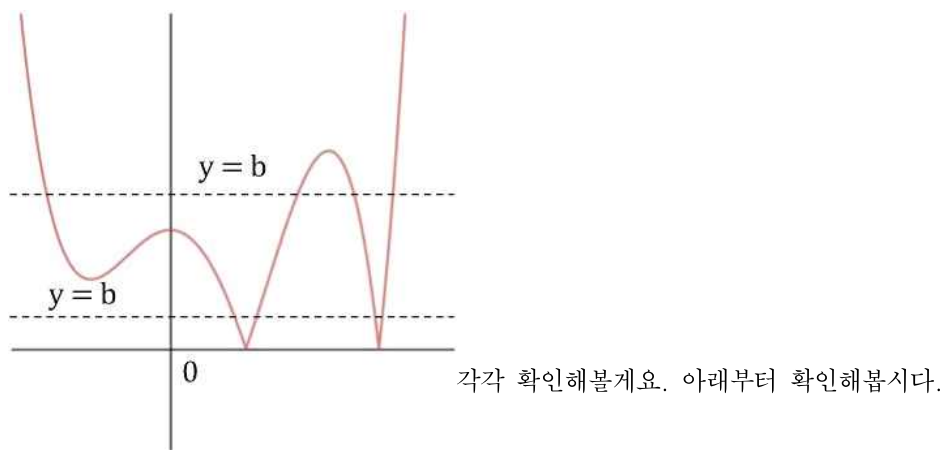
4-1-2-2) $7 \leq a \leq 9$ 일 때

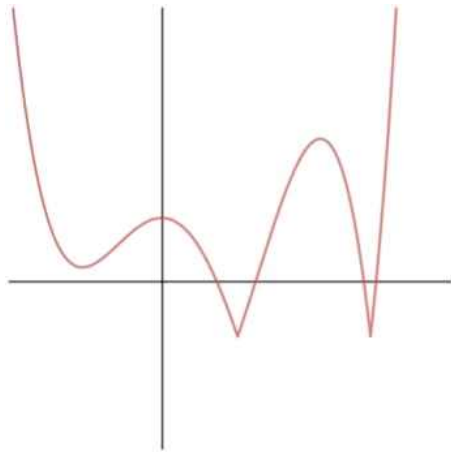


4-1-3) $10 \leq a \leq 35$ 일 때

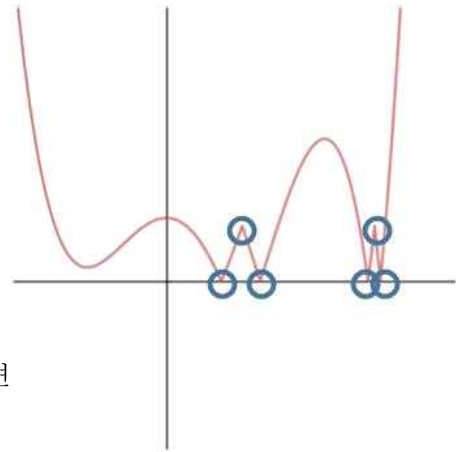
4-1-3-1) $10 \leq a \leq 19$ 일 때

이거는 범위가 두 개였죠?

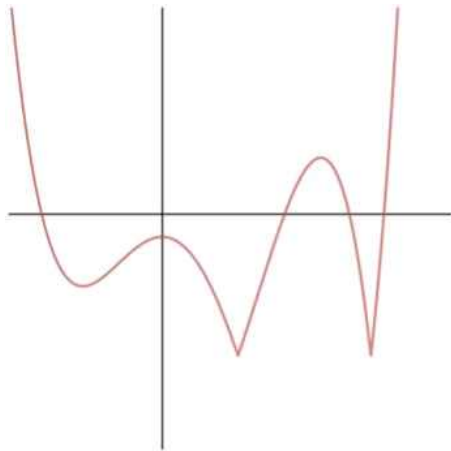




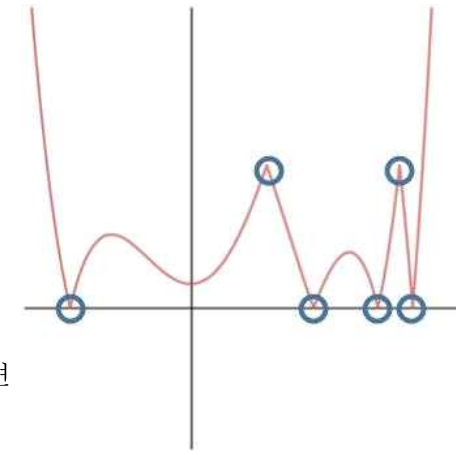
이렇게 내리고 접어 올리면



안 되네요.

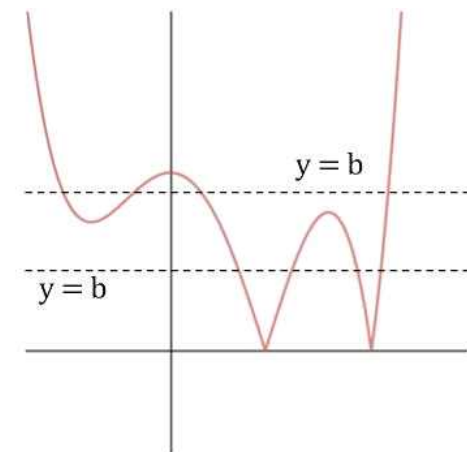


이렇게 내리고 접어 올리면



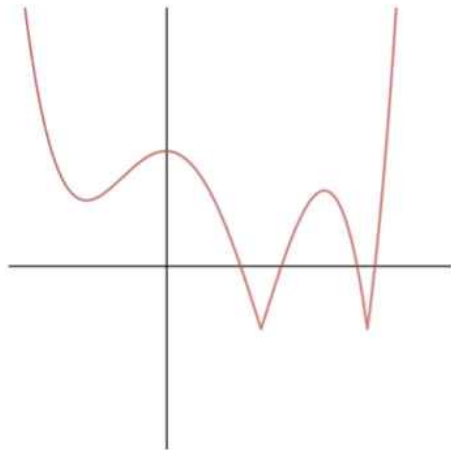
안 됩니다.

4-1-3-2) $21 \leq a \leq 35$ 일 때

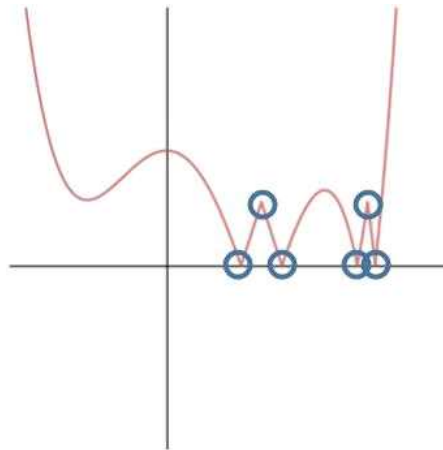


이렇게 두 개 확인해볼게요. 아까 말했듯이 이것도 사실 개형이 두

개로 나뉜 건데요. 이거는 극댓값을 내린 $9 - a$ 를 접어 올린 $a - 9$ 와 극댓값을 내린 $36 - a$ 중 어느게 더 크냐에 따라서 또 나뉘거든요. 그런데 내리고 접어 올렸을 때 양상이 같아서 생략할게요.

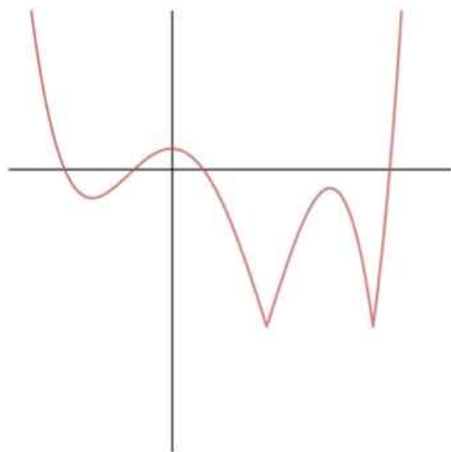


내리구요,

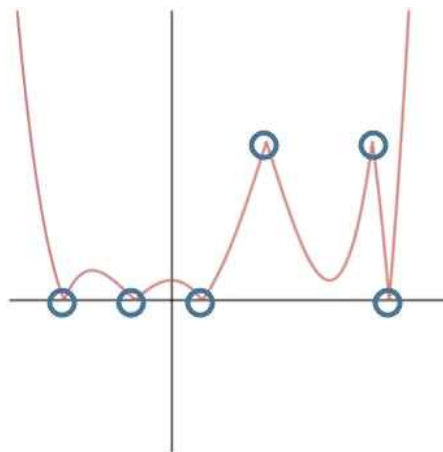


접어 올립니다. 안

되네요!



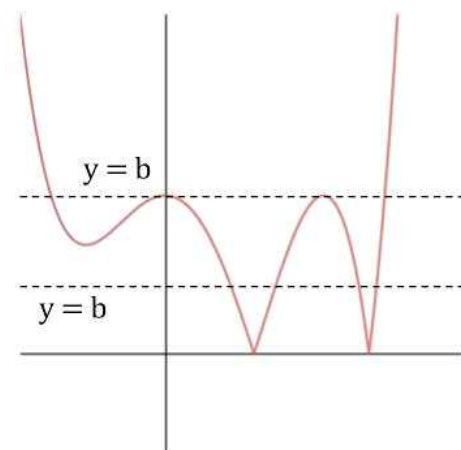
내리구요,



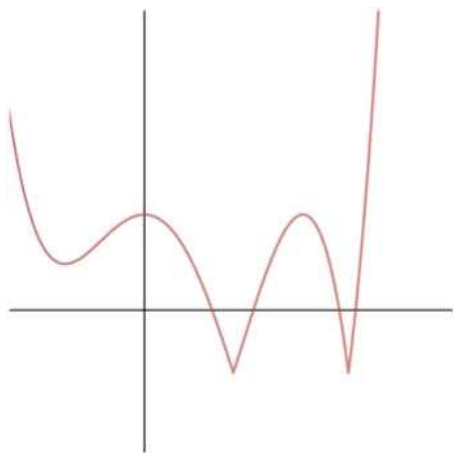
접어 올리면 안

되네요!

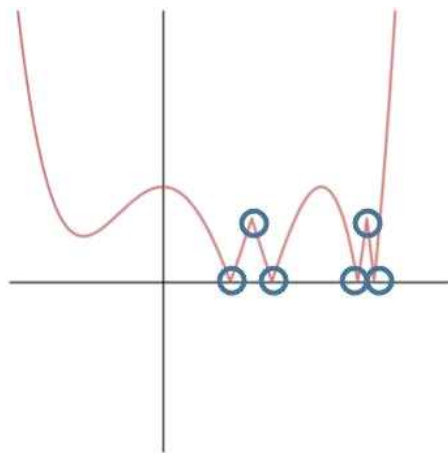
4-1-3-3) $a = 20$ 일 때



이렇게 설정할 수 있죠?

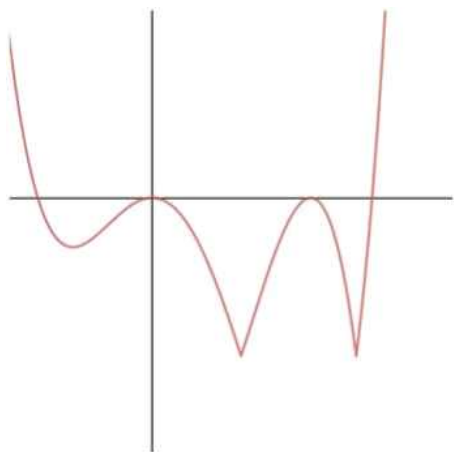


내리고

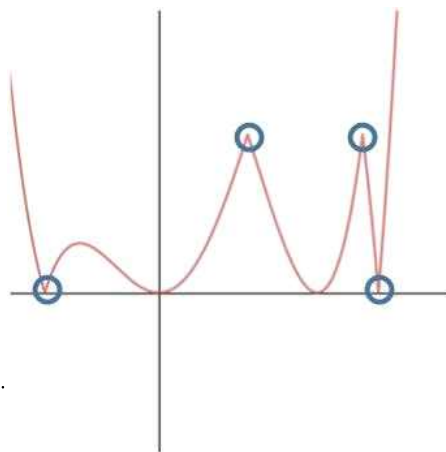


접어 올립니다.

안 되네요.



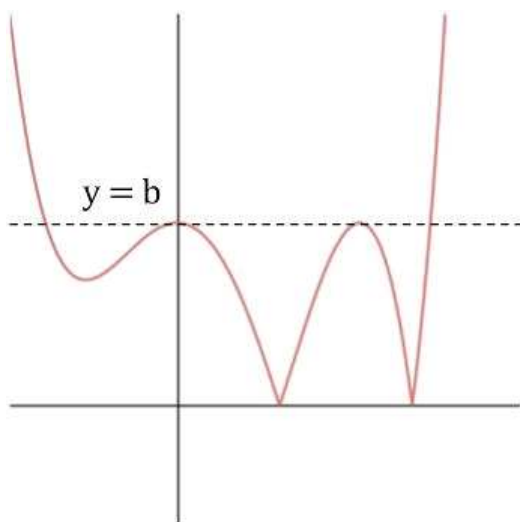
내리구요....



접어 올리면...

되네요!! 이거죠?

일단 $a = 20$ 이예요. 그런데 b 도 구해야 해요. 지금



이렇게 되는 거잖아요. $y = b$ 는 $f(x) - a$ 의 극댓값과 같은 거

아닌가요? $36 - a = 16 = b$ 이네요. $a + b = 36$ 입니다.

4-2) 조건해석

그런데 사실 접어 올리지 않고도 바로 개형을 찾을 수 있어요. 지금까지 이야기했던 거지만 접어 올릴 때 x 축과 ‘그냥’ 만나는 건, 그러니까 인수가 1개인 경우 접어 올리면 그 점에서 미분불가능이 되죠? 미분가능이 되려면 접선의 기울기까지 0이 되어야죠. 그런데 $f(x)-a$ 의 그래프들을 잘 관찰해보면 x 축과 최소한 2개의 점에서는 ‘그냥’ 만났어요. 그 말은 $g(x)$ 는 최소한 미분불가능한 점이 이미 2개가 있었다는 이야기예요. 그 상황에서 $y=g(x)$ 는 $y=b$ 와 4개의 점에서 만났고, b 만큼 내린 $g(x)-b$ 도 마찬가지로 x 축과 4개의 점에서 만나죠.

그런데 아까도 말했듯이 $g(x)$ 는 이미 미분불가능한 점이 2개 이상 가지고 있었어요. 만약 $f(x)-a$ 가 x 축과 2개의 점에서만 ‘그냥’ 만났다면 그걸 접어 올린 $g(x)$ 는 2개의 미분불가능한 점을 가지게 되잖아요. 그 상황에서 4개의 점에서 만나는 $y=b$ 를 긋고 내리고 접어 올렸을 때 4개의 점에서 미분불가능하려면 2개는 미분불가능한 점으로 추가가 되고 나머지 2개는 미분가능한 점으로 추가가 되어야 해요. 그래야 미분불가능한 점의 총 개수가 4개가 되죠. 다시 말해서 $g(x)-b$ 가 x 축과 2개의 점에서 ‘그냥’ 만나고 2개의 점에서 접해야 한다는 말이 됩니다.

이걸 다시 해석해볼까요? $y=g(x)$ 와 $y=b$ 가 2개의 점에서는 ‘그냥’ 만나고 2개의 점에서는 접해야 한다는 말이 되겠네요.

만약 $f(x)-a$ 가 x 축과 4개의 점에서 ‘그냥’ 만났다면 4개의 점 모두 미분불가능한 점이 됩니다. 이 상황에서 $g(x)-b$ 를 접어 올려서 4개의 미분불가능한 점이 되려면 $g(x)-b$ 가 x 축과 만나는 점들은 모두 ‘그냥’ 만나서는 안 되고 접해야 합니다. 더 이상 미분불가능한 점이 추가가 되면 안 되거든요.

이걸 다시 해석하면 $y=g(x)$ 와 $y=b$ 가 만나는 점들은 모두 ‘그냥’ 만나서는 안 되고 접해야 한다는 말이 됩니다. 앞으로 가서 모든 경우를 살펴보세요. $f(x)-a$ 가 x 축과 4개의 점에서 ‘그냥’ 만난 경우에 $y=g(x)$ 와 $y=b$ 가 만나는 점들이 모두 ‘그냥’ 만나지 않고 접하는 경우는 없습니다. 최소한 1개씩은 ‘그냥’ 만났어요.

그리고 $f(x)-a$ 가 x 축과 2개의 점에서만 ‘그냥’ 만난 경우에 $y=g(x)$ 와 $y=b$ 가 2개의 점에서는 접하게 되는 건 $a=20$ 이고 $b=16$ 인 경우 하나밖에 없습니다. 따라서 $a+b=36$ 입니다.

이거 사실 말로 써서 길고 복잡하게 보이는 거지 지금까지 절댓값 함수를 접어 올렸을 때 미분가능한 조건을 알고 있었다면 빠르게 할 수 있어요.

8. 정답 35

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

원점 O를 출발하는 P의 속도 $v(t)$ 가 $v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 & (0 \leq t < 2) \\ -t^2+10t-16 & (2 \leq t < 8) \\ 2-\frac{1}{4}t & (8 \leq t \leq 16) \end{cases}$ 라고 합니다. 이때 $\overline{OP}$ 의 최댓값을

구하라네요.

그러니까 원점 O와 P가 최대로 떨어진 길이를 찾으라는 거죠? 저번에도 말했듯이 P는 위치 그래프의 함숫값만큼 y 축 위를 움직입니다. 원점은 $y=0$ 이구요. 원점에서 길이가 가장 멀어지려면 어떻게 해야 할까요? 함숫값이 가장 커져야겠죠.

아니죠? 함숫값이 가장 작아져도 됩니다. 길이는 절댓값을 씌워야 하잖아요? 최대값보다 최솟값이 절댓값을 씌웠을 때 크다면 거기서 길이가 최대가 되는 거겠죠. 그러니까 8과 -9가 있다면 9가 최대인 길이가 되는 거예요. 그러면 그래프를 그려봐야겠는데요?

2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 절댓값 함수

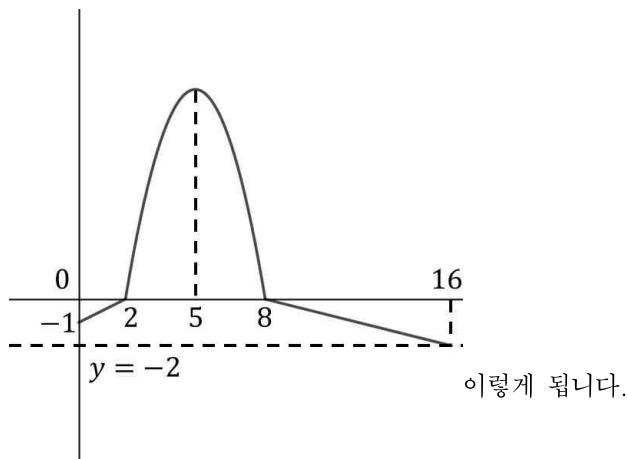
그런데 생각해봅시다. 속도를 적분하면 위치가 되잖아요? 그러면 위치가 가장 커지거나 가장 작아지려면? 적분값이 최대가 되거나 적분값이 최소가 되면 되겠네요. 그러니까 $v(t)$ 를 0부터 적분해서 적분값이 가장

커지거나 가장 작아지는 부분을 찾아봅시다. $v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 & (0 \leq t < 2) \\ -t^2+10t-16 & (2 \leq t < 8) \\ 2-\frac{1}{4}t & (8 \leq t \leq 16) \end{cases}$ 를 그려볼게요.

일단 $0 \leq t < 2$ 에서 $v(t)=\frac{1}{2}t-1$ 이니까 $(0, -1), (2, 0)$ 을 지납니다. 그리고 $2 \leq t < 8$ 에서

$v(t)=-t^2+10t-16=-(t-2)(t-8)$ 이니까 $t=2, 8$ 에서 t 축과 만납니다. 축은 $t=5$ 이구요. 그리고

$8 \leq t \leq 16$ 에서 $v(t)=2-\frac{1}{4}t$ 이니까 $(8, 0), (16, -2)$ 를 지나구요. 그러보면



지금 잘 보세요. 0부터 2까지 적분한 값은 밑변 2, 높이 1의 삼각형이니까 1이에요. 그리고 2부터 8까지 적분한 값은 $-(t-2)(t-8)$ 과 t 축으로 둘러싸인 부분의 넓이니까 $\frac{1}{6} \times (8-2)^3 = 36$ 이구요. 8부터 16까지 적분한 값은 밑변 8, 높이 2인 삼각형이니까 8이에요. 0부터 2까지, 그리고 8부터 16까지는 t 축 아래에 있구요. 그러니까 적분하면 음수가 된다는 거예요.

그러면 0부터 적분했을 때 값이 가장 커지는 부분을 찾아보세요. 8까지이죠? $-1 + 36 = 35$ 잖아요. 16까지 적분하면 $-1 + 36 - 8 = 27$ 이니까 오히려 작아져요. 따라서 $t = 8$ 일 때가 최대입니다.

그러면 길이는요? 위치가 곧 길이죠. 위치는 원점부터 떨어진 곳을 위치라고 하는 거잖아요. 물론 위치가 음수일 때는 절댓값을 씌운 것이 길이가 되지만 지금은 양수잖아요. 따라서 $\overline{OP}$ 의 최댓값은 35입니다.

9. 정답 ⑤

1) 조건해석

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다항함수인데 (가)조건에서 $f'(x) = x^2 - 4x$, $g'(x) = -2x$ 라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 서로 다른 두 점에서만 만난다고 합니다. 그러면 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거죠? 다시 말하면 $f(x) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 2개여야 한다는 거예요.

$y = f(x) - g(x)$ 와 x 축이 2개의 점에서만 만나야 한다는 거죠.

2) 함수 구하기 - 차함수

그런데 우리는 $f'(x) = x^2 - 4x$, $g'(x) = -2x$ 를 알고 있잖아요. $y = f(x) - g(x)$ 의 형태로 만들기 위해서

차함수를 이용해봅시다. $f(x)-g(x)=h(x)$ 라 하면 차함수에 의하여

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x^2-2x=x(x-2)$ 입니다. 그러니까 $y=h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소가 되는 거죠.

$h'(x)$ 가 이차함수니까 $h(x)$ 는 삼차함수겠죠? 삼차함수가 x 축과 두 개의 점에서 만난다는 건? 한 점에서는 접해야 한다는 거죠.

그런데 지금 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소잖아요? x 축에 접하기 위해서는 $x=0$ 에서 접하거나 $x=2$ 에서 접해야 합니다. 다시 말하면 $h(0)=0$ 이거나 $h(2)=0$ 이어야 한다는 거죠.

ㄱ에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 극대냐고 물어보네요. 이걸 해봐야 알 것 같아요.

$f'(x)=x^2-4x$ 이니까 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대, $x=4$ 에서 극소네요. $g'(x)=-2x$ 이니까 $g(x)$ 는 $x=0$ 을 축으로 하고 $x=0$ 에서 극댓값을 갖습니다. 모두 극대 맞네요? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{f(0)-g(0)\} \times \{f(2)-g(2)\}=0$ 이냐고 물어보네요. 다시 말하면 $h(0)=0$ 이거나 $h(2)=0$ 이냐고 물어보는 거죠? 방금 $h(0)=0$ 이거나 $h(2)=0$ 이어야 한다고 했었잖아요. 맞네요?

3) 정적분 변수

ㄷ에서 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{-1}^x \{f(t)-g(t)\}dt \geq 0$ 이면 $\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx=2$ 이냐고 물어봅니다.

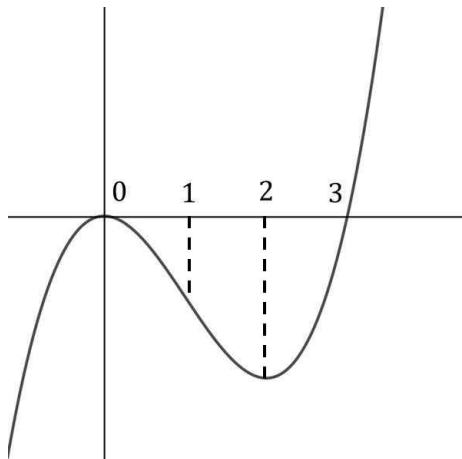
그러니까 $\int_{-1}^x h(t)dt$ 가 x 축보다 항상 크거나 같으면 $x=1$ 에서의 함숫값이 2가 되냐는 거잖아요? 이걸 그래프를 그려봐야 알겠는데요?

그런데 문제는 $h(0)=0$ 인지, $h(2)=0$ 인지를 몰라요. 그러면 케이스를 나눠야겠죠?

4) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

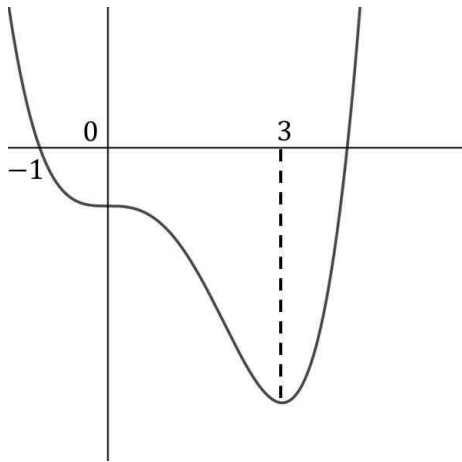
4-1) $h(0)=0$ 일 때

$x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소인데 $x=0$ 에서 x 축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



이렇게 되겠죠?

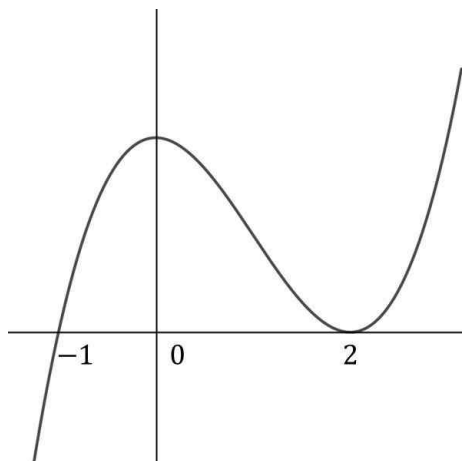
그런데 이 상태에서 적분을 한 번 더 해야 합니다. 그리고 $x = -1$ 에서 x 축과 만나도록 적분을 해야 하죠. $x = 0$ 에서는 접하면서 방향 그대로 지나가고, $x = 3$ 에서는 극솟값을 갖는 함수입니다.



이렇게 되겠어요. 항상 x 축보다 크거나 같나요? 아닌데요?

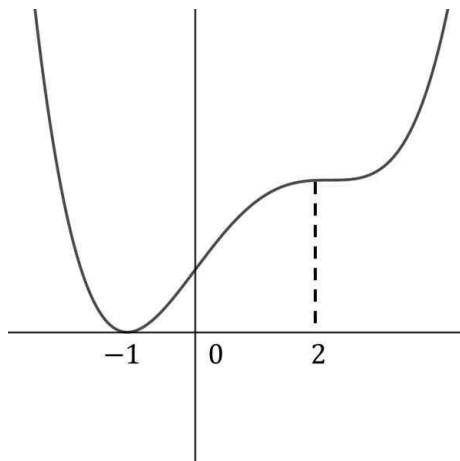
4-2) $h(2)=0$ 일 때

이러면 $x = 2$ 에서 x 축과 접하니까 삼차함수의 비율관계에 의하여



이렇게 될 거예요.

이 상태에서 한 번 더 적분해봅시다. $x = -1$ 에서는 극솟값을 갖고 $x = 2$ 에서는 접하면서 방향 그대로 지나가는

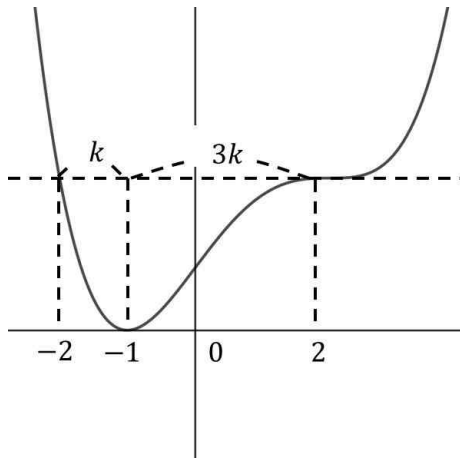


이런 그래프가 그려질 거예요. 이러면 항상 x 축보다 크거나 같네요?

이거네요.

이때 $x = 1$ 에서의 함숫값이 2인지를 확인해야겠죠? 일단 $h'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$ 이니까

$h(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$ 입니다. 거기에 사차함수에 비율관계에 의하여



이렇게 됩니다.

그림과 같이 $y = \int_{-1}^x h(t)dt$ 에 접하도록 $y = 0$ 이 아닌 직선을 그었을 때 만나는 점을 x 좌표가 작은 순서대로

α , β 라 하면 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 의 1:3내분점은 극점의 x 좌표가 되죠. $\int_{-1}^x h(t)dt$ 의 최고차항의 계수는

$\frac{1}{12}$ 이니까 $\int_{-1}^2 h(x)dx = \int_{-1}^{-2} h(x)dx = k$ 라 하면 차함수에 의하여 $\int_{-1}^x h(t)dt - k = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3$ 이고

$\int_{-1}^x h(t)dt = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3 + k$ 입니다. 여기서 $x = -1$ 에서의 함숫값이 0이니까 $k = \frac{9}{4}$ 이네요.

$\int_{-1}^x h(t)dt = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)^3 + \frac{9}{4}$ 입니다.

$x = 1$ 을 넣으면 $\int_{-1}^1 h(t)dt = 2$ 이네요. ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

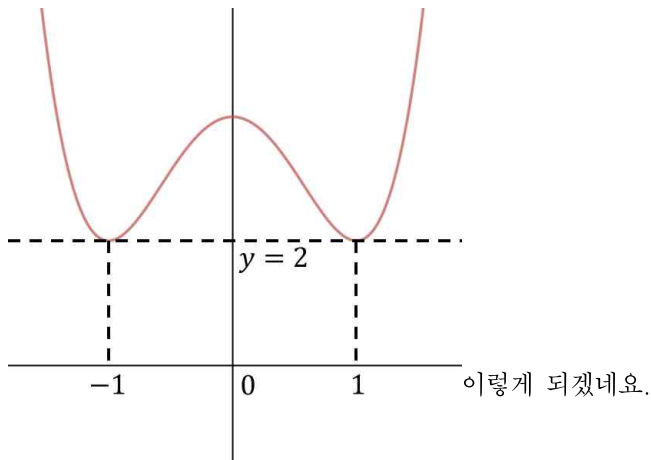
10. 정답 ⑤

1) 문제해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수인데 $f'(-x) = -f'(x)$ 라고 합니다. 이건 좀 특이하네요. 이거 원래는 기함수를 나타내는 표현이죠? 그런데 도함수가 기함수라고 합니다. 도함수가 원점대칭이고 $f'(0) = 0$ 이에요.

이때 $f'(1) = 0$ 이고 $f(1) = 2$ 라고 합니다. 일단 $f'(x)$ 가 원점 대칭이니까 $f'(1) = 0$ 이면 그 대칭부분에 있는 $x = -1$ 역시 $f'(-1) = 0$ 이겠죠?

정리하면 $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$ 입니다. 생각나는 개형이 있죠? 거기다 $f(1) = 2$ 이니까



2) 함수 구하기 - 차함수

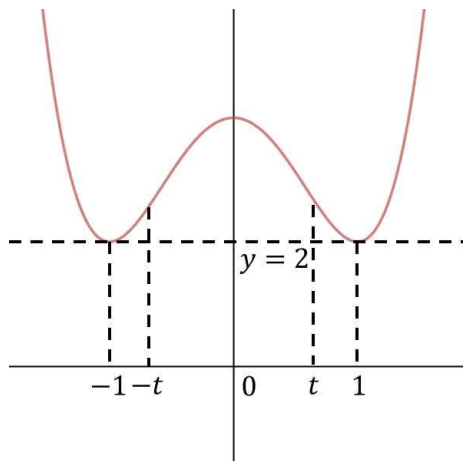
$y = f(x)$ 와 $y = 2$ 가 $x = -1, 1$ 에서 접하고 있어요. 차함수에 의하여 $f(x) - 2$ 는 $(x + 1), (x - 1)$ 라는 인수들 각각 두 개씩 가집니다. 따라서 $f(x) - 2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$ 이고 $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2 + 2$ 이네요.

ㄱ에서 $f'(-1) = 0$ 나고 물어보네요. 맞죠?

ㄴ에서 모든 실수 k 에 대하여 $\int_{-k}^0 f(x)dx = \int_0^k f(x)dx$ 나고 물어봅니다. 그러니까 다시 말해서 $x = 0$ 에서

k 만큼 앞으로 간 곳까지의 적분값과 $x = 0$ 에서 k 만큼 뒤로 간 곳에서의 적분값이 같냐고 물어보는 거죠?

저거 그래프 잘 보세요. $x = 0$ 축 대칭함수 아닌가요?



$x = 0$ 축에 대하여 대칭이니까 적분값은 같습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 $0 < t < 1$ 일 때 $\int_{-t}^t f(x) dx < 6t$ 이냐고 물어보네요. 음...

3-1) 적분 계산

그러면 진짜 적분해보면 되죠. $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2 + 2$ 이니까

$$\int_{-t}^t f(x) dx = \int_{-t}^t ((x+1)^2(x-1)^2 + 2) dx \text{ 입니다.}$$

그런데 $f(x)$ 는 우함수잖아요? y 축 대칭이니까요. 우함수의 특징은 $\int_{-t}^t f(x) dx = 2 \int_0^t f(x) dx$ 이죠. 따라서

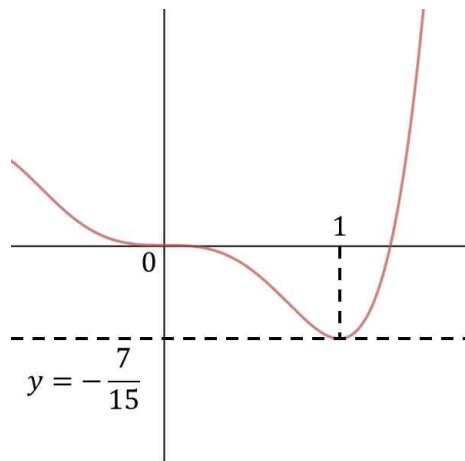
$$\int_{-t}^t ((x+1)^2(x-1)^2 + 2) dx = 2 \int_0^t (x^4 - 2x^2 + 3) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^t = 2 \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 3t \right) \text{ 입니다.}$$

그러니까 우리는 $0 < t < 1$ 에서 $2 \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 3t \right) < 6t$ 이고 $\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 < 0$ 인지 확인해보면 되는 거죠.

그래프는 똑같이 그리면 됩니다. 일단 인수분해는 $t^3 \left(\frac{1}{5}t^2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{5}t^3 \left(t - \sqrt{\frac{10}{3}} \right) \left(t + \sqrt{\frac{10}{3}} \right)$ 이니까 $t = 0$ 에서

t 축에 접하고, $t = -\sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{\frac{10}{3}}$ 에서 t 축과 만나네요. 그리고 $t = 1$ 에서 함숫값은 $-\frac{7}{15}$ 입니다. 미분 안

해도 그래프를 그릴 수 있겠는데요?

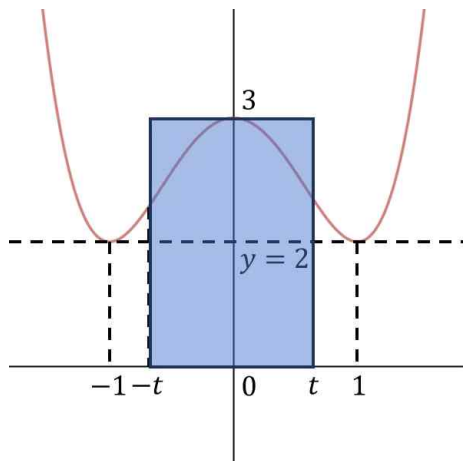


$0 < t < 1$ 에서 $\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 < 0$ 맞죠? ㄷ은 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ,

ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 그런데 5차함수를 그리는 게 맞는 풀이일까요? 뭐 그럴수도 있겠지만 출제자가 의도한 건 아니라고 생각하긴 합니다.

3-2) 정적분 관찰

$\int_{-t}^t f(x)dx < 6t$ 에서 $6t$ 를 잘 관찰해보세요. 그리고 그래프도 잘 관찰해보세요. 지금 $f(0)=3$ 인데



$6t$ 라는 건 밑변의 길이가 $2t$ 이고 높이가 3인 직사각형 아닌가요?

그리고 $\int_{-t}^t f(x)dx$ 의 넓이를 비교해 보세요. 무조건 직사각형의 넓이가 크죠? 따라서 $\int_{-t}^t f(x)dx < 6t$ 입니다.

ㄷ도 맞네요. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요. 약간 발상적일 수 있긴 해요. 하지만 정적분할 때는 항상 관찰해야 합니다. 쉬운 풀이를 찾아낼 수 있거든요.

11. 정답 432

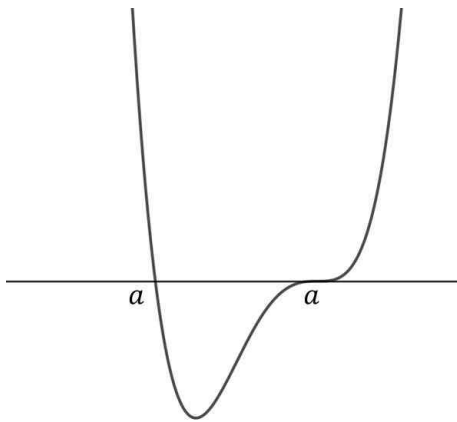
1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이구요, $g(x) = \int_t^x f(s)ds$ 라고 합니다. 일단 아래끝에 있는 $x=t$ 를 넣어보면 $g(t)=0$ 이 되네요. 그리고 미분하면 $g'(x)=f(x)$ 가 됩니다. $f(x)$ 가 $g(x)$ 의 도함수가 되네요.

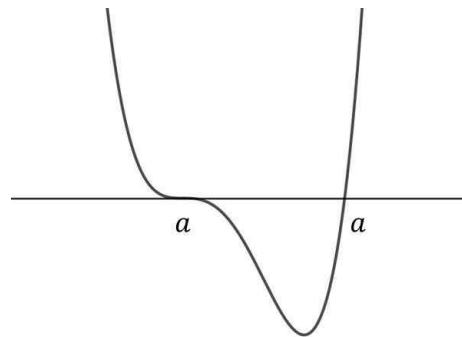
2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

(가)조건에서 $f'(a)=0$ 라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 1개라고 합니다. 어? $g(x)$ 는 $f(x)$ 를 적분한 식이니까 사차함수잖아요. 사차함수가 접어 올랐을 때 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1개가 된다고요? 개형 바로 떠오르죠?

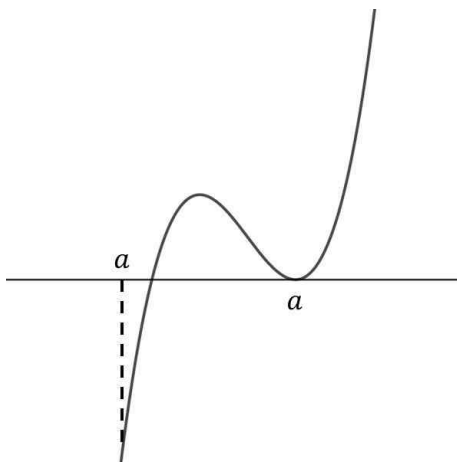


이렇게 되거나

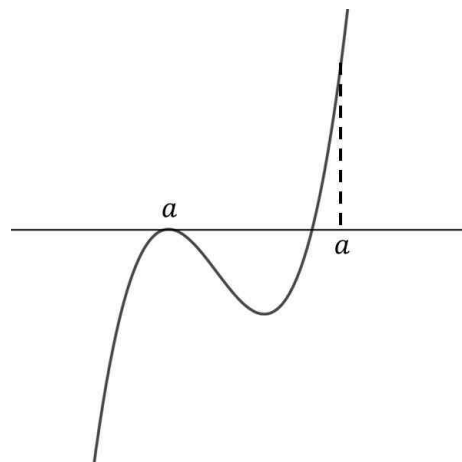


이렇게 됩니다.

그런데 아까 (가)조건에서 $f'(a)=0$ 라고 했잖아요. $g(x)$ 의 그래프로 $f(x)$ 의 그래프를 바로 그릴 수 있죠?



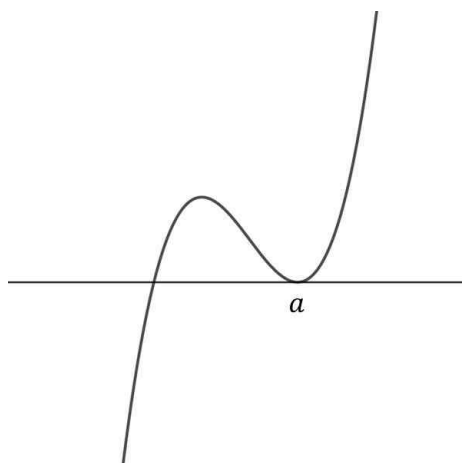
이렇게 되거나



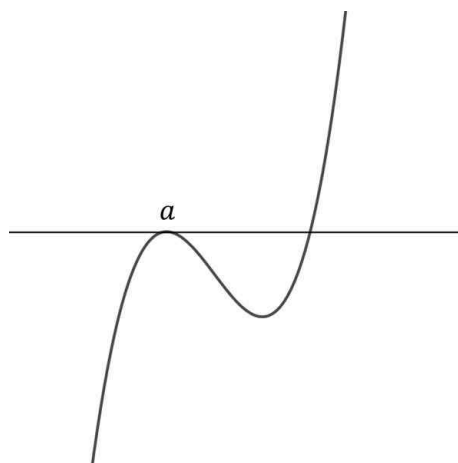
이렇게 될

거예요.

이 중에서 $f'(a)=0$ 인 경우는?

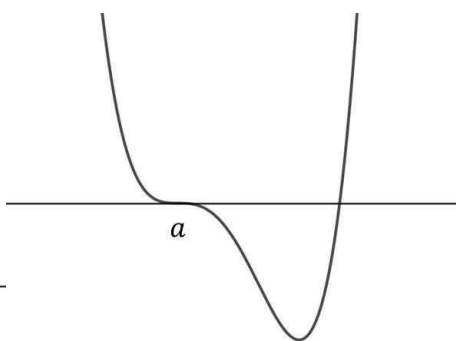
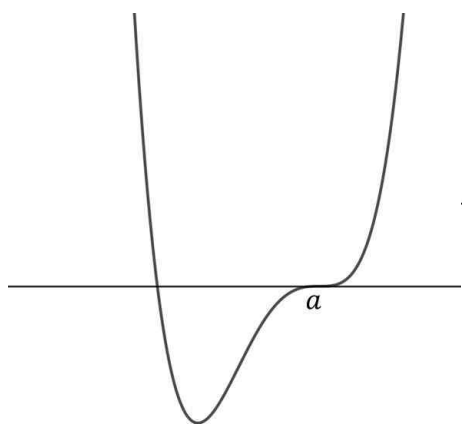


이거와



이거네요.

결국 $g(x)$ 에서 a 의 위치는

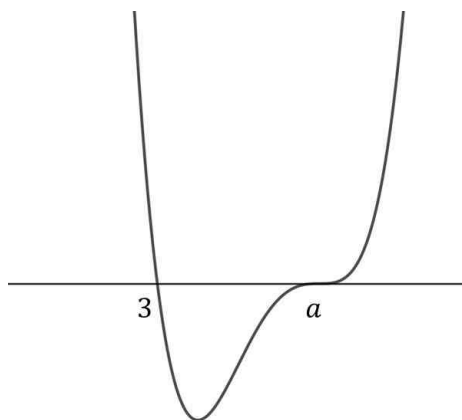


이렇게 되겠네요.

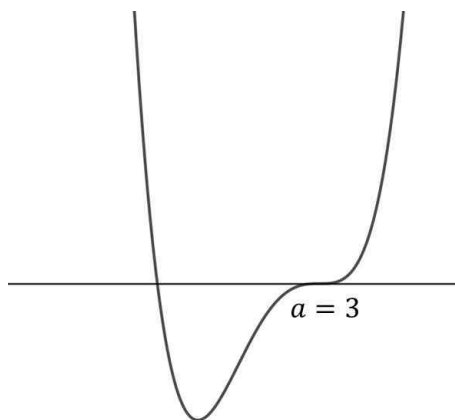
그리고 $g(a)$ 가 $h(t)$ 라고 합니다. $h(3)=0$ 이라고 하네요. 그럼 넣어봐야겠죠?

$t=3$ 일 때 $g(x)=\int_3^x f(s)ds$ 이구요, $g(3)=0$ 입니다. 그리고 $g(a)=0$ 이네요.

이러면 a 와 3이 같냐, 다르냐에 따라서 경우가 좀 나뉘네요.

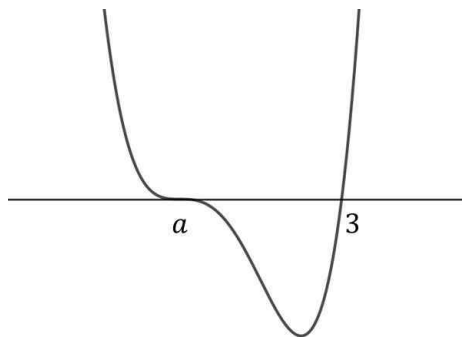


다르다면 이렇게,

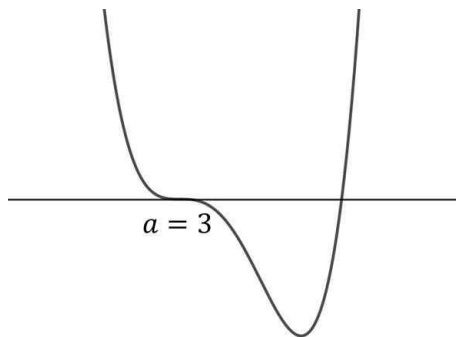


같다면

이렇게 되구요,



다를 때,



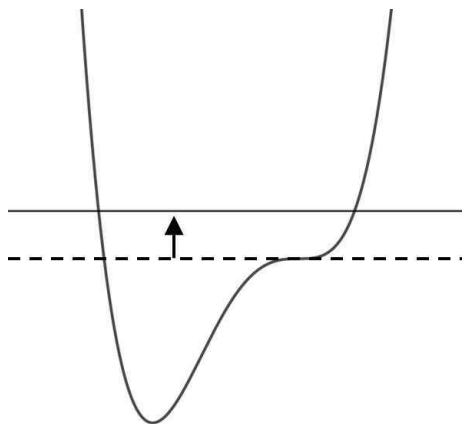
같은 때입니다.

그리고 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값 27을 가진대요. 그러면 $h(2)=27$ 이죠? $t=2$ 일 때 $g(x)=\int_2^x f(s)ds$ 이구요,

$g(2)=0$ 입니다. 그리고 $g(a)=27$ 이에요.

$t=2$ 에서 '최댓값'을 가진다고 했어요. 그러니까 $t=2$ 에서 $g(a)$ 의 값이 가장 크다는 이야기에요.

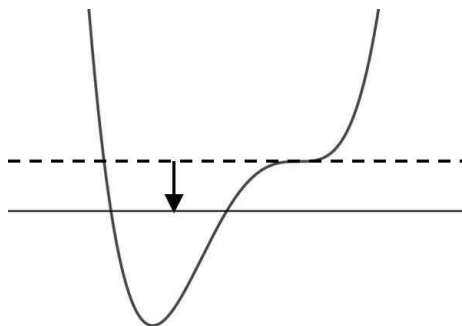
잘 생각해봅시다. 언제 최댓값을 가지게 되는 걸까요? 만약 $g(x)$ 가



이렇게 된다면 $g(x)$ 를 위로 올려서 x 축에 접하도록 해야 해요. 그래야

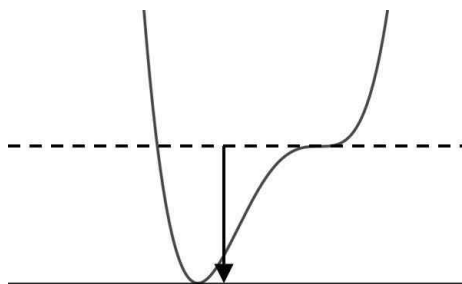
접어 올렸을 때 1개의 점에서만 미분불가능하게 되죠. 그런데 $g(x)$ 를 위로 올린다는 건 $g(a)$ 가 음수가 된다는 말이잖아요? 왜냐면 $g(x)-g(a)$ 니까요. $-g(a)$ 가 양수가 되어야 위로 올라가잖아요. 그러니까 $g(a)$ 가 음수가 되죠. 이러면 최댓값이 될 수가 없는데요?

만약



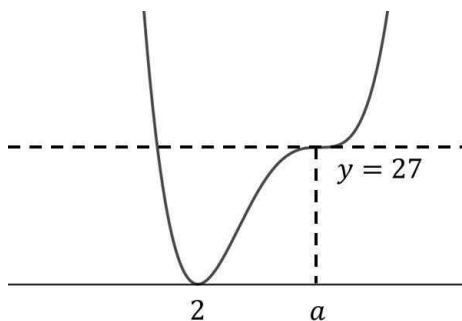
이렇게 살짝 위로 간다면요? 이러면 아래로 내려야죠. 그 말은 $g(a)$ 가

양수가 된다는 말입니다. 언제 최대가 될까요?

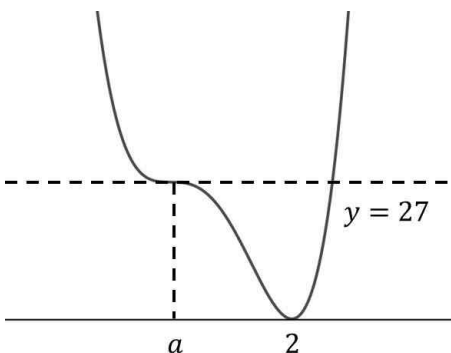


이럴 때죠. 그쵸? 만약 이거보다 위로 올라간다면 $g(t)=0$ 이 될 수가

없어요. x 축과 안 만나는데요? 이 값이 27이고, $g(2)=0$ 이에요. 일단 x 축과 만나는 점은 유일하네요. 그리고 27만큼 아래로 내렸을 때 x 축과 접하게 되니까 결국 $g(x)$ 는

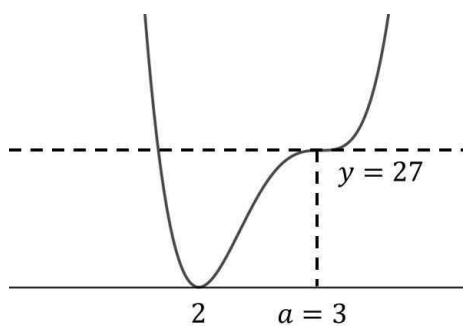


이렇게 되거나



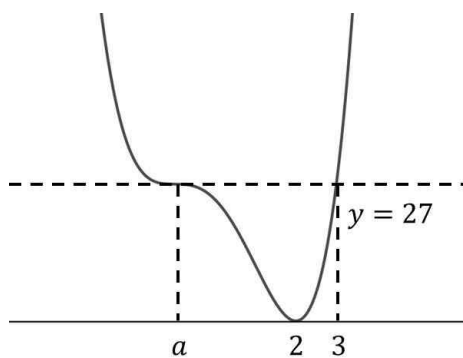
이렇게 됩니다.

그러면 3은요? $x=3$ 은 어디에 위치하게 되는 거죠? 왼쪽의 그림같은 경우 2보다 3이 크잖아요? 따라서 $a=3$ 이 될 수밖에 없겠네요.



이렇게 될 거예요.

오른쪽 그림같은 경우도 마찬가지로 $2 < 3$ 이잖아요. 그러면

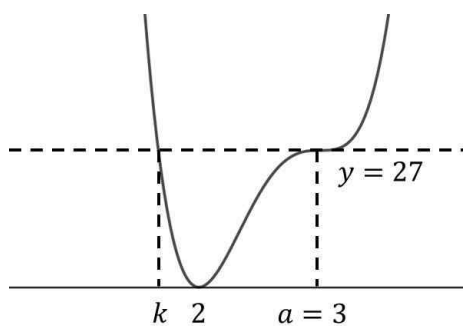


이렇게 되겠네요.

이 중 뭐가 맞는 거죠? 그럼 함수 구해보고 다 값이 맞는지 확인해보면 되겠죠.

3) 함수 구하기 - 사차함수의 비율관계, 차함수

일단



이거부터 해볼게요. 이 그림처럼 $y = 27$ 과 $y = g(x)$ 가 만나는 점

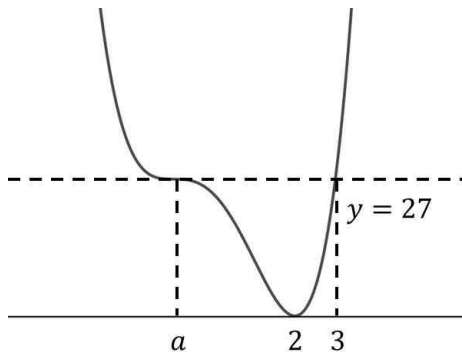
중에서 $x = 3$ 이 아닌 점의 x 좌표를 k 라 하면 $y = 27$ 과 $y = g(x)$ 은 $x = k$ 에서 그냥 만나고 $x = 3$ 에서 접하면서 방향 그대로 지나가요? 그런데 사차함수의 비율관계가 있잖아요. k 와 3의 1:3내분점은 극소점의

x 좌표인 2가 되는 거였죠. 따라서 $\frac{3k+3}{1+3}=2$ 이고 $k=\frac{5}{3}$ 입니다. 차함수에 의하여 $g(x)-27$ 은 $\left(x-\frac{5}{3}\right)$ 이라는 인수 하나, $(x-3)$ 이라는 인수 3개를 가지게 되네요.

거기다 $g(x)$ 는 $f(x)$ 를 적분한 거였죠? $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 4니까 $f(x)=4x^3+\dots$ 가 되구요, 이거 적분하면 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이 되네요. $g(x)-27=\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3)^3$ 이구요

$$g(x)=\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-3)^3+27\text{입니다.}$$

그리고 $g(2)=0$ 이어야 하잖아요? 그런데 $g(2)=\frac{80}{3}$ 이네요? 이걸 조건에 맞지 않는데요? 이제



이거로 가봅시다. 아까와 마찬가지로 하면 돼요. $y=g(x)$ 와 $y=27$ 은

$x=a$ 에서 접하면서 방향 그대로 가구요. $x=3$ 에서 그냥 만납니다. 따라서 a 와 3의 3:1내분점은 2가 되구요,

$\frac{9+a}{3+1}=2$ 이고 $a=-1$ 이 나오네요. 차함수에 의하여 $g(x)-27$ 은 $(x+1)$ 이라는 인수 3개, $(x-3)$ 이라는 인수

1개를 가집니다. $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $g(x)-27=(x+1)^3(x-3)$ 이고

$g(x)=(x+1)^3(x-3)+27$ 입니다. 그리고 $g(2)=0$ 이네요. 맞네요!

이제 $f(5)$ 만 구하면 돼요. $g'(x)=f(x)$ 니까 미분하고 $x=5$ 를 넣으면 되겠네요. 미분하면

$g'(x)=f(x)=3(x+1)^2(x-3)+(x+1)^3$ 이 되고 $f(5)=432$ 입니다.

12. 정답 ③

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

주사위를 세 번 던지고 나온 수가 차례로 a, b, c 인데 $f(x) = (a-3)(x^2 + 2bx + c)$ 가 있어요. 이때

$g(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ 가 있는데 $(g \circ f)(x)$ 가 연속일 확률을 구하랍니다. 일단 구하는 확률은

$\frac{(g \circ f)(x) \text{가 연속}}{\text{주사위 세 번}}$ 입니다.

분모부터 구해봅시다. 주사위의 눈은 1부터 6까지 있으니까 경우의 수는 $6^3 = 216$ 이네요.

분자를 구해볼게요. 일단 $(g \circ f)(x)$ 는 $g(x)$ 의 x 자리에 x 대신 $f(x)$ 를 넣은 거잖아요. 넣어봅시다.

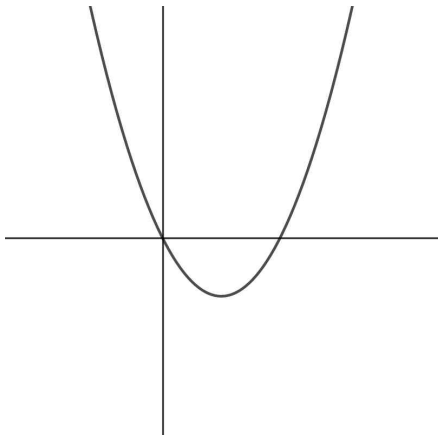
$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & (f(x) > 0) \\ 0 & (f(x) \leq 0) \end{cases}$ 입니다.

이게 연속이어야 한대구요? 잘 생각해보세요. 연속이면 좌극한 우극한 함숫값이 모두 같아야 합니다. 어느 하나라도 변하면 연속이 아니에요. 그런데 지금 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 양수냐 음수냐에 따라 함숫값이 바뀌잖아요.

만약 $f(x)$ 가 x 축을 지나가는 곳이 있다면? 그곳에서 $(g \circ f)(x)$ 의 함숫값이 바뀌겠죠? 그러면 연속이 안 되잖아요.

결국 항상 x 축 위에 있거나 항상 x 축보다 작거나 같아야 합니다. 작을 때는 x 축과 접하는 거까지는 돼요. 범위가 $f(x) \leq 0$ 이어서 등호가 있으니까 함숫값이 바뀌지 않거든요.

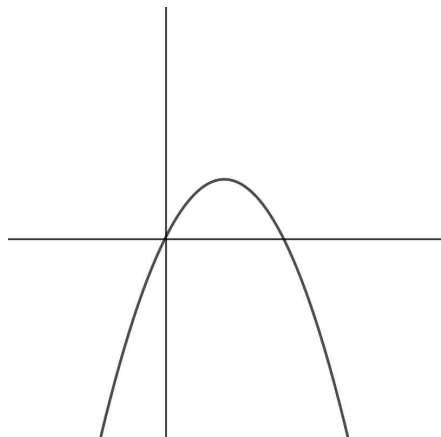
만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수라면 $(g \circ f)(x)$ 가 연속이기 위해서는 $f(x)$ 는 항상 x 축 위에 있어야 합니다. 그래프를 그려보면



이렇게 x 축 아래로 내려갈 경우 $(g \circ f)(x)$ 가 불연속인 점이 생기기

때문이죠.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면 $(g \circ f)(x)$ 가 연속이기 위해서 $f(x)$ 는 항상 x 축보다 작거나 같아야 해요. 이것도 마찬가지로 x 축 위에 있는 부분이 있도록 그래프를 그려보면



x 축 위로 올라갈 경우 $(g \circ f)(x)$ 가 불연속이 되는 점이 생깁니다.

지금 $f(x) = (a-3)(x^2 + 2bx + c)$ 이잖아요? 따라서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 경우, 즉 $a > 3$ 일 경우에는 $f(x)$ 는 항상 x 축보다 위에 있어야 합니다. 항상 x 축보다 위에 있어야 한다는 말은 $x^2 + 2bx + c$ 의 판별식이 0보다 작아야 한다는 말이죠. 따라서 $4b^2 - 4c < 0$ 이고 $b^2 < c$ 이어야 합니다.

지금 해볼까요? $a > 3$ 인 경우는 $a = 4, 5, 6$ 으로 3개입니다. $b^2 < c$ 인 경우는 기준을 잡고 분류를 해봐야겠네요. b 를 기준으로 해보면 되겠죠?

b	c	경우의 수
1	2~6	5
2	5~6	2
3~6	불가능	0

따라서 총 7개입니다. a 가 3개가 가능하니까 경우의 수는 $3 \times 7 = 21$ 이네요.

어? 그런데 만약 $a = 3$ 이어서 $f(x) = 0$ 이면요? 이러면 $(g \circ f)(x) = g(0) = 0$ 이잖아요? 계속 연속이 되네요!
이 경우에는 b 와 c 를 뭘 골라도 되겠어요. 경우의 수는 $6^2 = 36$ 입니다.

만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면, 다시 말해 $a < 3$ 이라면 $f(x) \leq 0$ 이어야 합니다. $a = 1, 2$ 가 되죠? 경우의 수는 2이구요. $f(x) \leq 0$ 이어야 하니까 $x^2 + 2bx + c$ 의 판별식이 0보다 작거나 같아야 하겠네요. 따라서 $b^2 \leq c$ 입니다. 아까와 마찬가지로 기준 잡고 분류해봅시다.

b	c	경우의 수
1	1 ~ 6	6
2	4 ~ 6	3
3 ~ 6	불가능	0

이렇게 총 9개가 가능하네요. a 가 두 개가 가능하니까 경우의 수는 $2 \times 9 = 18$ 입니다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{21+36+18}{216} = \frac{25}{72}$ 입니다. 답은 ③번이네요.

13. 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건해석

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수라고 합니다. 그리고 갑자기 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 그려져 있네요.

뭘에 쓰는 걸까요?

(가)조건에서 $f(x)=0$ 의 실근이 0, 2, 3'뿐'이라고 하네요. 다시 말해서 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표가 0, 2, 3만 있다는 거잖아요.

2) 인수정리

만약 $y=f(x)$ 와 x 축이 0, 2, 3에서 지나가기만 했다고 해봅시다. 그러니까 $f(x)$ 는 x , $(x-2)$, $(x-3)$ 이라는 인수를 각각 딱 하나씩만 가지고 있는 상황이에요. 이거 이외에 다른 실근은 없습니다. 사차함수는 최대 4개까지의 실근을 갖는 것이 가능하죠. 만약 저렇게 3개의 실근만을 딱 한 번만 가진다면, 나머지 하나의 근은 허근이어야 한다는 이야기에요. 그런데 그게 가능한가요?

그러니까 이렇게 되는 거예요. $f(x)$ 는 x , $(x-2)$, $(x-3)$ 이라는 실근을 가지니까 인수정리에 의하여 $f(x)=kx(x-2)(x-3)(x-b)$ ($k < 0$)라고 쓸 수 있죠. 그렇잖아요? 사차함수니까요. 그러면 자연스럽게 나오는 저 $(x-b)$ 는 뭘죠? 이걸 실근 아닌가요? 그러면 0, 2, 3이외에 또다른 실근이 추가되었어야 해요. 그런데 없다고 했잖아요.

결국 $f(x)$ 의 x , $(x-2)$, $(x-3)$ 라는 인수 중 적어도 하나는 2개를 가져야 합니다. 그러니까

$f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$ 이거나 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$ 이거나 $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$ 이 되는 거죠.

케이스가 3개네요?

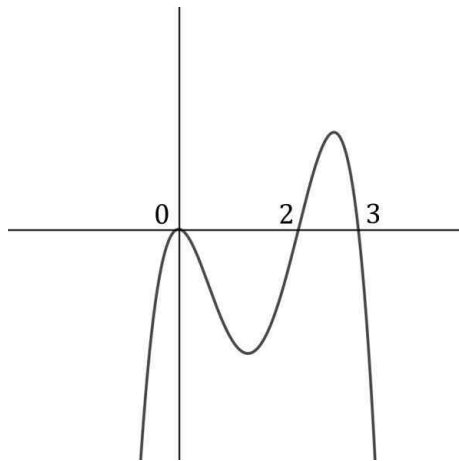
케이스를 나누기 전에 (나)조건부터 봅시다. $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$ 라고 한답니다.
부정표현은 바꾸자고 했죠? $g(x)$ 는 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값입니다.

이때 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 하네요. 그리고 이때 $f(1)$ 의 최댓값을 구하래요.
음... 케이스부터 나눠볼게요.

3) 케이스 분류

3-1) $f(x) = kx^2(x-2)(x-3)$ 일 때

이거 그래프 한 번 그려볼게요. x 축과 $x=0$ 에서 접하고 $x=2, 3$ 에서 그냥 지나가는 그래프입니다.

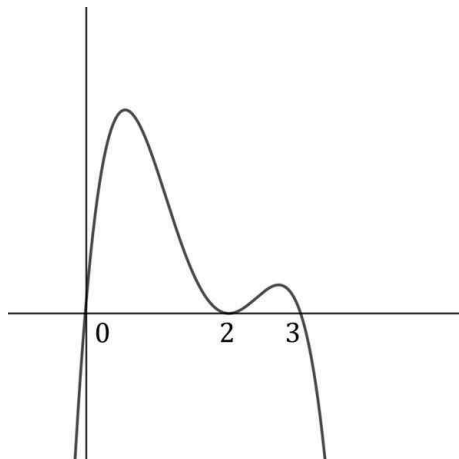


그리고 $f(1) = 2k$ 입니다. $f(1)$ 이 최대가 되려면 k 가 가장

커져야겠네요. k 는 음수잖아요? 그런데 아래에 3-2)랑 3-3)을 한 번 스윙씩 보고 오세요. 다 $f(1)$ 이 양수죠?
그런데 이 경우만 음수네요. $f(1)$ 이 최대가 되는 건 애초부터 불가능한데요?

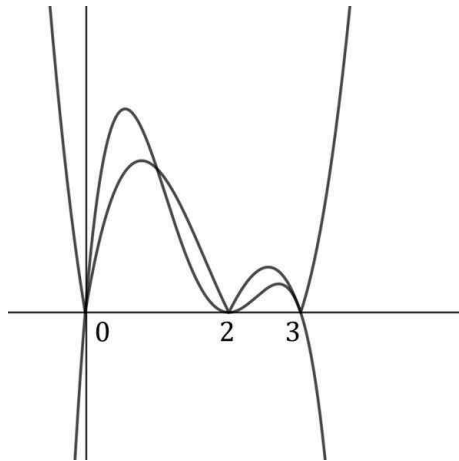
3-2) $f(x) = kx(x-2)^2(x-3)$ 일 때

x 축과 $x=2$ 에서 접하구요, $x=0, 3$ 에서 그냥 만납니다.



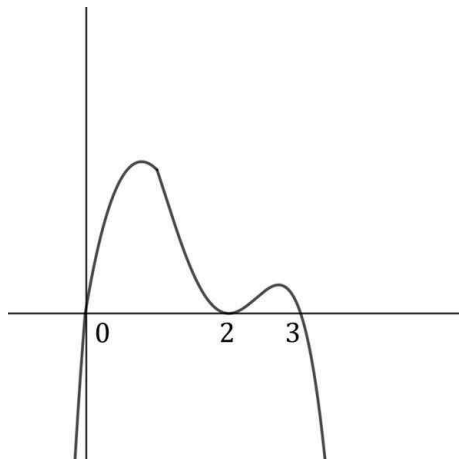
이렇게 됩니다. 그리고 $f(1) = -2k$ 이니까 k 가 가장 작아져야겠네요.

그런데 뭘 어째야 하죠? $g(x)$ 가 미분가능해야 한데.... $g(x)$ 는 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 작거나 같은 값이라고 했었죠? 그런데 저거 그림 좀 봐바요. $g(x)$ 의 그래프를 한 번 그려볼게요.



일단 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 를 이렇게 겹치게 그리고 여기서 작거나

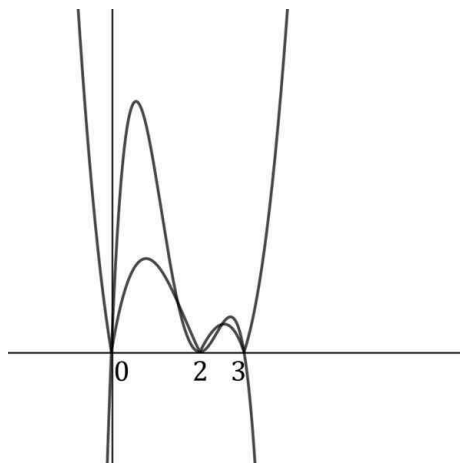
같은 부분만 그리면



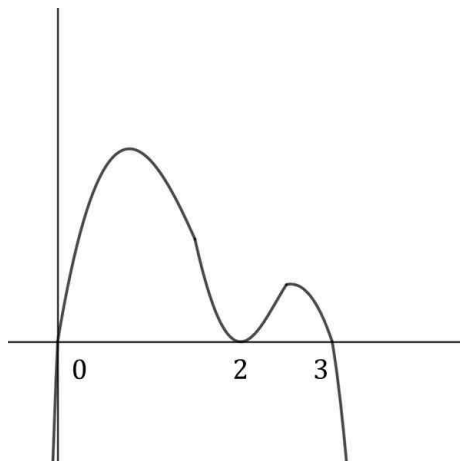
이렇게 됩니다.

어? 그림 잘 보세요. 미분불가능한 점이 두 개나 있는데요? $x=0$ 에서 갑자기 기울기가 달라지구요, 그리고 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 $0 < x < 2$ 에서 만나는 점에서도 기울기가 달라집니다. 매끄럽게 연결이 안 돼요. 이러면 안 되잖아요?

어... 지금 보면 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 그냥 만나기만 하면 그 점에서 미분불가능해지는 걸까요? 그림 하나만 더 그려봅시다.



이렇게 그려볼게요. 작거나 같은 부분만 잘라내면



이렇게 됩니다. 이것도 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 만나는 점에서

미분불가능하네요.

아! 그러면 만나는 점을 잘 살펴봐야겠어요! 지금까지 관찰해봤을 때 만나는 부분에서 뭔가가 발생합니다.

어.. 그런데 $|x(x-2)(x-3)|$ 는 그 자체로 방정식을 세우거나 할 수는 없잖아요? 이거는 절댓값을 풀고 범위 나눠서 해결해야 할 것 같은데요?

$|x(x-2)(x-3)|$ 의 절댓값을 풀면 $|x(x-2)(x-3)| = \begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0 < x < 2, x > 3) \\ -x(x-2)(x-3) & (x \geq 0, 2 \leq x \leq 3) \end{cases}$ 이 됩니다.

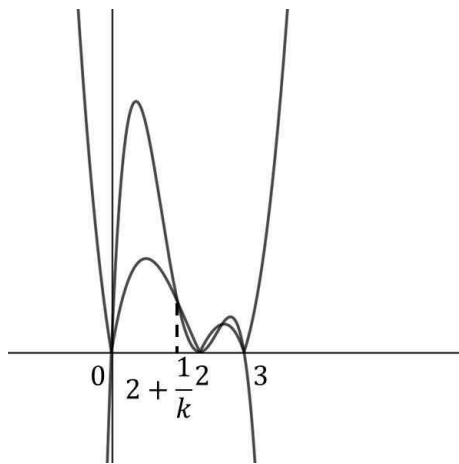
그러면 $0 < x < 2, x > 3$ 에서는 $kx(x-2)^2(x-3) = x(x-2)(x-3)$ 을 계산하면 됩니다. 정리하면

$kx(x-2)(x-3)\left(x-2-\frac{1}{k}\right) = 0$ 이네요. 오! 일단 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 는 $x = 0, 2, 3$ 에서 만나기는

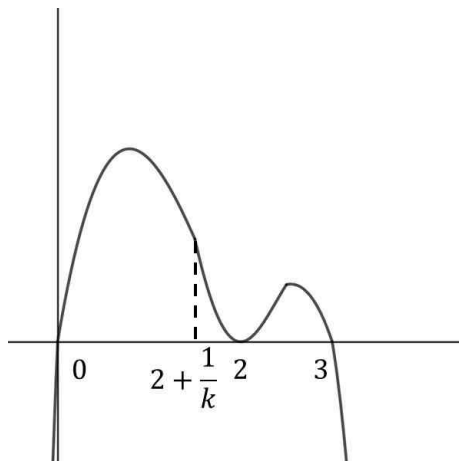
하는 군요. 어? 그런데 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 라는 실근도 있네요? 그러니까 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 라는 점에서 만난다는 말이잖아요?

그런데 방금도 봤듯이 만나기만 하면 미분불가능이 되었어요. 만약 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 라는 점이 $0 < x < 2$ 에 있다고

생각해보세요.



만나는 이 점이 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 가 되구요, $g(x)$ 를 그리면



이렇게 됩니다. 미분불가능하잖아요!!

(그러니까 식으로 해보면 $g(x) = \begin{cases} x(x-2)(x-3) & (0 < x < 2 + \frac{1}{k}) \\ kx(x-2)^2(x-3) & (x \geq 2 + \frac{1}{k}) \end{cases}$ 이 되는 거죠. $x = 2 + \frac{1}{k}$ 에서

미분가능한지 보기 위해서 이거 각각 미분하고 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 을 넣으면 $x < 2 + \frac{1}{k}$ 에서

$$g'(k-) = \frac{(1-k) + (2k+1) + (2k+1)(1-k)}{k^2} \text{ 이구요, } x > 2 + \frac{1}{k} \text{에서}$$

$$g'(k+) = \frac{(1-k) + (2k+1) + 2(2k+1)(1-k)}{k^2} \text{ 입니다. 지금 } \frac{(2k+1)(1-k)}{k^2} \text{ 만큼 차이가 나잖아요? 차이가}$$

없어야 미분가능하죠. 따라서 $k = -\frac{1}{2}$ 가 아니면 미분불가능해요.

물론 방금 식으로 한 부분은 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 가 $0 < x < 2$ 에 있을 때를 전제로 한 거예요. 그러면 자연스럽게

$0 < x < 2 + \frac{1}{k}$ 에서 $f(x) \geq x(x-2)(x-3)$ 가 되거든요.)

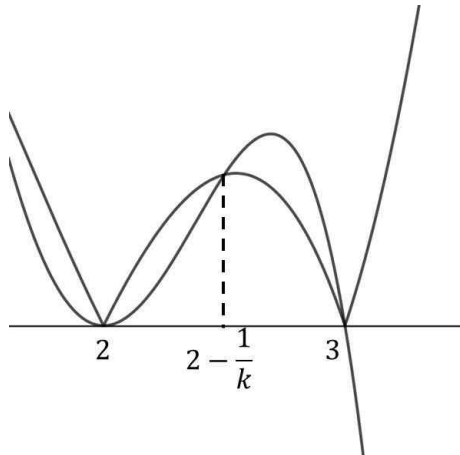
따라서 $x = 2 + \frac{1}{k}$ 라는 실근은 $k = -\frac{1}{2}$ 이거나 $0 < x < 2$ 밖으로 벗어나야 합니다. 범위 밖으로 벗어나면

상관이 없어요. 어차피 $0 < x < 2$, $x > 3$ 에서만 $x(x-2)(x-3)$ 이거든요. 아까 $k < 0$ 이라고 했으니까 $2 + \frac{1}{k} < 2$ 이죠. 그러면 $0 < x < 2$ 의 범위 밖은 $x \leq 0$ 이 되겠네요. 따라서 $2 + \frac{1}{k} \leq 0$ 이고 $k \geq -\frac{1}{2}$ 입니다. 아까 $k = -\frac{1}{2}$ 도 포함되어 있네요.

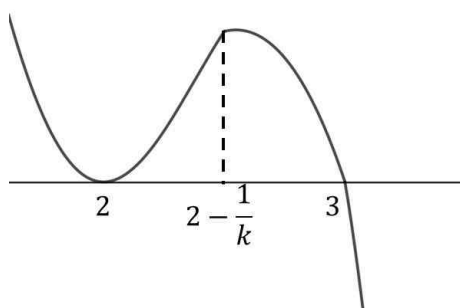
이번엔 $x \geq 0$, $2 \leq x \leq 3$ 를 봅시다. 이 범위 안에서 $|x(x-2)(x-3)| = -x(x-2)(x-3)$ 입니다. 그리고 이거랑 $f(x)$ 랑 만나는지 확인해야겠죠. $kx(x-2)^2(x-3) = -x(x-2)(x-3)$ 이고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-2+\frac{1}{k}\right) = 0$ 이 됩니다. $x = 0, 2, 3$ 에서 만나는데, $x = 2 - \frac{1}{k}$ 은 뭐죠? 이거랑 아까랑 같은 상황 아닐까요? $x = 2 - \frac{1}{k}$ 에서 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 만나긴 한다는 거잖아요.

일단 $k < 0$ 이니까 $2 - \frac{1}{k} > 2$ 입니다. 만나는 점은 $x > 2$ 에 있어요. 그러면 $2 \leq x \leq 3$ 부분을 집중해서 봐야 하겠는데요? 만나는 점이 이 범위 안에 있을지도 모르니까요.

만약 $x = 2 - \frac{1}{k}$ 라는 점이 $2 \leq x \leq 3$ 의 범위 안에 있다고 생각해 보세요. (여기 부분만 볼게요.)



이렇게 되고 작거나 같은 부분만 잘라서 $g(x)$ 를 그려보면



이렇게 됩니다. 여기서 미분불가능하잖아요!

(마찬가지로 식으로 해보면 $g(x)=\begin{cases} kx(x-2)^2(x-3) & \left(2 \leq x < 2-\frac{1}{k}\right) \\ -x(x-2)(x-3) & \left(2-\frac{1}{k} \leq x \leq 3\right) \end{cases}$ 이 되는 거죠. 각각 미분하고

$x=2-\frac{1}{k}$ 을 넣으면 $x < 2-\frac{1}{k}$ 에서 $g'(k-)=\frac{-(k+1)+(2k-1)+2(2k-1)(k+1)}{k^2}$ 이구요, $x > 2-\frac{1}{k}$ 에서

$g'(k+)=\frac{-(k+1)+(2k-1)+(2k-1)(k+1)}{k^2}$ 입니다. 지금 $\frac{(2k-1)(k+1)}{k^2}$ 만큼 차이가 나는데 이게 없어야

미분가능하죠. 따라서 $k=-1$ 가 아니면 미분불가능해요.

지금도 식으로 한 부분은 $x=2-\frac{1}{k}$ 가 $2 \leq x \leq 3$ 에 있을 때를 전제로 한 거예요. 자연스럽게

$2-\frac{1}{k} < x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq -x(x-2)(x-3)$ 가 되거든요.)

따라서 $x=2-\frac{1}{k}$ 라는 실근은 $k=-1$ 이거나 $2 < x < 3$ 의 범위 밖으로 나가야 합니다. 범위 밖에서 만나는 건

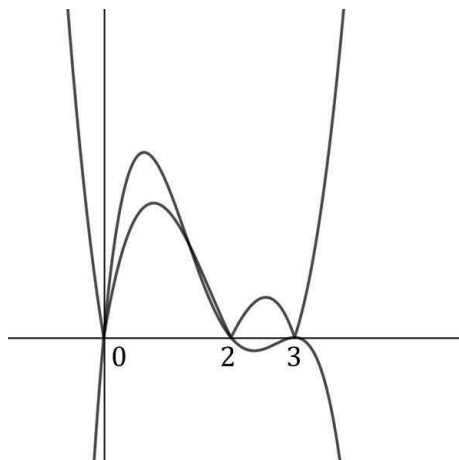
상관없어요. $2-\frac{1}{k} \geq 3$ 이고 $k \geq -1$ 입니다. 여기에도 $k=-1$ 가 포함되어 있네요? 아까 $k \geq -\frac{1}{2}$ 의 범위와

합치면 $k \geq -\frac{1}{2}$ 가 되네요.

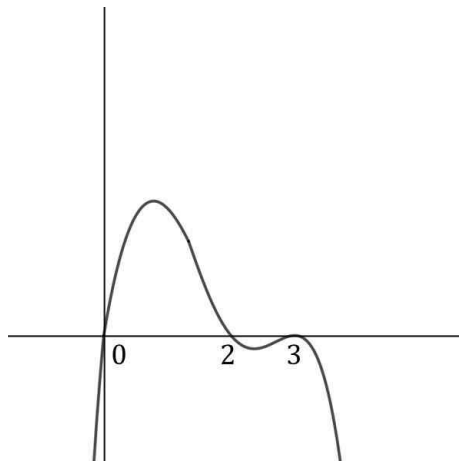
아무튼 $k \geq -\frac{1}{2}$ 이니까 $f(1)=-2k \leq 1$ 이고 $f(1)$ 의 최댓값은 1입니다. 선지에 없는 걸 보니까 이것도 아닌 것 같은데요?

3-3) $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$ 일 때

$f(x)$ 는 x 축과 $x=0, 2$ 에서 그냥 만나고 $x=3$ 에서 접하는 그래프입니다. $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 를 동시에 그리면



이렇게 되구요, 작거나 같은 부분만 잘라서 $g(x)$ 를 그리면



이렇게 됩니다. 이 그래프 역시 만나는 점에서 미분불가능해지군요.

근데 이 그래프는 좀 편할 거 같아요. $x > 2$ 에서 명백히 $f(x)$ 가 $|x(x-2)(x-3)|$ 보다 작아서 $g(x)=f(x)$ 이거든요. 그러니까 우리는 $0 < x < 2$ 에서만 확인하면 됩니다. 할 게 하나 줄었네요. 아까랑 똑같은 방법으로 가봅시다.

$0 < x < 2$ 에서 $|x(x-2)(x-3)| = x(x-2)(x-3)$ 이죠. 따라서 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 만나는 점을 찾기 위해서 $kx(x-2)(x-3)^2 = x(x-2)(x-3)$ 라 하고 정리하면 $kx(x-2)(x-3)\left(x-3-\frac{1}{k}\right) = 0$ 입니다. $x = 3 + \frac{1}{k}$ 만 확인하면 되겠군요.

이번엔 식도 생략하고 바로 갈게요. 지금 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 $x = 3 + \frac{1}{k}$ 라는 점에서 만나잖아요.

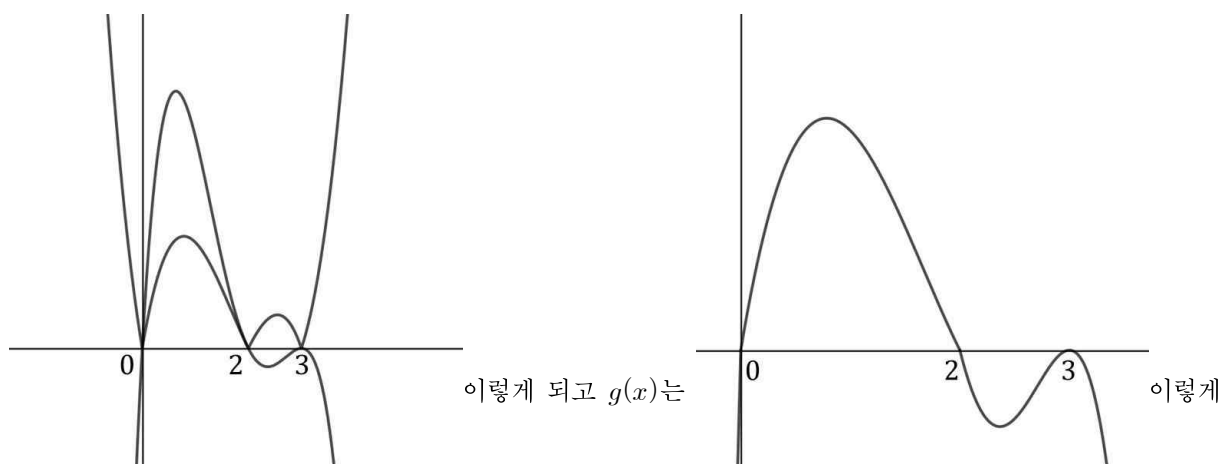
그런데 만나면 미분불가능해집니다. 따라서 $x = 3 + \frac{1}{k}$ 는 $0 < x < 2$ 의 범위 밖으로 벗어나야 해요.

$k < 0$ 이니까 $3 + \frac{1}{k} < 3$ 입니다. 따라서 $3 + \frac{1}{k} \geq 0$ 이거나 $3 + \frac{1}{k} \geq 2$ 이고 $k \geq -\frac{1}{3}$ 이거나 $k \leq -1$ 입니다.

어라? 왜 범위가 두 개 나오죠?

이 경우 문제가 이거예요. 범위가 두 개 나와요. 그럼 뭘 어찌라는 거죠?

다시 생각해봅시다. 지금 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 가 만나는 점인 $x = 3 + \frac{1}{k}$ 를 $0 < x < 2$ 의 범위 밖으로 보내버렸어요. 그러면 지금 $0 < x < 2$ 에서 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 는 만나는 점이 없습니다. 그 말은 계속 $f(x)$ 가 $|x(x-2)(x-3)|$ 보다 위에 있거나, 계속 아래에 있다는 이야기예요. 만나는 점이 없으니까요. 근데 $f(x)$ 가 위에 있다고 해보면



됩니다.

지금 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 미분불가능하잖아요. 양쪽의 미분계수가 다르기 때문이죠. 이런 일이 왜 발생하는 걸까요?

그림을 잘 보세요. $x=0$ 에서 미분계수가 $f(x)$ 가 더 크고 $x=2$ 에서 미분계수가 $f(x)$ 가 더 작죠? 더 가파르잖아요. 이 상황에서 각각의 미분계수를 구해봅시다. $x=0$ 에서 $|x(x-2)(x-3)|$ 의 우미분계수는 $x(x-2)(x-3)$ 의 미분계수인 6입니다. 그리고 $f(x)$ 의 미분계수는 $-18k$ 가 나오죠. 그리고 지금과 같은 상황에서는 $x=0$ 에서 $f(x)$ 의 미분계수가 더 크니까 $-18k > 6$ 이고 $k < -\frac{1}{3}$ 입니다.

그리고 $x=2$ 에서 $|x(x-2)(x-3)|$ 의 좌미분계수는 $x(x-2)(x-3)$ 의 미분계수인 -2 입니다. 그리고 $x=2$ 에서 $f(x)$ 의 미분계수는 $2k$ 이구요. $f(x)$ 가 더 작으니까 $2k < -2$ 이고 $k < -1$ 입니다. $k < -\frac{1}{3}$ 와 종합해보면 $k < -1$ 이네요. 어? 이거 어디서 본 적 있지 않나요? 아까 나왔던 두 개의 범위 중 하나잖아요! 아까 $k \geq -\frac{1}{3}$ 와 $k \leq -1$ 이렇게 2개가 나왔었잖아요. 그 중 $k < -1$ 이면 방금과 같이 미분불가능한 상황이 발생합니다.

그러면 $k = -1$ 이런요? 아까는 이것도 등호에 포함되어 있었잖아요. $x=0$ 에서 미분계수를 비교해보세요. 여전히 $f(x)$ 의 미분계수가 더 크죠? 다시 말해서 $0 < x < 2$ 에서 $f(x)$ 가 위에 있어서 $g(x)$ 를 구할 때 $x < 0$ 에서 더 작은 $g(x) = f(x)$ 였던 게 $0 < x < 2$ 에서는 $g(x) = x(x-2)(x-3)$ 으로 바뀐다는 이야기에요. $g(x)$ 는 더 작은 걸 선택하는 함수잖아요. 그 과정에서 $x=0$ 에서의 미분계수가 서로 다르니 미분불가능이 된 거구요.

따라서 $k = -1$ 이어도 되지 않고 $k \geq -\frac{1}{3}$ 입니다. $f(1) = -4k \leq \frac{4}{3}$ 이니까 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이네요. 답은

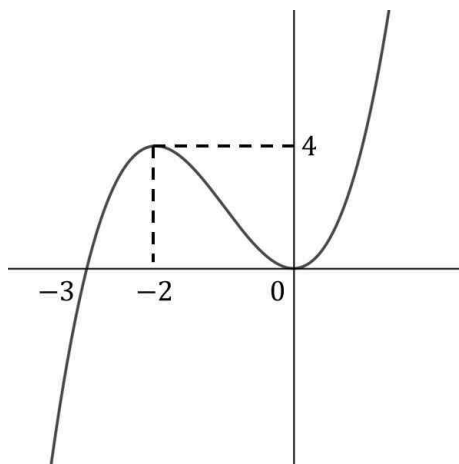
②번입니다.

14. 정답 9

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 정수 보이면 숫자 넣을 준비

$f(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$ 가 있어요. x 축과 $x=0$ 에서 접하고 $x=-3$ 에서 그냥 만나는 그래프이죠?

삼차함수의 비율 관계를 사용하면 변곡점의 x 좌표는 $x=-1$ 이고 극대점의 x 좌표는 $x=-2$ 입니다. 극댓값은 4네요.



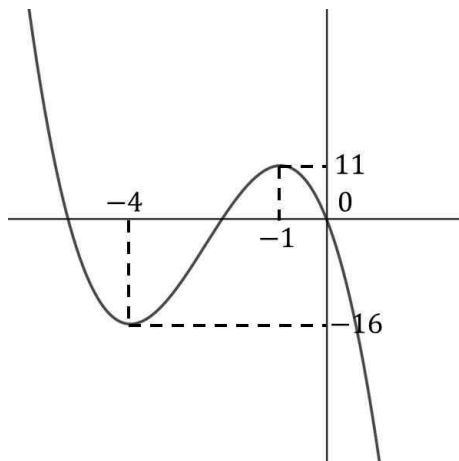
이렇게 됩니다.

a 가 정수라고 하네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

2) 조건해석

(가)조건에서 $(-4, a)$ 를 지나고 $y=f(x)$ 에 접하는 직선이 세 개가 있다고 합니다. 접점의 좌표를 일단 $(t, f(t))$ 라 하면 서로 다른 t 가 3개가 있어야 하죠? 그래야 모두 다른 접점에서 접하게 될 테니까요. 접선은 $y = f'(t)(x-t) + f(t) = (3t^2 + 6t)x - 2t^3 - 3t^2$ 입니다. 이 직선이 $(-4, a)$ 를 지나야 하니까 $-2t^3 - 15t^2 - 24t = a$ 입니다. 결국 $y = -2t^3 - 15t^2 - 24t$ 와 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하는 거예요.

일단 접할 때를 확인해야겠죠? 미분하면 $-6t^2 - 30t - 24 = -6(t^2 + 5t + 4) = -6(t+1)(t+4)$ 이니까 $t = -4$ 에서 극소, $t = -1$ 에서 극대입니다. 극솟값은 -16 , 극댓값은 11 입니다.



이렇게 되네요. 이 함수와 $y = a$ 가 세 개의 점에서 만나려면 a 가

-16 과 11 사이에 있어야겠죠? 따라서 $-16 < a < 11$ 입니다.

(나)조건에서 세 접선의 기울기의 곱이 음수라고 합니다. 음...

일단 접점의 좌표인 t 는 $y = -2t^3 - 15t^2 - 24t$ 와 $y = a$ 의 교점의 t 좌표예요. 그리고 접선의 기울기는

$f'(t) = 3t^2 + 6t = 3t(t+2)$ 이구요. $y = -2t^3 - 15t^2 - 24t$ 와 $y = a$ 의 교점을 t_1, t_2, t_3 이라 하면

$f'(t_1) \times f'(t_2) \times f'(t_3) < 0$ 이어야 하죠?

그럼 천천히 확인해 보자구요. $f'(t) = 3t^2 + 6t = 3t(t+2)$ 는 $t = 0, -2$ 에서 t 축과 만나고 축이 $t = -1$ 인

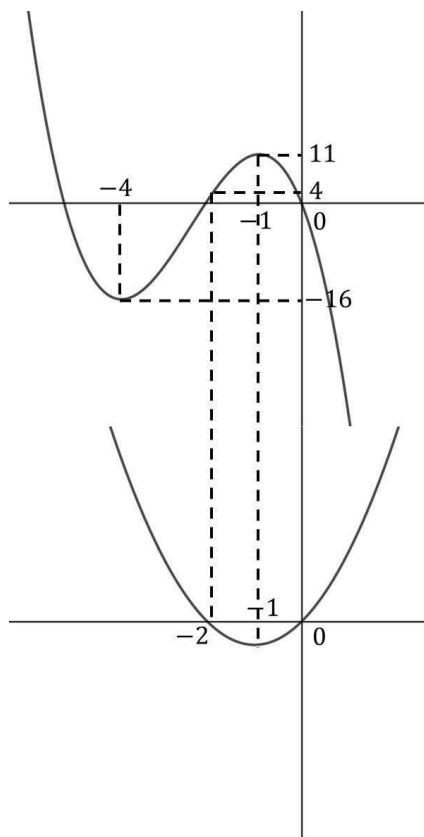
함수입니다. 여기서 $y = -2t^3 - 15t^2 - 24t$ 에 $y = a$ 를 긋고 만나는 점을 그대로 $f'(t)$ 에 내려서 부호를

확인해보면 되겠죠. 일단 $f'(t) > 0$ 이 되는 t 는 $t > 0, t < -2$ 이구요, $f'(t) < 0$ 가 되는 t 는

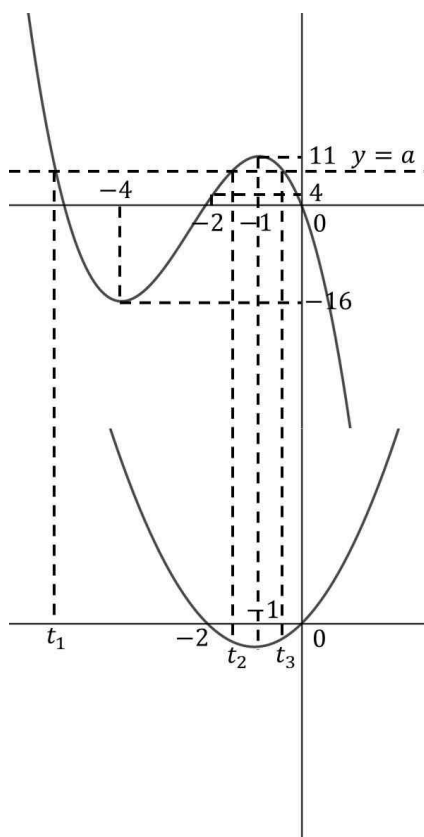
$-2 < t < 0$ 입니다.

그러면 $y = -2t^3 - 15t^2 - 24t$ 에서 $t = -2$ 의 값도 확인해봐야 하지 않을까요? 그래야 $y = a$ 와의 실근이

$f'(t)$ 의 부호가 바뀌는 지점인 $t = -2$ 보다 큰지 작은지를 확인할 수 있으니까요. 함숫값은 4입니다.



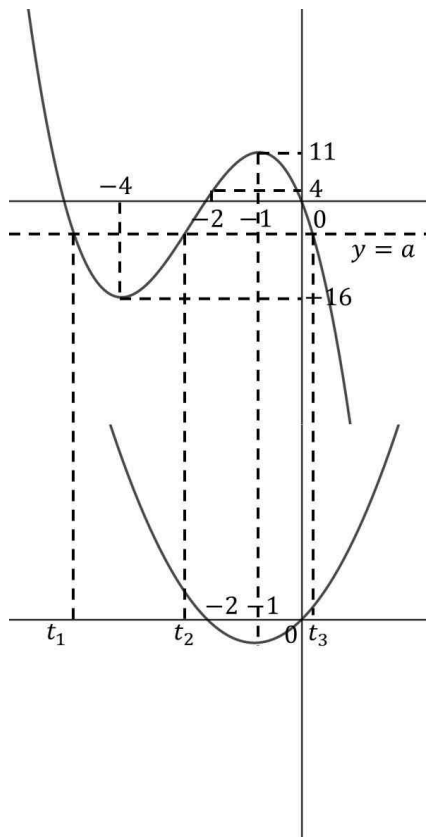
이렇게 됩니다. 만약 $y = a$ 가 4보다 크다면



이렇게 됩니다. $f'(t_1) > 0$, $f'(t_2) < 0$, $f'(t_3) < 0$ 이니까 다 곱하면 양수가

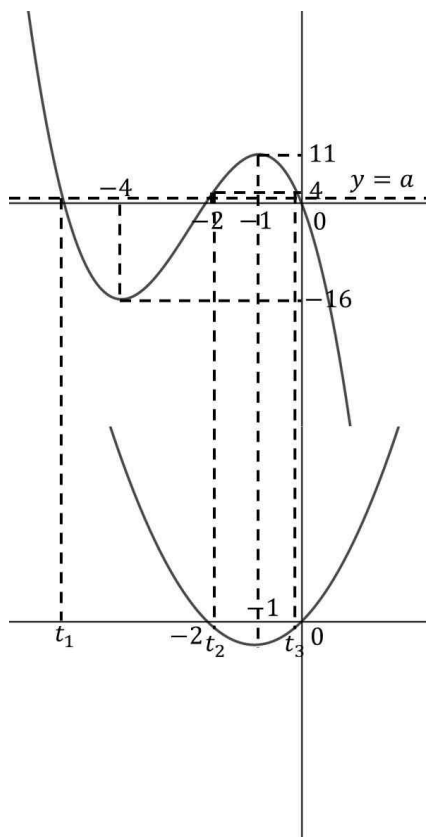
나오죠? 이 경우는 안 됩니다.

$a = 4$ 가 되면 그냥 $f'(t_2) = 0$ 이니까 곱해서 음수가 될 리가 없죠.



이렇게 $a < 0$ 이 되면요? 이러면 $f'(t_1) > 0$, $f'(t_2) > 0$, $f'(t_3) > 0$ 이니까

곱하면 양수가 됩니다. 따라서 $0 < a < 4$ 이어야 하네요. 이러면



이렇게 $f'(t_1) > 0$, $f'(t_2) > 0$, $f'(t_3) < 0$ 이 되니까 곱하면 음수가 되겠죠?

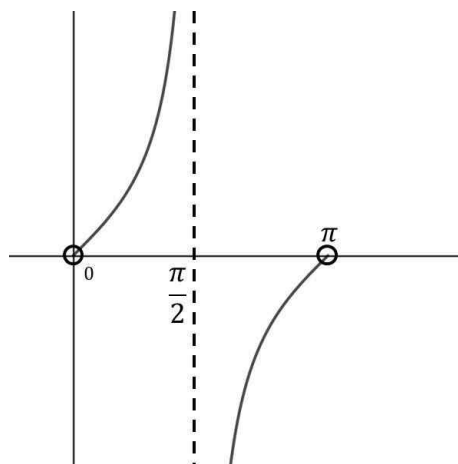
3) 정수 보이면 숫자 넣기

a 가 정수였잖아요? $0 < a < 4$ 에서 정수는 $a = 1, 2, 3$ 입니다. 최댓값은 $M = 3$ 이네요. $M^2 = 9$ 입니다.

15. 정답 2

1) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

일단 $f(x)$ 이거부터 그려볼까요?



이렇게 그릴 수 있겠죠? 계속 갑시다.

2) 조건해석, 함수극한은 위아래 식 차수, 계수 비교

(가)조건을 해석해봅시다. 절댓값만 없었다면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수라는 말이네요. 그런데 절댓값이 있잖아요? 그러면 결국 $g(x)$ 는 이차함수이고 최고차항의 계수는 1 아니면 -1 이라는 말이 되겠어요.

(나)조건으로 가볼까요? $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} g(f(x)) = \infty$ 이게 뭘까요? α 가 $\frac{\pi}{3}$ 이런 거였으면 $f(x)$ 의 값이 정해지고 그에 따라 $g(x)$ 의 값도 정해져요. 그러니까 극한값이 ∞ 이 아닌 어떤 상수로 표현이 된다는 의미예요. 그런데 극한값이 ∞ 이 되어버렸네요.

그러면 α 가 어떤 수여야 할까요? 그런데 저 $f(x)$ 의 그래프에서 눈에 띄는 수가 하나 있죠. $x = \frac{\pi}{2}$ 이거

말이에요. α 가 $\frac{\pi}{2}$ 이라면 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$ 이 돼요. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 보다 작은 곳에서의 $f(x)$ 의

함숫값인데 저기 보면 무한대로 발산하잖아요. 그 무한대가 $g(x)$ 의 x 값으로 들어간다고 생각해보세요. $g(x)$ 는

최고차항의 계수가 -1 또는 1 인 2차함수이니까 ∞ 로 발산하거나 $-\infty$ 로 발산하겠죠? 다시 말하면

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$ 이니까 이 ∞ 를 $g(x)$ 의 함숫값으로 넣으면 $g(\infty) = \infty$ 가 될 거라는 거죠. (물론 저런 표현은

없지만 합성함수에서 극한을 보내는 것이 이해하기 어려운 분들을 위해 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 를 저렇게

표현한 거예요.)

그런데 만약 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이라면 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x))$ 은 $-\infty$ 로 발산하게 될 거예요. 그런데 ∞ 로

발산한다고 나와 있네요. 따라서 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 입니다.

3) 문제해석 - 합성함수는 치환

이제 (다)조건으로 가봅시다. $g(x)$ 에 어떤 x 값을 집어 넣어야 $g(x)$ 의 함숫값을 $f(x)$ 에 집어넣어서 0 을 만들 수 있을까요? 일단 $g(x) = k$ 라고 해볼까요? 그러면 $f(k) = 0$ 이 되네요. 이걸 만족하는 k 는 $f(x)$ 의 그래프에 0 밖에 없네요. 이제는 $g(x) = 0$ 이 되는 x 값을 찾아야 되겠네요. 그래야 $g(x) = 0$ 이 되고 그 0 을 $f(x)$ 에 집어넣어서 $f(0) = 0$ 을 만들죠. 그런데 그 x 값이 0 과 $2\alpha = \pi$ 라네요. 그러면 끝났네요.

4) 함수 구하기 - 인수정리

$g(x) = 0$ 의 두 서로 다른 실근이 0 과 π 이니까 인수정리에 의해 $g(x)$ 는 x 와 $(x - \pi)$ 라는 인수를 적어도 하나 갖는데 $g(x)$ 는 2차함수이니까 $g(x) = x(x - \pi)$ 라고 할 수 있겠네요. 마지막 $g(4\alpha)$ 를 구해봅시다. $2\alpha = \pi$ 이니까 $g(4\alpha) = g(2\pi)$ 이고 $g(x)$ 에 $x = 2\pi$ 를 넣으면 $2\pi^2$ 가 되겠네요. $a = 2$ 입니다.

16. 정답 15

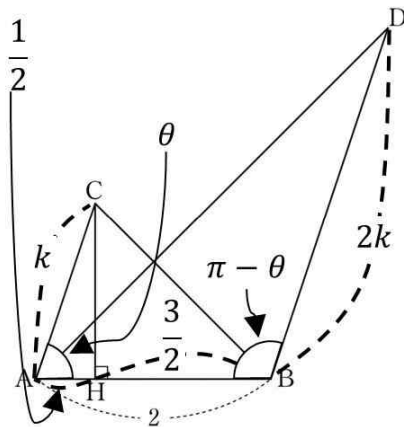
1) 그림 있으면 그림 보면서,

그림이 있네요. 그리고 $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} // \overline{BD}$, $\overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2$ 이라고 합니다. 거기에 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1 : 3$ 으로 내분한다고 합니다. 이거 다 표시좀 해볼까요?

일단 H가 선분 AB를 $1 : 3$ 으로 내분한다고 하니까 $\overline{AH} = \frac{1}{2}$, $\overline{HB} = \frac{3}{2}$ 입니다. 그리고 $\overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2$ 이니까

$\overline{AC} = k$ 라 하면 $\overline{BD} = 2k$ 입니다.

거기에 AC와 BD가 평행하잖아요? 그러면 $\angle CAB$ 와 $\angle ABD$ 을 합치면 π 가 되겠네요. $\angle CAB = \theta$ 라 하면 $\angle ABD = \pi - \theta$ 입니다.



이렇게 되겠네요.

2) 외부

그리고 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , R 라 할 때,

$4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이라고 합니다. 외접원의 반지름의 길이라고 하니까 사인법칙이 생각나죠?

그런데 우리가 알고 있는 작은 $\angle CAB$ 와 $\angle ABD$ 이예요. 이걸로 표현해야겠죠? 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2r, \quad \frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = 2R \text{입니다. 각 변환을 할 수 있겠네요?}$$

$\sin(\pi - \theta)$ 에서 π 가 있으니까 축은 $x < 0$ 부분의 x 축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ 만큼 시계방향으로

움직이면 사인값은 y 값인데 양수가 나오죠. 따라서 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ 입니다. $R^2 = \frac{\overline{AD}^2}{4\sin^2 \theta}$, $r^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4\sin^2 \theta}$ 가

되겠네요. $4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 에 다 넣어보면 $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ 가 됩니다.

사인값이 각 변환되는 것을 보니 코사인값도 각 변환이 될 것 같은데요? 가봅시다. $\cos(\pi - \theta)$ 에서 π 가 있으니까 축은 $x < 0$ 부분의 x 축을 설정하구요, 축으로부터 예각인 θ 만큼 시계방향으로 움직이면 코사인값은 x 값인데 음수가 나오네요. 따라서 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ 입니다.

코사인값이 나왔으니까 코사인법칙까지 사용하면 되겠네요.

$$\cos \theta = \frac{k^2 + 4 - \overline{BC}^2}{4k}, \quad \cos(\pi - \theta) = \frac{4k^2 + 4 - \overline{AD}^2}{8k} = -\cos \theta \text{입니다. 그런데 지금 그림을 보면}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2k} \text{이잖아요? 따라서 } \overline{BC}^2 = k^2 + 2, \quad \overline{AD}^2 = 4k^2 + 8 \text{입니다. } \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51 \text{에 넣으면}$$

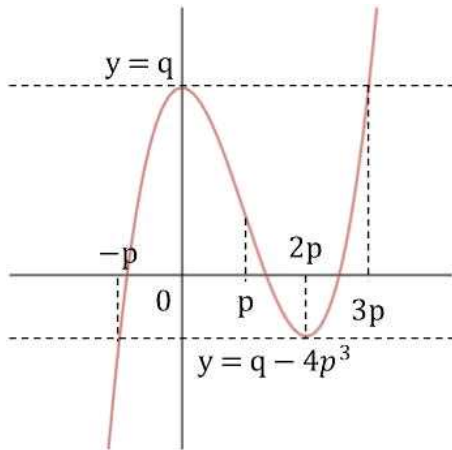
$k^2 = 15$ 가 나오네요. $\overline{AC} = k$ 라고 했잖아요? 따라서 $k^2 = \overline{AC}^2 = 15$ 입니다.

17. 정답 14

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 삼차함수의 비율관계

$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$ 가 있네요. 관찰부터 해봅시다. 인수분해는 안 되는 것 같구요, 미분하면

$f'(x) = 3x^2 - 6px = 3x(x - 2p)$ 이니까 $x = 0$ 에서 극대, $x = 2p$ 에서 극소입니다. 극댓값은 q 이고 극솟값은 $q - 4p^3$ 이네요. 변곡점의 x 좌표는 $x = p$ 입니다. 대충 그림 그려보면



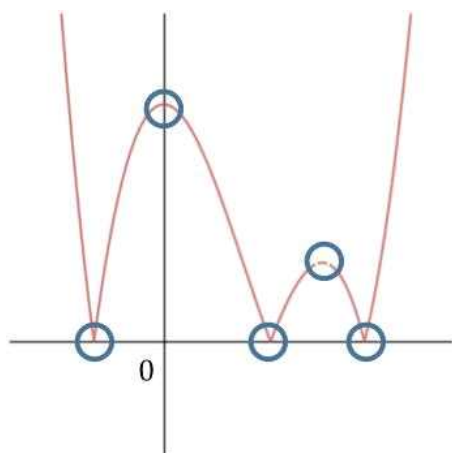
이렇게 됩니다. $x = 3p$ 랑 $x = -p$ 는 왜 나왔는지 설명 안 해도 알죠?

접선과 함수가 만나는 점점과 교점의 x 좌표의 1:2내분점은 변곡점의 x 좌표라는 거 이용해서 구한 거예요.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기, 조건해석, 절댓값 함수

그리고는 p, q 가 25이하의 자연수라고 합니다. 그러면 숫자 넣을 준비를 하고 있어야겠죠?

(가)조건에서 $|f(x)|$ 의 극점이 5개라고 합니다. 이거는 절댓값 씌워서 접어 올려봐야겠는데요? 지금 저 그림부터 접어 올려봅시다.



5개의 점에서 극점을 가지는데요? 되네요. 지금 그래프는 극소점이 x 축

아래로 내려가서 접어 올렸을 때 x 축과 만나는 3개의 점+이미 있던 극대점, 극소점 해서 5개의 극점을 갖게 되었어요. 그러면 결국 극소점이 x 축 아래로 내려가야겠네요. 따라서 극솟값이 x 축 아래여야 하니까

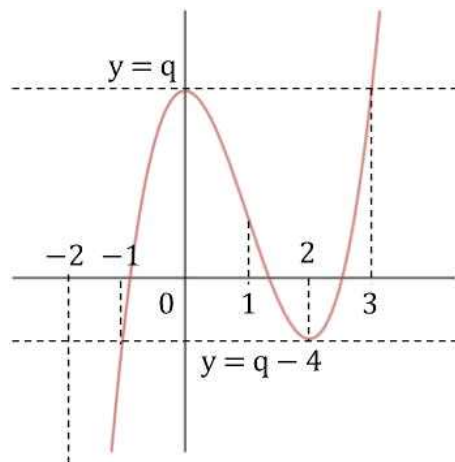
$q - 4p^3 < 0$ 이고 자연수니까 $0 < q < 4p^3$ 입니다.

(나)조건에서 $|f(x)|$ 의 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 최댓값과 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값이 같다고 합니다. 이것도
 그려봐야 알겠는데요?

어... 그런데 지금 그래프는 $x=p$ 에서 변곡점, $x=2p$ 에서 극소점 이런식으로 나뉘어져 있잖아요. $x=1$ 은
 어디에 포함되는 거죠? $x=2$ 는요? 이거 때문에 그래프를 그리는 게 불가능해요. 그럼 어찌죠?
 아까 p 가 자연수라고 했잖아요. 그럼 그냥 넣어보면 되죠. 넣어봅시다.

3-1) $p=1$ 일 때

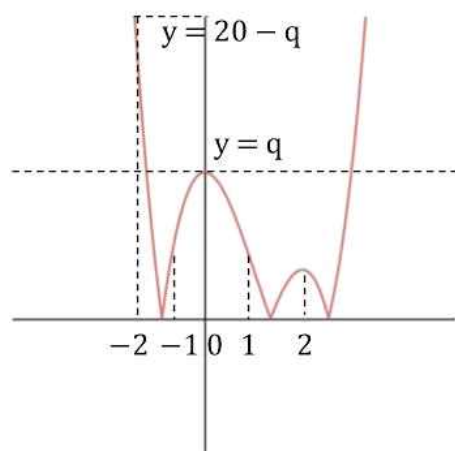
$p=1$ 이면 $f(x)=x^3-3x^2+q$ 이구요. $x=1$ 에서 변곡점, $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은 $q-4$ 입니다. 그리고
 $0 < q < 4p^3$ 니까 $0 < q < 4$ 이네요.



이렇게 됩니다. 이제 접어 올려야 하는데.... 문제가 있네요. 극댓값과

접어 올린 극솟값 중 어느 게 더 큰 거죠?

그런데 그걸 따져보지 않아도 되겠네요. $f(-2)=q-20$ 이잖아요. $q < 4$ 라고 했으니까 음수이죠? 절댓값 씌우면
 $20-q$ 입니다. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값은 $20-q$ 이예요. 이 범위 내에 함수를 잘 관찰해보세요. 극댓값인 q 도
 최대 3이구요, 극솟값인 $q-4$ 를 접어 올린 $4-q$ 도 최대 3입니다. 반면 $20-q$ 은 최대 17이죠. 그러니까

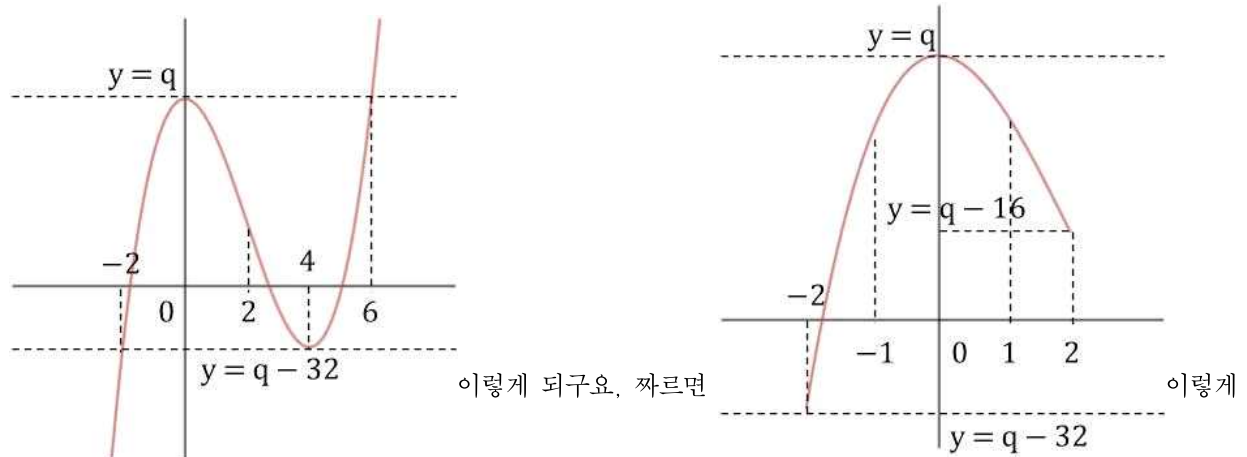


그림이 이렇게 되어서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서의 최댓값과

$-2 \leq x \leq 2$ 에서의 최댓값이 같을 수가 없어요. $p=1$ 일 때는 조건에 맞지 않습니다.

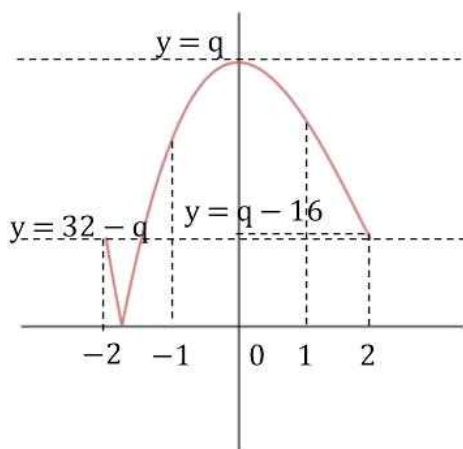
3-2) $p = 2$ 일 때

$p = 2$ 일 때 $f(x) = x^3 - 6x^2 + q$ 이구요, $x = 2$ 에서 변곡점, $x = 4$ 에서 극소이고 극솟값은 $q - 32$ 입니다. 그리고 $0 < q < 4p^3$ 니까 $0 < q < 32$ 이네요. 그런데 q 는 25이하의 자연수니까 $0 < q \leq 25$ 라고 할게요. 나중에 헷갈릴 것 같아요. 그리고 이번에는 그래프를 $-2 \leq x \leq 2$ 범위에서 짜를게요. 어차피 판 부분은 볼 필요가 없으니까요. 그러면 범위의 경계인 $x = 2$ 에서 함숫값도 구해봅시다. $f(2) = q - 16$ 이네요. 그래프는 대충



됩니다.

이때 절댓값 씌우고 $-1 \leq x \leq 1$ 과 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값을 비교해야 하잖아요. 그런데 $f(x)$ 의 최댓값인 q 와 최솟값인 $q - 32$ 중 접어 올렸을 때 어느 게 더 큰가요? 만약 q 가 크다면

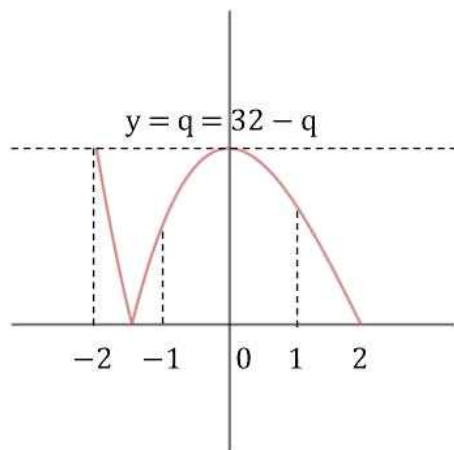


그래프는 이렇게 됩니다. 이러면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 최댓값은 q 이고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값도 q 네요. 같죠!

이거 q 를 구해봅시다. 일단 최댓값인 q 가 최솟값인 $q - 32$ 를 접어 올린 $32 - q$ 보다 크잖아요? 따라서 $q > 32 - q$ 이고 $q > 16$ 입니다. 일단 $16 < q \leq 25$ 에서는 되네요.

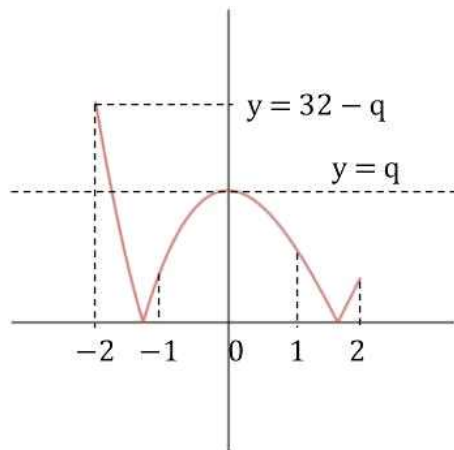
그럼 같으면요?



이렇게 되네요. 이것도 가능하잖아요! $-1 \leq x \leq 1$ 에서 최댓값도 q 이고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값도 q 입니다. $q = 32 - q$ 이고 $q = 16$ 이네요. $q = 16$ 일 때 가능합니다.

그러면 최솟값을 접어 올린 $32 - q$ 가 더 크면요?



이렇게 됩니다. 이러면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 최댓값과 $-2 \leq x \leq 2$ 에서

최댓값이 다른데요? $-1 \leq x \leq 1$ 에서는 q 이고(범위에 따라서 아닐 수도 있습니다. 여기서는 다르다는 것을

보여주기 위해서 q 로 설정한 거예요. 예를 들어 $q = 7$ 이라면 $x = 0$ 에서 함수값 $f(0) = |f(0)| = 7$ 보다

$x = 2$ 에서 접어 올린 $|f(2)| = 9$ 가 더 커요.) $-2 \leq x \leq 2$ 에서는 $32 - q$ 이잖아요. 따라서

$q < 32 - q$ ($q < 16$)일 때는 안 됩니다.

정리해보면 $p = 2$ 일 때는 $16 \leq q \leq 25$ 이어야 합니다. 총 10개가 있네요.

3-3) $p = 3$ 일 때

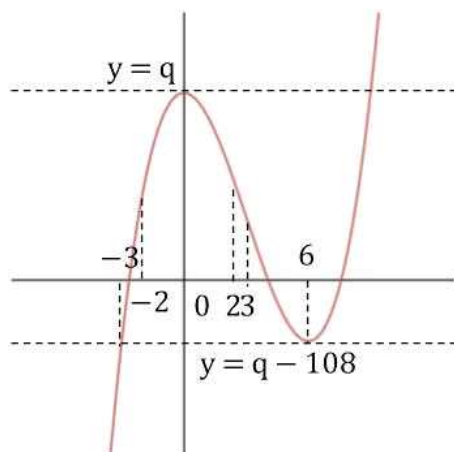
$p = 3$ 일 때 $f(x) = x^3 - 9x^2 + q$ 이고 $x = 3$ 에서 변곡점, $x = 6$ 에서 극소이고 극솟값은 $q - 108$ 입니다.

$0 < q < 4p^3$ 니까 $0 < q < 108$ 이지만 q 는 25이하의 자연수니까 $0 < q \leq 25$ 이네요. 이번엔 약간 다른데요?

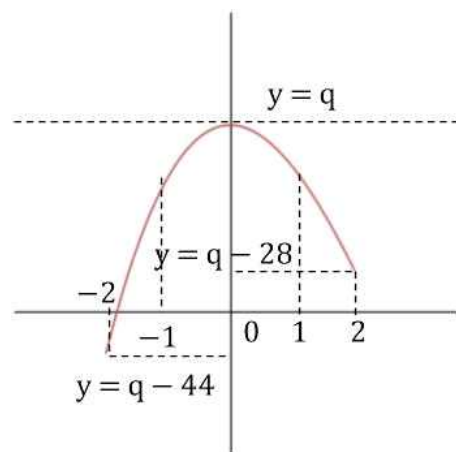
$-2 \leq x \leq 2$ 범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x = 2$ 에서 함수값도 구해보면 $f(2) = q - 28$ 이네요. 그런데

이번에는 $x = -2$ 에서 함수값도 구해야겠어요. $x = -2$ 에서 극솟값과 겹치지 않잖아요. $f(-2) = q - 44$ 입니다.

그래프는 대충



이렇게 되고 짜르면



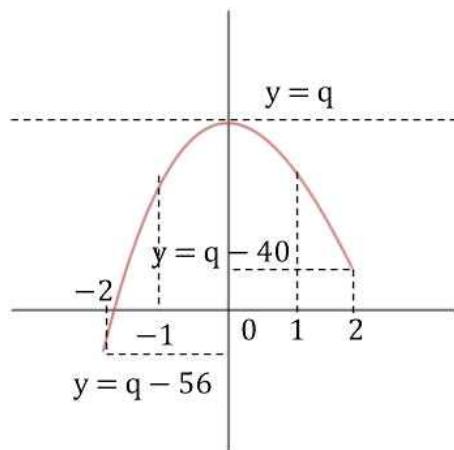
이렇게

되네요.

아까 $p = 2$ 랑 똑같은 상황입니다. $|f(x)|$ 의 최댓값이 같으려면 현재 $f(x)$ 의 최댓값인 q 가 최솟값을 접어 올린 $44 - q$ 보다 크거나 같아야 하죠. 따라서 $q \geq 44 - q$ 해서 $q \geq 22$ 입니다. 따라서 $22 \leq q \leq 25$ 이고 가능한 q 는 4개가 있네요.

3-4) $p = 4$ 일 때 ($p \geq 4$ 일 때)

$p = 4$ 일 때 $f(x) = x^3 - 12x^2 + q$ 입니다. $0 < q \leq 25$ 이구요. $-2 \leq x \leq 2$ 범위에서 짜르고 범위의 경계인 $x = 2$ 와 $x = -2$ 에서 함숫값도 구해보면 $f(2) = q - 40$ 이고 $f(-2) = q - 56$ 입니다. 그래프는 대충



이렇게 되네요. 따라서 현재 $f(x)$ 의 최댓값인 q 가 최솟값을 접어 올린

$56 - q$ 보다 크거나 같아야 하니까 $q \geq 56 - q$ 해서 $q \geq 28$ 인데... $0 < q \leq 25$ 의 범위를 애초에 넘어서는데요? p 가 이거보다 커지면 최솟값인 $f(-2)$ 는 더 작아지겠죠. $f(-2) = q - 12p - 8$ 인데 p 가 커지면 점점 더 작아지잖아요. 그러면 자연스럽게 $q \geq 12p + 8 - q$ ($q \geq 6p + 4$)에서 $6p + 4$ 는 더 커질 거예요. $0 < q \leq 25$ 의 범를 벗어나게 되는 거죠. 따라서 $p \geq 4$ 일 때는 가능한 (p, q) 가 없습니다.

지금까지 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $p = 2$ 일 때 10개, $p = 3$ 일 때 4개해서 $10 + 4 = 14$ 입니다.

18. 정답 13

1) 조건해석, 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a 는 첫항, d 는 공차)로 놓기

$\{a_n\}$ 이 등차수열인데 공차가 양수랍니다! 그러면 일단 $a_n = a + (n-1)d$ ($d > 0$)이라고 하면 되겠죠?

(가)조건에서 $|a_5| = a_6$ 이라고 하네요. 생각을 좀 해봅시다. 아까 공차가 양수라고 했죠? 그러면 무조건

$a_5 < a_6$ 이어야 해요. 그런데 a_5 에 절댓값을 씌우면 같아지네요. $a_5 = a_6$ 일 수는 없으니까 $-a_5 = a_6$ 이

되어야겠어요. $a_5 = a + 4d$, $a_6 = a + 5d$ 이니까 $-a - 4d = a + 5d$ 이고 $a = -\frac{9}{2}d$ 이네요.

$$a_n = \left(n - \frac{11}{2}\right)d \quad (d > 0) \text{입니다.}$$

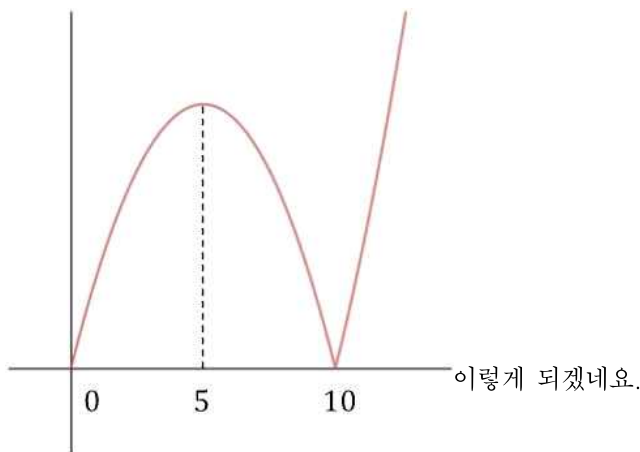
2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 절댓값 함수, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

(나)조건에서 $|S_n| = 24$ 를 만족시키는 자연수 n 이 3개가 있네요. 일단 S_n 부터 구해볼까요? 등차수열의 합

$$\text{공식에 의하여 } S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n = \frac{d}{2}n(n-10) \text{입니다.}$$

여기에 절댓값을 씌운 값이 24가 되는 자연수 n 이 3개가 있단가요? 음...

그런데 이거 뭔가 이차함수와 비슷하지 않나요? 최고차항의 계수가 양수인, $x(n)$ 축과 $n=0$, $n=10$ 에서 만나고 대칭축이 $n=5$ 인 이차함수인 거죠. 그러니까 대충



3) 자연수 보이면 숫자 넣기

아니 그런데 이 $y = |S_n|$ 이라는 함수와 3개의 점에서 만나는 직선은 매우 많은데요? 그림을 보세요!

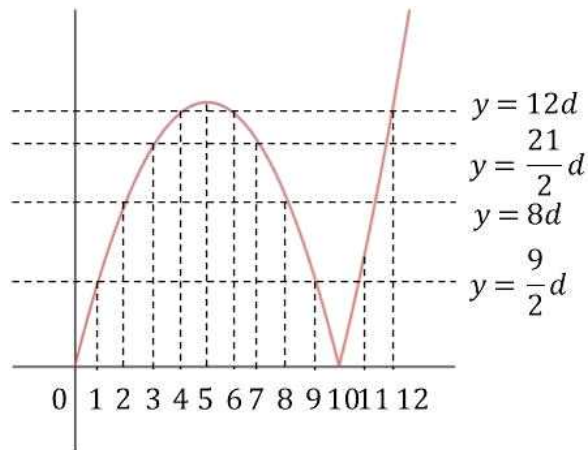
“자연수”라고 했잖아요. 그럼 천천히 넣어봐야죠. 일단

$$|S_1| = |S_9| = \frac{9}{2}d, \quad |S_2| = |S_8| = 8d, \quad |S_3| = |S_7| = \frac{21}{2}d, \quad |S_4| = |S_6| = 12d, \quad |S_5| = \frac{25}{2}d \text{입니다. 음...}$$

$n > 10$ 일 때를 해봅시다. $|S_{11}| = \frac{11}{2}d$ 인데 뭐 같은 값을 가지는 게 없네요. 그리고 $|S_{12}| = 12d$ 입니다. 어?

이거 아까 봤잖아요! $|S_4| = |S_6| = |S_{12}| = 12d$ 이네요.

그리고 $|S_{13}| = \frac{39}{2}d$ 이니까 여기부터는 3개의 점에서 만날 수가 없게 되네요. 그러니까



이렇게 되겠네요!

이렇게 되면 3개의 점에서 만나는 건 $n = 4, 6, 12$ 일 때 $|S_4| = |S_6| = |S_{12}| = 12d$ 만 있어요. 이게 24가 되어야겠죠? 따라서 $12d = 24$ 이고 $d = 2$ 입니다.

$a_n = 2n - 11$ 이니까 $a_{12} = 13$ 이네요.

19. 정답 ②

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n|a_{n+1} = a_{n+1}$ 이고 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$ 입니다.

일단 먼저 $|a_n|a_{n+1} = a_{n+1}$ 부터 볼게요. a_{n+1} 을 넘기고 정리하면 $a_{n+1}(|a_n| - 1) = 0$ 이죠? 따라서

$a_{n+1} = 0$ 이거나 $|a_n| = 1$ 이어야 합니다. 절댓값을 풀면 $a_{n+1} = 0$ 이거나 $a_n = -1$ 이거나 $a_n = 1$ 이어야 한다는 거죠.

그리고 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$ 는 뭐... n 번째 항의 값과 $n+2$ 번째 항의 값을 곱하면 0이거나 음수여야 한다는 거네요. 이건 나중에 봐야할 것 같아요.

아래에 $a_n = n^2$ 을 만족시키는 자연수 n 이 1개 있고 $a_3 = 1$, $a_6 = 0$ 입니다. 어? 방금 $a_{n+1} = 0$ 이거나

$a_n = -1$ 이거나 $a_n = 1$ 이어야 한다고 했었잖아요. n 에 숫자를 막 집어 넣어볼까요? $n = 2$ 를 넣으면

$a_3 = 0$ 이거나 $a_2 = -1$ 이거나 $a_2 = 1$ 이어야 합니다. 그런데 지금 a_3 은 0이 아니라 1이잖아요? 그러면 무조건

a_2 는 -1 이거나 1 이어야 합니다.

그런데 $n = 1$ 을 넣으면 $a_2 = 0$ 이거나 $a_1 = -1$ 이거나 $a_1 = 1$ 이어야 하죠. 방금 a_2 는 -1 이거나 1 어야 한다고 했잖아요. 0 은 아니니까 a_1 역시 마찬가지로 -1 이거나 1 이어야 하겠네요.

이번엔 위로도 올라가봅시다. $n = 3$ 을 넣으면 $a_4 = 0$ 이거나 $a_3 = -1$ 이거나 $a_3 = 1$ 이어야 합니다. 그런데 이미 $a_3 = 1$ 이네요. 그러면 a_4 는 꼭 0 이 아니어도 되겠어요. 이미 $a_4(|a_3| - 1) = 0$ 가 성립하잖아요. 이것은 둘 중 하나만 성립하면 나머지는 성립하든 아니든 상관없는 거니까요.

그리고 $n = 5$ 를 넣으면 $a_6 = 0$ 이거나 $a_5 = -1$ 이거나 $a_5 = 1$ 이어야 하는데 이미 $a_6 = 0$ 이니까 이것도 마찬가지로 a_5 는 반드시 -1 또는 1 일 필요는 없습니다.

하지만 $n = 4$ 를 넣으면 $a_5 = 0$ 이거나 $a_4 = -1$ 이거나 $a_4 = 1$ 이어야 합니다. 둘 중 하나는 만족시켜야 해요. 이러면 케이스가 나뉘겠네요.

$n = 6$ 을 넘어버리면 모든 항의 값이 0 이 되어야 합니다. $a_7 = 0$ 이거나 $a_6 = -1$ 이거나 $a_6 = 1$ 이어야 하는데 $a_6 = 0$ 이니까 $a_7 = 0$ 이구요, 나머지들도 마찬가지로 다 0 이 됩니다.
 뭐 아무튼 케이스를 나누기 전에 대략적으로 정리 좀 해봅시다.

1	1	1		0	0
-1	-1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

2) 케이스 분류

2-1) $a_4 = -1$ 이거나 $a_4 = 1$ 일 때

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	1	1		0
-1	-1		-1		

일단 $a_3 = 1$ 인데 $a_n \times a_{n+2} \leq 0$ 에 의하여 $a_1 \times a_3 \leq 0$ 이니까 $a_1 = -1$ 이어야죠? 곱해서 0 이거나 음수가 되어야 하잖아요.

그리고 $a_n = n^2$ 을 만족시키는 자연수 n 이 하나 있어야 합니다. 지금 표를 보면 대충 $n = 5$ 에서 성립해야 할 것 같은 느낌이 들죠? $n = 6$ 이후부터는 계속 0이니까 상관없구요, $a_1 = -1$ 이니까 성립 안 하고 a_2, a_3, a_4 는 아예 숫자가 벗어났잖아요.

그런데 $a_3 = 1$ 이고 $a_3 \times a_5 \leq 0$ 이니까 a_5 는 0 또는 음수가 나와야 하지 않나요? $a_n = n^2$ 가 성립하는 자연수 n 이 없네요.

2-2) $a_5 = 0$ 일 때

1	1	1		0	0
- 1	- 1				
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

아까랑 마찬가지로 $a_1 = -1$ 입니다. 그리고 $a_n = n^2$ 을 만족시키는 자연수 n 이 하나 있어야 하는데 표를 보면 관련 있는 건 $n = 4$ 뿐이네요. $a_1 = -1$ 이고, a_5 부터는 계속 0이고, a_2 와 a_3 는 아예 숫자가 관련이 없구요. $a_4 = 16$ 입니다.

그리고 $a_2 \times a_4 \leq 0$ 이어야 하죠? $a_2 = -1$ 입니다. 결국

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
- 1	- 1	1	16	0	0

이렇게 되어야 하겠네요. $\sum_{n=1}^5 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$ 입니다. 답은 ②번이네요.

20. 정답 ②

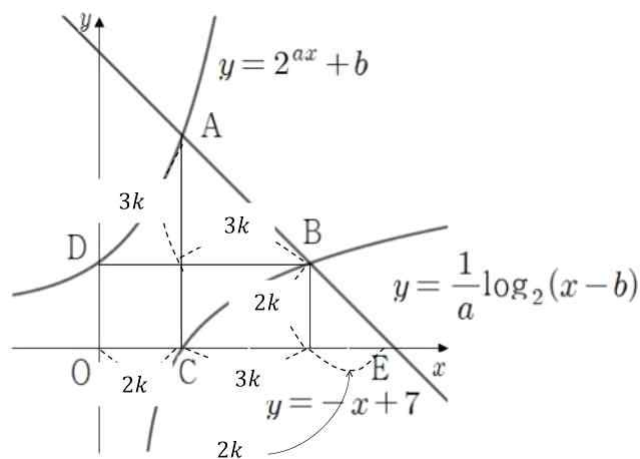
1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

그림에 대충 다 나와 있는 것 같네요. $y = -x + 7$ 가 있는데 애가 $y = 2^{ax} + b$ 와 만나는 점이 A,

$y = \frac{1}{a} \log_2(x - b)$ 와 만나는 점이 B랍니다. 그리고 A에서 x 축에 내린 수선의 발이 C인데 이 점은

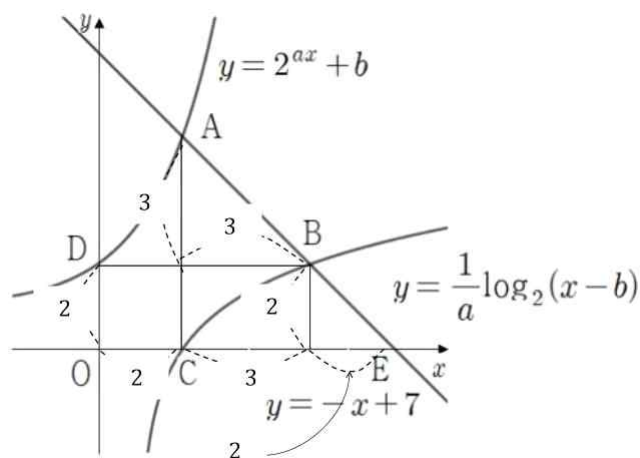
일단 E의 좌표는 알겠어요. E(7, 0)이네요. 그리고 나머지는..... 일단 다른 조건부터 봅시다. 함부로 좌표를 잡지 말라고 했잖아요?

점을 F라 하면 $\overline{AB} : \overline{FA} = 3 : 2$ 도 성립합니다. 따라서



이렇게 되겠네요. $2k + 3k + 2k = 7$ 이 되고

$k = 1$ 이네요.



이렇게 됩니다.

D의 좌표는 (0, 2)이고 A의 좌표는 (2, 5)이네요. 결국 $y = 2^{ax} + b$ 는 (0, 2)와 (2, 5)를 지나야 합니다. 그럼 계산만 하면 되겠네요. $y = 2^{ax} + b$ 가 (0, 2)를 지나니까 $b + 1 = 2$ 이고 $b = 1$ 입니다. $y = 2^{ax} + 1$ 가 (2, 5)를 지나니까 $2^{2a} + 1 = 5$ 이고 $2^{2a} = 2^2 = 4$ 입니다. $a = 1$ 이네요. $a + b = 2$ 이고 답은 ②번입니다.

21. 정답 ②

1) 문제해석

$0 \leq x < \frac{5}{6}\pi$ 에서 $f(x) = \cos^2 x + a \sin x + 2$ 가 $x = b$ 에서 최댓값 $\frac{13}{4}$ 을 갖는답니다. 하나의 문자로 정리되어

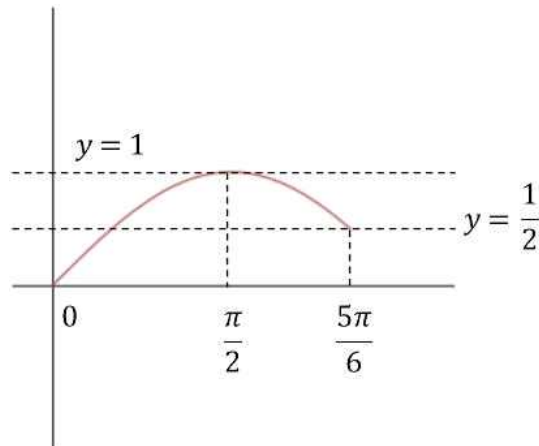
있어야 될 하든 말든 하겠죠? $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 을 이용해보시다. $f(x) = -\sin^2 x + a \sin x + 3$ 입니다.

이차함수랑 모양이 비슷하죠? $\sin x = t$ 라 하면 $f(x) = -t^2 + at + 3$ 인 이차함수입니다.

범위도 확인해볼게요. $\sin x = t$ 인데 $0 \leq x < \frac{5}{6}\pi$ 이잖아요?

2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

$y = \sin x$ 를 그리면

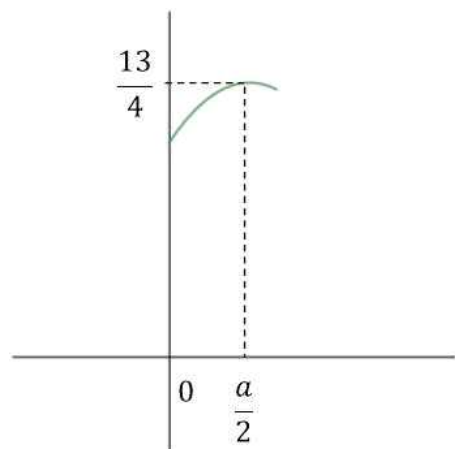


이렇게 되네요. 범위에 끝자락에 해당하는 $x = \frac{5\pi}{6}$ 에서

함숫값이 $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이네요. 결국 $0 \leq t \leq 1$ 이 됩니다. 우리는 $f(x) = -t^2 + at + 3$ 라는 함수에서

$0 \leq t \leq 1$ 의 범위만 보면 되는 거예요.

축이 $t = \frac{a}{2}$ 인 함수인데 $0 < a < 2$ 이니까 축이 $0 \leq t \leq 1$ 의 범위 안에 있네요? 따라서 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 결국 $x = \frac{a}{2}$ 에서 최댓값을 가지죠? 이 값이

$\frac{13}{4}$ 이니까 $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 3 = \frac{13}{4}$ 이고 $a^2 = 1$ 인데 $0 < a < 2$ 이니까 $a = 1$ 입니다.

$f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$ 이네요.

그런데 주의할 점은 $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 3$ 가 최대가 되는 지점은 $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ 이 아니라는 거예요! 왜냐면

우리는 $\sin x = t$ 로 치환했잖아요. 따라서 우리가 구해야 하는 $x = b$ 는 $\sin x = \frac{1}{2}$ 를 만족시키는 x 값입니다.

아까 그림 그려놔던 거 보면 $x = \frac{5\pi}{6}$ 에서 함숫값이 $\frac{1}{2}$ 이었는데 $0 \leq x < \frac{5}{6}\pi$ 이니까 등호가 없잖아요? 따라서

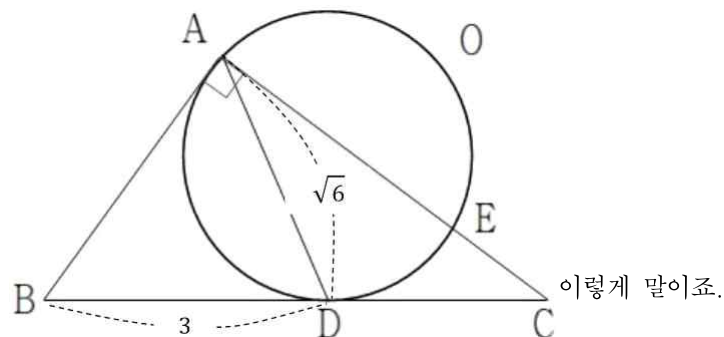
대칭축인 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대칭되는 부분에 있는 $x = \frac{1}{6}\pi$ 가 b 입니다. $a = 1$ 이고 $b = \frac{1}{6}\pi$ 이니까 $\frac{ab}{\pi} = \frac{1}{6}$ 이네요. 답은

②번입니다.

22. 정답 9

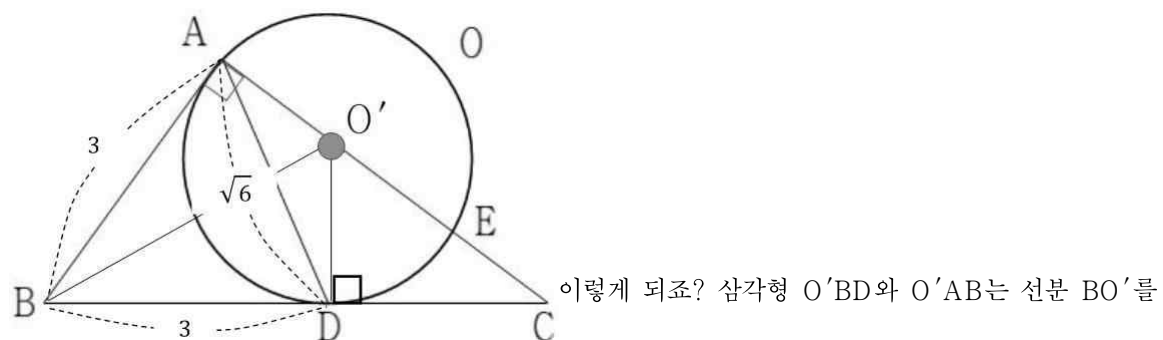
1) 그림 있으면 그림 보면서

일단 다 표시 좀 해둡시다.



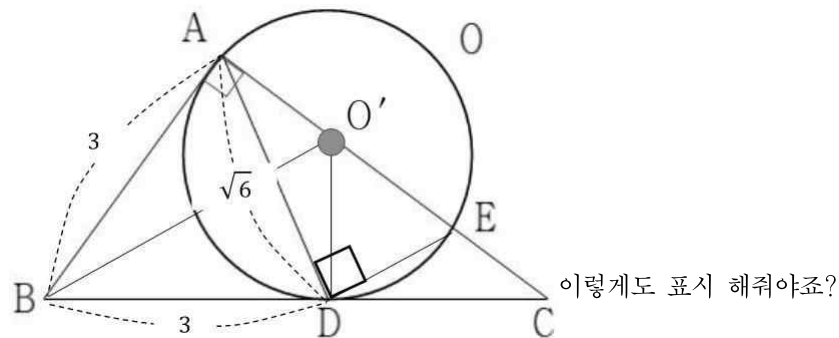
그리고 지금 원 O 위의 점 A에서의 접선이 선분 AB이고 원 O 위의 점 D에서의 접선이 선분 BD이잖아요.

그러면 원의 중심과 접하는 점을 잇고 수직표시 해줘야죠. 각의 이등분선도 그려주구요. 원의 중심을 O'이라 하면



공유하고, 직각을 가지고 있고, 두 삼각형 모두 한 변의 길이가 원의 반지름과 같으므로 합동입니다. 따라서 선분 AB의 길이와 선분 BD의 길이는 같아야 하겠네요.

또한 원 O의 지름이 선분 AE인데 선분 AE를 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형이 있는데요? ADE
말이에요. 그러면



어? 우리가 구해야 하는 건 삼각형 ADE의 넓이인데 높이가 $\sqrt{6}$ 으로 주어졌네요. 그럼 결국 우리는 $\overline{DE}$ 만
구하면 되겠어요.

2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 세 변의 길이

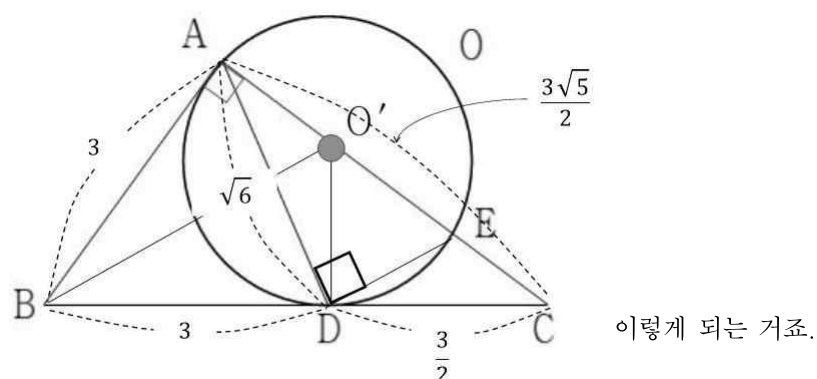
그런데 이러면 정해진 삼각형이 있는데요. ABD는 세 변의 길이가 모두 나와 있어요. 이러면 코사인법칙을 통해

나머지 각을 알 수 있죠? $\angle ABC = \theta$ 라 하면 $\cos \theta = \frac{3^2 + 3^2 - \sqrt{6}^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$ 입니다.

그런데 이거 삼각형 ABC에도 적용할 수 있죠? $\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$ 이고 $\overline{BC} = \frac{9}{2}$ 입니다. 그러면

$\overline{DC} = \frac{3}{2}$ 이네요.

ABC는 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용하면 $3^2 + \overline{CA}^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$ 이고 $\overline{CA} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 가 됩니다.



그리고 $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이잖아요? $\cos \theta$ 를 알면 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 을 사용해서 추가적으로 알 수 있는 것이 있죠.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 는 $y > 0$ 인 y 축이니까 $\sin$ 을 $\cos$ 으로 바꾸고, 예각인 θ 만큼 반시계방향으로 돌리면 사인값은

양수니까 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ 으로 바뀌잖아요? 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{3}$ 입니다.

이러면 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{3}$ 을 이용해서 삼각형 $O'DC$ 에 대하여 정리할 수 있죠. $\overline{O'D}$ 는 원 O 의 반지름인

r 이니까 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{O'D}}{\overline{CO'}}=\frac{r}{\overline{CO'}}=\frac{2}{3}$ 이고 $\overline{CO'}=\frac{3}{2}r$ 입니다.

그럼 여기도 피타고라스를 사용해야겠네요. $r^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}r\right)^2$ 이고 $r^2=\frac{9}{5}$ 입니다.

그리고 삼각형 ADE 도 직각삼각형이니까 피타고라스를 사용할 수 있겠네요. $\overline{AE}=2r$ 이니까

$\sqrt{6^2+\overline{DE}^2}=(2r)^2$ 이고 $\overline{DE}=\frac{\sqrt{30}}{5}$ 입니다.

이제 넓이를 구하면 되겠네요. $S=\frac{1}{2}\times(\text{높이 } \sqrt{6})\times(\text{밑변 } \frac{\sqrt{30}}{5})=\frac{3}{\sqrt{5}}$ 입니다. 따라서 $5S^2=9$ 이네요.

23. 정답 5

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

첫째항인 a_1 이 자연수인데 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+5 & (a_n < 0) \end{cases}$ 입니다.

그리고는 $a_{15} < 0$ 이 되도록 하는 a_1 의 최솟값을 구하래요. 어.....

일단 주어진 조건은 a_1 과 a_{15} 인데 이거 간격이 너무 먼데요? 이 사이에 13개 항이나 있어요. 이걸 미지수로 잡는다면...? 어우 끔찍하네요.

그러면 어찌죠? 뭘 어떡해요. 그냥 자연수 넣어야죠.

2) 케이스 분류

$a_1=1$ 이라면 1 -1 4 2 0 -2 3 1 -1 4 ...가 되죠. 잘 보면 숫자가 반복되는 거 보이시나요?

1 -1 4 2 0 -2 3이 반복되죠. 지금 주기가 7이잖아요? 따라서 a_{14} 까지 저 숫자들이 반복되고 a_{15} 는 반복되는 숫자들의 첫 번째 숫자인 1이 될 거예요. $a_{15}=1$

$a_1 = 2$ 라면 $2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ \dots$ 가 됩니다. $2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ 4$ 가 반복되네요. 따라서 $a_{15} = 2$ 입니다.

$a_1 = 3$ 이라면 $3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ 4\ \dots$ 가 됩니다. 이것도 역시 $3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2$ 이 반복되네요. 그리고 잘 보면 반복되는 숫자들이 똑같아요. 단지 순서만 바뀔 뿐이네요. $a_{15} = 3$ 입니다. 뭔가 $a_1 = 4$ 일 때도 비슷한 결과가 나올 것 같은 기분이 들죠..?

$a_1 = 4$ 라면 $4\ 2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ \dots$ 가 되네요. 마찬가지로 반복되니까 $a_{15} = 4$ 입니다.

$a_1 = 5$ 라면... 첫 시작이 5네요? 이걸 반복되는 숫자들에 없었는데... 일단 가봅시다.

$5\ 3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ \dots$ 이 됩니다. 이거 반복되긴 하는데 5는 반복되는 숫자에 포함이 안 돼요. 반복되는 건 특정 숫자들만 반복이 됩니다. 이거는 끝까지 확인해보긴 해야겠네요. a_{15} 까지 나열해봅시다.

$5\ 3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2\ 3\ 1\ -1\ 4\ 2\ 0\ -2$ 로 $a_{15} = -2$ 가 됩니다. $a_{15} < 0$ 이네요! 따라서 a_1 의 최솟값은 5입니다.

24. 정답 251

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x) = 3x + a$, $g(x) = \int_2^x (t+a)f(t)dt$ 가 있는데 $h(x) = f(x)g(x)$ 입니다. 일단 $g(x)$ 가 정적분의 위끝에 변수가 있네요. 위끝과 아래끝이 같아지는 $x = 2$ 를 넣으면 $g(2) = 0$ 이 됩니다. 미분까지 하고 싶은데 곱한 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 있으니까 이걸 패스할게요.

곱한 함수 식을 한 번 써볼게요. 일단 $g(x)$ 안에 $f(t)$ 가 있으니까 넣어보면 $g(x) = \int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 입니다.

$g(x)$ 는 이차함수를 적분한 거니까 삼차함수죠? 최고차항의 계수가 3인 이차함수를 적분했으니까 최고차항의 계수는 1이구요. 따라서 $h(x) = (3x+a) \int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수입니다.

2) 조건해석

(가)조건에서 $y = h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x 축이라고 합니다. 어떤 점에서의 접선이 x 축이라는 건?

일단 접선과 $h(x)$ 가 만나는 점이 x 축 위라는 거고 그 점에서의 접선의 기울기가 0이라는 거죠?

이걸 다시 표현하면 어떤 점에서 x 축에 접한다는 거예요. $x=a$ 에서 $h(x)$ 와 x 축이 접한다면

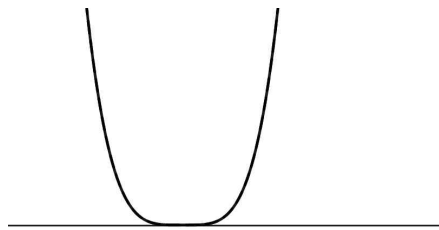
$h(a)=0$, $h'(a)=0$ 이 되겠죠. 인수정리가 쓰고 싶어지는데요? $h(x)$ 는 $(x-a)$ 라는 인수를 적어도 두 개 가져야 합니다.

(나)조건에서 $y=|h(x)|$ 가 x 축에 평행한 직선, 즉 $y=k$ 라는 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값이 4라고 합니다. 이걸 그래프를 그려봐야겠네요.

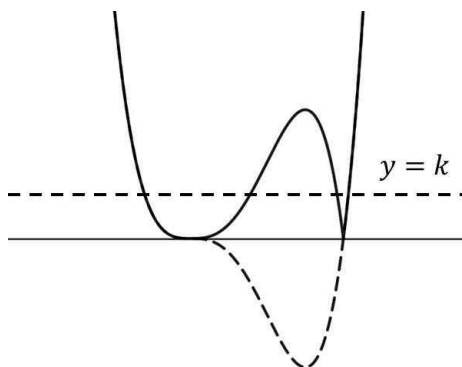
3) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 절댓값 함수

일단 x 축에 접하는 그래프부터 생각해야 해요. 그러면서 접어 올렸을 때 $y=k$ 라는 x 축에 평행한 직선과 4개의 점에서 만나고, 그게 최댓값인 그래프를 찾아야 합니다.

일단



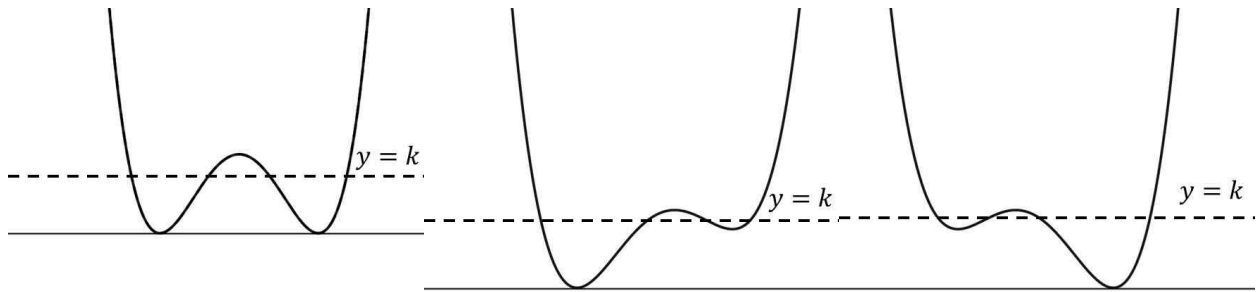
이런 그래프는 안 됩니다. 2개의 점에서 만나죠?



이런 그래프는 되겠네요. 변곡점이 오른쪽으로 가서 개형의 좌우가

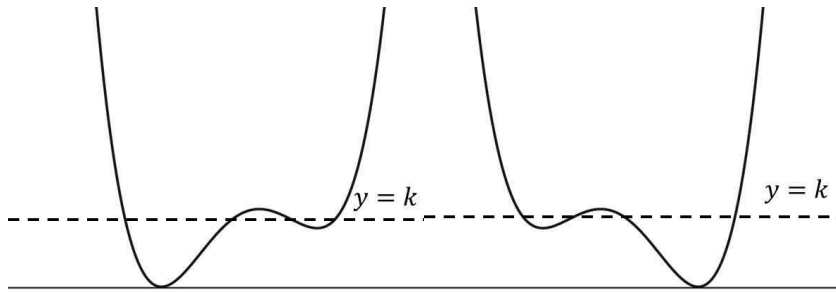
뒤바뀌어도 괜찮아요.

W모양의 그래프 중에서는



이정도가 되겠네요.

$h(x)$ 는 지금 $x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$ 에서 x 축과 만나고 있죠. 두 개가 같은지 다른지는 모르겠지만요. 근데 개형 중에서 x 축과 딱 한 개의 점에서만 만나는 것이 있죠.

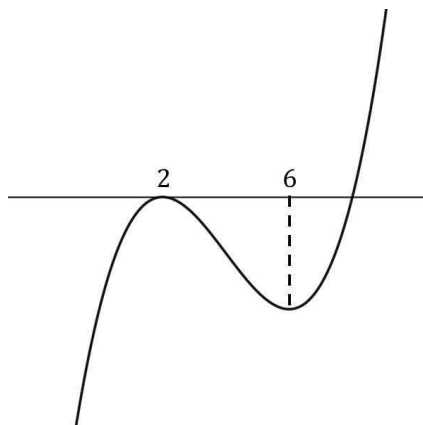


이 두 개 말이예요. x 축에 접하고 있으니까 $h(x)$ 는 같은 인수를 두 개 가져야 합니다. 마침 두 개가 있네요.

$x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$ 이죠. 이 두 개가 같아야 같은 인수가 되겠죠? 따라서 $a = -6$ 이고

$$h(x) = 3(x-2) \int_2^x (t-6)(3t-6)dt \text{ 입니다.}$$

그런데 이 두 개형은 문제가 있어요. $3(x-2)(x-6)$ 를 적분하고 $x = 2$ 에서 함숫값이 0인 함수를 그려보세요. $x = 2$ 에서 극대, $x = 6$ 에서 극소가 되니까

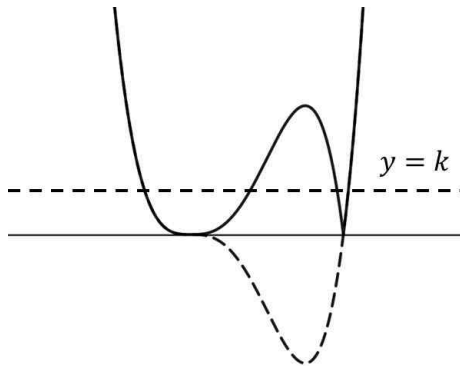


이렇게 됩니다. 일단 변곡점의 x 좌표는 2와 6의 중점인 $x=4$ 이구요,

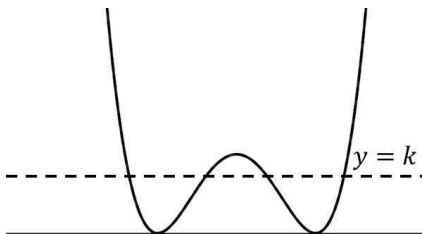
x 축과 만나는 $x=2$ 가 아닌 점의 x 좌표를 k 라 하면 삼차함수의 비율관계에 의하여 2와 k 의 1:2 내분점의 x 좌표는 $x=4$ 가 됩니다. $\frac{4+k}{1+2}=4$ 이고 $k=8$ 이네요. 따라서 $\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$ 는 $(x-2)$ 라는 인수를 두 개, $(x-8)$ 이라는 인수를 하나 갖습니다.

그렇다면 $h(x)=3(x-2)\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$ 는 $(x-2)$ 라는 인수를 총 세 개 가지게 되는 거잖아요?

$3(x-2)$ 가 추가로 곱해져 있으니까요. 그러면 저 개형이 나올 수 없죠. $(x-2)$ 라는 인수를 총 세 개 가지면



와 같은 개형이 나올 테니까요.



그럼

이런 개형은 어떨까요?

$h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 에서 방금과 같이 $x=-\frac{a}{3}$, $x=2$ 가 같다면 $h(x)$ 는 $(x-2)$ 라는 인수를

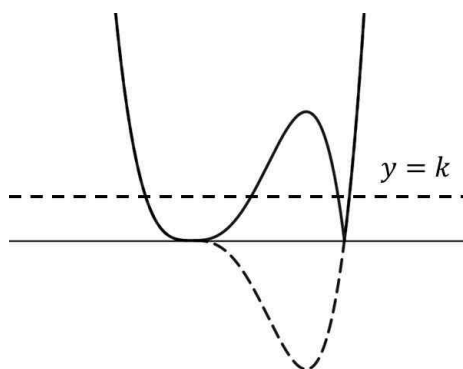
세 개 가지게 될 거예요. 따라서 바로 위와 같은 개형이 나오려면 $x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$ 는 달라야 합니다.

그러면 결국 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 는 $\left(x + \frac{a}{3}\right)$ 라는 인수 하나, $(x-2)$ 라는 인수 두 개를 가져야겠어요. 곱해져 있던 $(3x+a)$ 라는 인수까지 더해져서 $\left(x + \frac{a}{3}\right)$ 두 개, $(x-2)$ 두 개가 나오죠.

그런데 이것도 문제가 있어요. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 를 미분하면 $(x+a)(3x+a)$ 가 되잖아요. $x = -\frac{a}{3}$ 에서

극대 또는 극소가 된다는 건데 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 는 $x = -\frac{a}{3}$ 에서 만나기만 해야 하잖아요? 접하면 인수가 두 개가 될 테니까요. 그런데 극대 또는 극소점이 x 축에 있다면? 그건 접했다는 거죠. 조건에 맞지 않게 됩니다.

따라서 가능한 개형은



이거네요.

만약 $x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$ 가 같다면 $a = -6$ 입니다. $h(x) = 3(x-2) \int_2^x (t-6)(3t-6)dt$ 인데 아까 살펴봤듯이

$\int_2^x (t-6)(3t-6)dt$ 는 $(x-2)$ 라는 인수 두 개, $(x-8)$ 라는 인수 하나를 가지니까

$\int_2^x (t-6)(3t-6)dt = (x-2)^2(x-8)$ 입니다. $h(x) = 3(x-2)^3(x-8)$ 이네요. $h(-1) = 729$ 입니다. 일단 하나 구했어요!

이번엔 $x = -\frac{a}{3}$, $x = 2$ 가 다르다고 해봅시다. 그러면 $(x-2)$ 라는 인수를 세 개 가질 것인가, 아니면

$\left(x + \frac{a}{3}\right)$ 라는 인수를 세 개 가질 것인가가 나뉘죠?

만약 $(x-2)$ 라는 인수를 세 개 가진다고 해봅시다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 에서 이미

$\left(x+\frac{a}{3}\right)$ 이라는 인수는 $(3x+a)$ 로 곱해져 있으니 결국 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 는 $(x-2)$ 라는 인수를 세 개 가져야 합니다.

그런데 이걸 불가능하죠. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 가 $(x-2)$ 라는 인수를 세 개 가져서

$\int_2^x (t+a)(3t+a)dt=(x-2)^3$ 이 된다면 미분했을 때 $(x+a)(3x+a)=3(x-2)^2$ 이어야 하는데 지금

$(x+a)$ 라는 인수와 $(3x+a)$ 라는 인수는 같지 않잖아요.

$\left(x+\frac{a}{3}\right)$ 라는 인수를 세 개 가졌을 때는 $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 가 $(x-2)$ 라는 인수 하나, $\left(x+\frac{a}{3}\right)$ 라는 인수 두

개를 가져야 합니다. $\int_2^x (t+a)(3t+a)dt=(x-2)\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$ 가 되는 거죠. 항등식이니까 뭘 해도 같아야

합니다. 일단 $x=2$ 를 넣으면 $0=0$ 으로 같네요. 미분하면 $3(x+a)\left(x+\frac{a}{3}\right)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x+\frac{a}{9}-\frac{4}{3}\right)$ 가 되네요.

따라서 $a=\frac{a}{9}-\frac{4}{3}$ 이고 $a=-\frac{3}{2}$ 가 됩니다. $h(x)=(3x+a)\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$ 는 $\left(x+\frac{a}{3}\right)$ 라는 인수 세 개에

$(x-2)$ 라는 인수 하나를 가진다고 했었죠? 따라서 $h(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$ 이구요, $h(-1)=\frac{243}{8}$ 입니다.

$p=8$, $q=243$ 이니까 $p+q=251$ 이네요.

25. 정답 ③

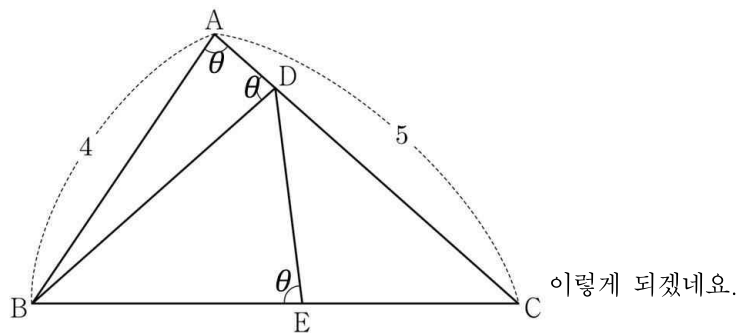
1) 문제해석, 그림 있으면 그림 보면서

$\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 입니다. $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 빼고는 그림에 표시되어 있네요. 이때

$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$ 라고 하네요. 보기 편하게 $\angle BAC = \angle BDA = \angle BED = \theta$ 라 할까요? 그러면

$\cos\theta=\frac{1}{8}$ 입니다. 이왕이면 사인값도 구해놓을까요? $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이니까 $\sin^2\theta=\frac{63}{64}$ 입니다. θ 는 π 를

넘지 않으니까 $\sin\theta$ 는 양수입니다. 따라서 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$ 이네요.



이렇게 보면 삼각형 BDA 은 이등변삼각형이네요? 그러면 $\overline{BD} = 4$ 가 됩니다.

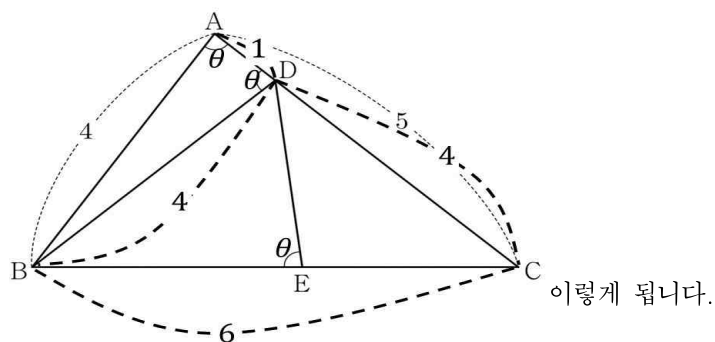
2) 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 ABC는 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이에요. 그러면 코사인법칙으로 나머지 한 변의 길이도

구할 수 있겠죠? $\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - \overline{BC}^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8}$ 이고 $\overline{BC} = 6$ 입니다.

삼각형 BDA 역시 두 변의 길이와 한 각이 주어진 삼각형이죠. 따라서

$\cos \theta = \frac{4^2 + \overline{AD}^2 - 4^2}{2 \times 4 \times \overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{8} = \frac{1}{8}$ 이고 $\overline{AD} = 1$ 입니다. 모두 정리하면



그리고 보니 BCD도 이등변삼각형이네요? 그러면 $\angle DBE = \angle BCD$ 이죠? 이것을 θ_2 라고 할게요.

이제 우리가 구해야 하는 건 $\overline{DE}$ 이에요. 이것 어떻게 구하면 될까..... $\overline{DE}$ 를 표현할 수 있는 식은 없을까요?

사인법칙이 있긴 하네요. 삼각형 BDE 안에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{DE}}{\sin \theta_2} = \frac{4}{\sin \theta}$ 가 됩니다. $\sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ 인

걸 알긴 알지만 $\sin \theta_2$ 를 모르겠어요.

음... 그리고 또 뭔가가 있어야 하는데.. 그런데 왜 이리 각과 관련한 조건들이 많은 걸까요? 각과 각의 관계에 대한 공식은 사인법칙인데... θ , θ_2 와 관련된 삼각형 뭐가 더 없을까요? 그리고 보니 ABC도 되네요?

사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin \theta_2} = \frac{6}{\sin \theta}$ 입니다. 양변에 4를 나눠주면 $\frac{1}{\sin \theta_2} = \frac{3}{2\sin \theta}$ 이니까 이걸 $\frac{\overline{DE}}{\sin \theta_2} = \frac{4}{\sin \theta}$ 에
 넣으면...? $\overline{DE} \times \frac{3}{2\sin \theta} = \frac{4}{\sin \theta}$ 이고 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$ 이네요! 답은 ③번입니다.

26. 정답 ②

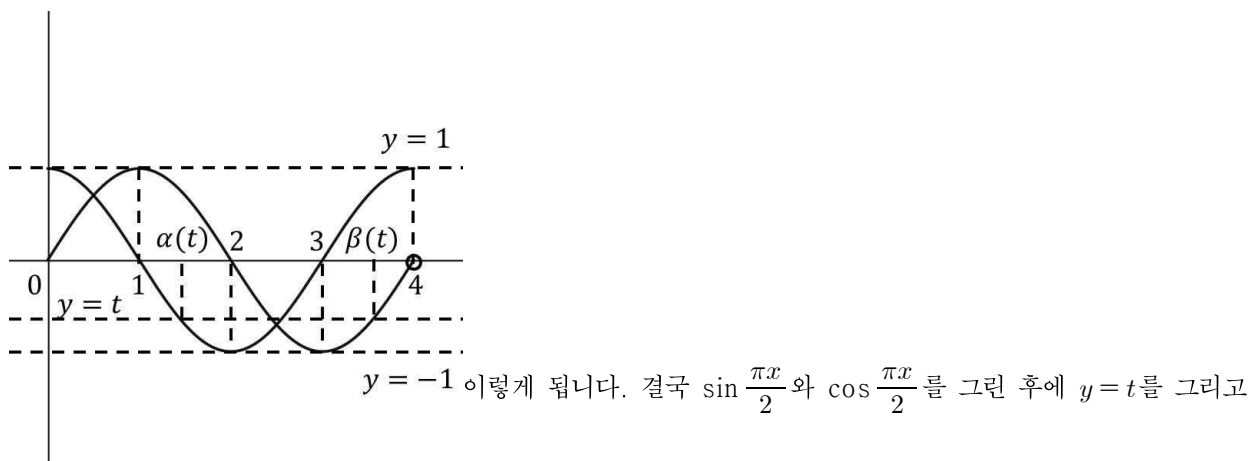
1) 문제해석

$-1 \leq t \leq 1$ 인 t 가 있는데 $\left(\sin \frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos \frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$ 를 만족시키는 x 중에서 $0 \leq x < 4$ 에 있는 가장 작은
 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$ 라고 한답니다.

일단 $\left(\sin \frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos \frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$ 를 만족시키려면 $\sin \frac{\pi x}{2} = t$ 이거나 $\cos \frac{\pi x}{2} = t$ 이면 되겠죠? 다시 말하면
 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 와 $y = t$ 가 만나는 점이거나 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 와 $y = t$ 가 만나는 점이 되는 거예요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이거 그래프로 그려보면



$y = t$ 와 왼쪽부터 처음으로 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha(t)$, 마지막에 만나는 점의 x 좌표를 $\beta(t)$ 라고 하는 거네요.

ㄱ에서 $-1 \leq t < 0$ 이면 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$ 이냐고 물어봅니다. 딱 그림에 있는 상황이네요! 그런데 더해서 5가
 되는지를 어떻게 확인하죠?

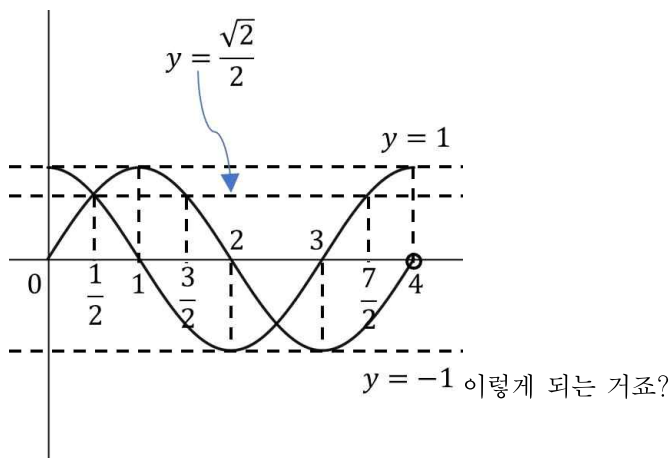
사인과 코사인 그래프를 확인할 때는 대칭을 확인하는 것이 매우 중요합니다. 지금 그래프를 보면

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 와 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 가 $x = \frac{5}{2}$ 에 대하여 대칭이죠? 지금은 대칭이 아닌 것 같아도 그래프를 옆으로 확장해보면 대칭입니다. 사인 그래프를 옆으로 옮기면 코사인 그래프와 같게 되잖아요. 반대로 마찬가지로요.

$-1 \leq t < 0$ 이면 $\alpha(t)$ 는 코사인 그래프 상에 있고요, $\beta(t)$ 는 사인 그래프 상에 있어요. 둘의 중점의 x 좌표는 $\frac{5}{2}$ 가 되겠죠. 대칭이니까요. 따라서 $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2} = \frac{5}{2}$ 이고 $\alpha(t)+\beta(t)=5$ 입니다. 맞네요! ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $\{t | \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t | 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 이냐고 물어보네요. 일단 $\alpha(0)$ 과 $\beta(0)$ 은 $t=0$ 을 그어서 확인하면 되겠죠? 그림을 보면 $\alpha(0)=0$ 이고 $\beta(0)=3$ 이네요. $x=4$ 는 등호가 없어서 포함되지 않으니깐요. 그러니까 결국 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 의 차이가 3이 되는지를 묻고 있는 거예요.

일단 범위부터 확인해봅시다. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 뭘까요? $\sin \frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 x 는 $\frac{1}{2}$ 이 있고, $x=1$ 에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{3}{2}$ 도 되네요. 그리고 $\cos \frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 x 는 $\frac{1}{2}$ 이 있고, $x=2$ 에 대하여 대칭임을 이용하면 $\frac{7}{2}$ 도 됩니다. 어? $x = \frac{1}{2}$ 이면 $\sin \frac{\pi x}{2} = \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이네요? 그러니까



지금 보면 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 $\alpha(t)$ 는 사인 그래프 상에 있고 $\beta(t)$ 는 코사인 그래프 상에 있어요. 그런데

$0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프와 $3 < x < \frac{7}{2}$ 일 때 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 는 모양이 일치합니다. 그럴 수밖에

없는 게 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 를 3만큼 오른쪽으로 밀어버리면 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 가 되거든요. 그러니까 $y=t$ 라는 수평선을

그어서 만나는 x 좌표의 차이도 일정하게 되겠죠. 단지 3만큼 오른쪽으로 움직였으니깐요. 따라서 ㄴ도

맞습니다.

ㄷ에서 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ 인 t_1, t_2 에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$ 이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$ 이냐고 물어봅니다.

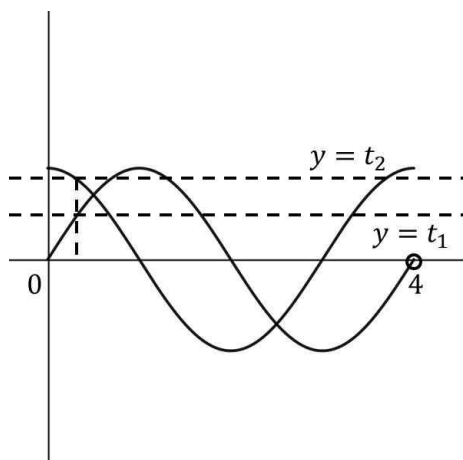
일단 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ 라는 게 뭘까요? 먼저 $\alpha(t_1)$ 은 $y=t_1$ 이 $y=\sin \frac{\pi x}{2}$ 와 $y=\cos \frac{\pi x}{2}$ 와 만나는 점 중

x 좌표가 가장 작은 점의 x 좌표예요. $\alpha(t_2)$ 는 $y=t_2$ 이 $y=\sin \frac{\pi x}{2}$ 와 $y=\cos \frac{\pi x}{2}$ 와 만나는 점 중 x 좌표가

가장 작은 점의 x 좌표이죠. $t_2-t_1=\frac{1}{2}$ 이니까 t_1, t_2 는 달라요. 그러면 결국 가장 작은 x 좌표가 같게 되는 두

직선의 차이가 $\frac{1}{2}$ 가 난다는 이야기네요.

그래프를 잘 보면



이렇게 되어야 하겠네요. 그러면 결국 $x=\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$ 에서

코사인값과 사인값의 차이가 $\frac{1}{2}$ 이 되어야 한다는 말이 됩니다. $t_2=\cos \frac{\pi k}{2}$ 이고 $t_1=\sin \frac{\pi k}{2}$ 이니까요.

$\cos \frac{\pi k}{2}-\sin \frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$ 가 되네요. 그런데 이때 $\cos^2 \frac{\pi k}{2}+\sin^2 \frac{\pi k}{2}=1$ 이잖아요? $\cos \frac{\pi k}{2}-\sin \frac{\pi k}{2}=\frac{1}{2}$ 를

제곱하면 $\cos^2 \frac{\pi k}{2}-2\cos \frac{\pi k}{2}\sin \frac{\pi k}{2}+\sin^2 \frac{\pi k}{2}=\frac{1}{4}$ 가 됩니다. $\cos^2 \frac{\pi k}{2}+\sin^2 \frac{\pi k}{2}=1$ 이니까

$-2\cos \frac{\pi k}{2}\sin \frac{\pi k}{2}=-\frac{3}{4}$ 이고 $\cos \frac{\pi k}{2}\sin \frac{\pi k}{2}=\frac{3}{8}$ 이네요. $t_1 \times t_2=\frac{3}{8}$ 인데요? ㄷ은 아닙니다. 따라서 옳은

것은 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

27. 정답 24

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 인수정리

최고차항의 계수가 1인 이차함수가 있는데 (가)조건에서 $(x^n - 64)f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고 각각의 실근은 중근이라고 합니다. n 은 자연수이구요. (나)조건에서는 $f(x)$ 의 최솟값이 음의 정수라네요. 숫자 넣을 준비는 하고 있어야 해요.

이차함수의 최솟값이 음의 정수라는 건 이미 x 축과 두 개의 점에서 만나고 있다는 말이겠죠? 그래프 그려보면 바로 알 수 있어요. 두 실근을 α, β 라 하면 인수정리에 의해 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ 라 할 수 있겠네요.

$x^n - 64$ 는 자체적으로 중근을 가질 수 없습니다. n 이 홀수라면 $y = x^n$ 은 계속 증가하는 그래프인데 그러면 만나는 점이 하나가 되죠. $x^n - 64 = 0$ 은 오직 하나의 실근을 가지게 됩니다. 이러면 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ 를 곱해도 중근 두 개를 가질 수 없어요.

n 이 짝수라면 $y = x^n$ 은 $x = 0$ 에서 방향을 바꾸면서 x 축에 접하는 그래프입니다. $y = x^2$ 와 아주 유사한 그래프이죠. 그러면 $y = x^n$ 과 $y = 64$ 가 만나는 점은 두 개가 됩니다. 그리고 그게 $x = \alpha, x = \beta$ 가 되어야 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ 와 합쳐서 중근을 가지게 되겠죠? 따라서 따라서 $\alpha^n = 64, \beta^n = 64$ 입니다.

α, β 는 같으면 안 되니까(같으면 $f(x) = (x - \alpha)^2$ 로 최솟값이 0이 되겠죠?) 하나는 양수, 하나는 음수이고 서로의 부호는 반대가 되어야겠네요. $\alpha = -\beta$ 입니다. $f(x) = (x - \alpha)(x + \alpha) = x^2 - \alpha^2$ 이네요. 최솟값은 $-\alpha^2$ 인데 이게 음의 정수여야 하죠? 일단 기억해두자구요.

결국 $\alpha^n = 64$ 를 만족하고 $-\alpha^2$ 가 음의 정수가 되는 짝수 n 을 찾아야 합니다. 천천히 자연수에 숫자 넣어볼까요?

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

$n = 2$ 이면 $\alpha^2 = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -64$ 로 음의 정수이죠? 되네요.

$n = 4$ 이면 $\alpha^4 = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -8$ 로 음의 정수이네요. 됩니다.

$n = 6$ 이면 $\alpha^6 = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -4$ 로 음의 정수입니다. 되네요.

$n = 8$ 이면 $\alpha^8 = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -2^{\frac{3}{2}}$ 로 음의 정수가 아니네요? 안 됩니다.

$n = 10$ 이면 $\alpha^{10} = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -2^{\frac{6}{5}}$ 로 음의 정수가 아닙니다. 안 되겠네요.

$n = 12$ 이면 $\alpha^{12} = 64$ 입니다. $-\alpha^2 = -2$ 로 음의 정수이네요. 됩니다.

이거보다 더 작아지려면 $-\alpha^2 = -1$ 이어야 하는데 그러면 $\alpha^n = 64$ 가 될 리가 없죠? 여기가 끝이네요. 따라서 모든 자연수의 합은 $2 + 4 + 6 + 12 = 24$ 입니다.

28. 정답 64

1) 문제해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$ 가 있네요. 이거 기함수네요? 최고차항의 계수가 양수인 기함수예요.

이때 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (-3 \leq x < 3) \\ \frac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3 \leq x < 6k+3) \end{cases}$ 라고 합니다. k 는 모든 자연수이구요. 자연수면 숫자

넣어야겠죠? 가봅시다. $k=1$ 이면 $3 \leq x < 9$ 에서 $\frac{1}{2}f(x-6)$ 입니다. $k=2$ 이면 $9 \leq x < 15$ 에서

$\frac{1}{3}f(x-12)$ 입니다. 지금 보면 $-3 \leq x < 3$ 에서 $f(x)$ 를 6만큼씩 오른쪽으로 평행이동하면서

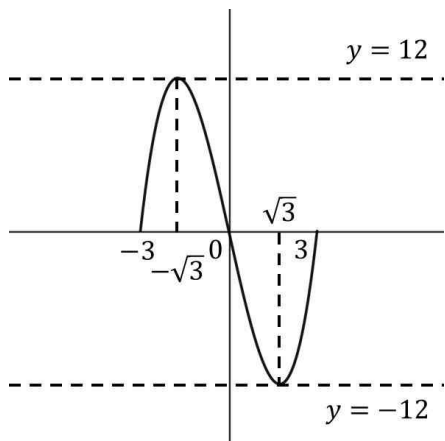
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 이렇게 점점 작게 만드는 함수네요. 대충이라도 그려볼까요?

2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

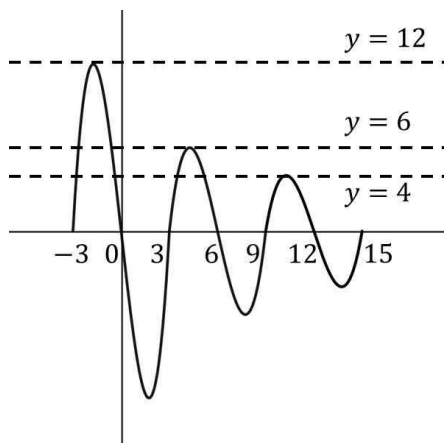
$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x^3 - 9x)$ 는 $-3, 0, 3$ 에서 x 축과 만나구요. 미분하면

$\frac{2\sqrt{3}}{3}(3x^2 - 9) = 2\sqrt{3}(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ 이니까 $x = -\sqrt{3}$ 에서 극대, $x = \sqrt{3}$ 에서 극소네요. 극댓값은

12이고 극솟값은 -12 입니다.



이렇게 되는데 이게 6씩 평행이동하면서 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 가 되니까



이렇게 되겠네요. 이정도면 해석은 된 것 같아요.

3) 시그마 펼치기,

이때 $y = n$ 과 $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n 이라고 하는데 $\sum_{n=1}^{12} a_n$ 를 구합니다. 해석은 굉장히

간단하네요. 그냥 $y = n$ 이라는 직선을 그어서 $y = g(x)$ 와 만나는 점의 개수를 구하면 되는 거예요.

그러면 일단 펼쳐봅시다. $a_1 + a_2 + \dots + a_{12}$ 이네요.

a_{12} 는 $y = 12$ 랑 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수이죠? 위의 그래프에서 한 점에서만 만나잖아요? $a_{12} = 1$ 입니다.

a_{11} 은요? 지금 보면 2개의 점에서 만나죠. $y = 12$ 와 $y = 6$ 사이에서는 2개의 점에서 만나잖아요. 따라서

$a_{11} = a_{10} = a_9 = a_8 = a_7 = 2$ 입니다.

그러다가 a_6 이 되면 3개의 점에서 만납니다. $a_6 = 3$ 이네요. 그리고 $y = 6$ 과 $y = 4$ 사이에 있으면 4개의 점에서

만나네요. 따라서 $a_5 = 4$ 입니다.

$y = 4$ 가 되면 5개의 점에서 만나죠. $a_4 = 5$ 입니다. 이 아래부터는 생각을 좀 해봐야겠어요.

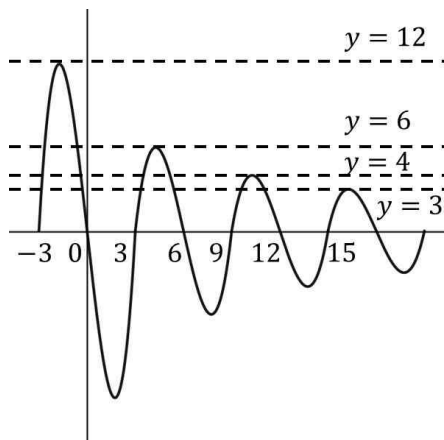
지금 보면 함수의 극대점이 될 때 만나는 점의 개수가 변하는 걸 알 수 있어요. 극댓값은 12에서부터

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 이렇게 작아지고 있잖아요? 이걸 나열해보면 $12, 6, 4, 3, \frac{12}{5}, 2, \dots, 1, \dots$ 이렇게 되겠죠?

그리고 극댓값과 a_n 의 관계를 보면 $12 \rightarrow 6$ 으로 갈 때 a_n 이 2가 늘었어요. 12일 때 $a_{12} = 1$, 12랑 6 사이일 때 $a_n = 2$, 6일 때 3 이런 식으로요.

그러면 4에서 3으로 갈 때도 a_n 이 2가 늘어야겠죠? 지금 $a_4 = 5$ 이니까 $a_3 = 7$ 이 되어야 할 거예요.

혹시 모르니까 그래프를 그려봅시다.



이렇게 되네요. $a_3 = 7$ 맞네요? 그럼 이제 다음으로 가봅시다.

다음은 3에서 2로 갈 때예요. 지금 $12, 6, 4, 3, \frac{12}{5}, 2, \dots, 1, \dots$ 을 보면 3에서 2를 가려면 $\frac{12}{5}$ 를

거쳐서 가야 하죠? 그러면 3에서 $\frac{12}{5}$ 로 가면 2가 늘고, $\frac{12}{5}$ 에서 2로 가면 또 2가 늘어나니까 총 4가 늘어날 거예요. 따라서 $a_2 = 7 + 4 = 11$ 입니다.

이제 마지막 a_1 입니다. 이거는 2에서 1로 갈 때 몇 개의 숫자를 거치는지를 확인하면 되겠죠? 나열해봅시다.

$2, \frac{12}{7}, \frac{12}{8}, \frac{12}{9}, \frac{12}{10}, \frac{12}{11}, 1$ 이렇게 되네요. 총 5번 거쳐서 6번째에 1에 도달하니까 총 12가

늘어나겠네요. 따라서 $a_1 = 11 + 12 = 23$ 입니다. 모두 더하면

$1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 11 + 23 = 64$ 입니다. 답은 64네요.

29. 정답 ④

1) 그림 있으면 그림 보면서

$f(x) = x^3 - x$ 와 $a > -1$ 인 상수 a 에 대하여 $g(x)$ 는 $(-1, f(-1))$ 과 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선입니다. 그럼 그냥 $\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}(x+1)+f(-1)$ 이죠? 기울기가 $\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}$ 이고 $(-1, f(-1))$ 혹은 $(a, f(a))$ 을 지나는 직선이니까요.

$$\text{이때 } h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -1) \\ g(x) & (-1 \leq x \leq a) \text{가 있어요. } f(x-m)+n \text{은 } f(x) \text{는 } x \text{축의 방향으로 } m \text{만큼,} \\ f(x-m)+n & (x > a) \end{cases}$$

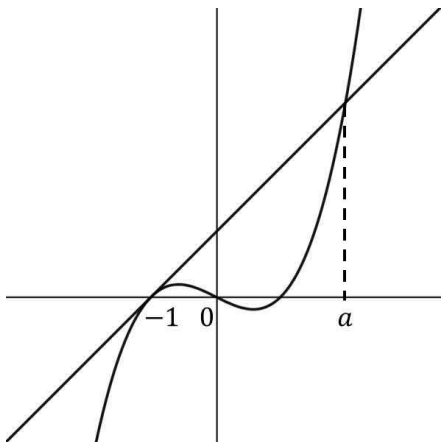
y 축의 방향으로 n 만큼 움직인 함수네요.

2) 조건해석, 미분가능은 연속 확인+미분계수 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이때 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 일대일대응입니다.

일단 미분가능이라고 했으니까 $x = -1$ 에서 $f(x)$ 의 접선의 기울기와 $g(x)$ 의 기울기는 같아야 해요. 미분해보면 $3x^2 - 1$ 이니까 접선의 기울기는 2입니다.

그런데 그래프를 그려보세요. 기울기가 2이면서, $(-1, f(-1))$ 에서는 $f(x)$ 와 접하고, $(a, f(a))$ 를 지나는 직선은?



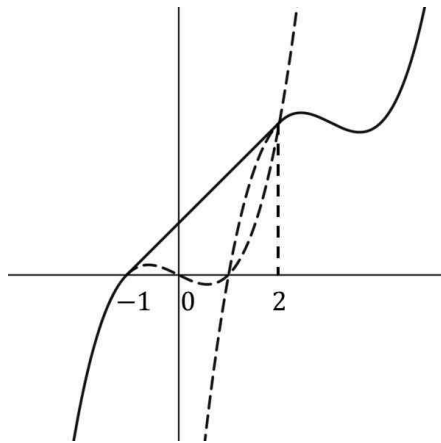
이런 모양이 되죠. $f(x)$ 는 홀수차항만 있는 기함수니까 변곡점이

$(0, 0)$ 이잖아요. 따라서 -1 과 a 의 1:2내분점은 0이 되어야 합니다. $\frac{a-2}{1+2} = 0$ 이고 $a = 2$ 입니다.

이때 $g(x)$ 는 직선이잖아요. 따라서 접선의 기울기는 계속 2예요. 다시 말해서 $x = a = 2$ 에서도 접선의 기울기는 2여야 한다는 거죠. $f(x-m)+n$ 의 $x = a = 2$ 에서의 접선의 기울기도 2여야 합니다.

그런데 아까 확인했듯이 $f(x-m)+n$ 는 $f(x)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 움직인 함수예요. 그러면 접선의 기울기가 2가 되는 점도 그냥 단순히 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 변화합니다. $f(x)$ 의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $3x^2-1=2$ 해서 $x=1, -1$ 이잖아요? 그러면 $f(x-m)+n$ 의 접선의 기울기가 2가 되는 점은 $x=m+1, m-1$ 입니다.

그러면 $a(=2)$ 의 값으로 뭘 선택해야 할까요? 우리는 그래프를 잘라야 하잖아요. 천천히 그래프를 그려보면 되죠. 만약 $x=m-1$ 을 선택하면

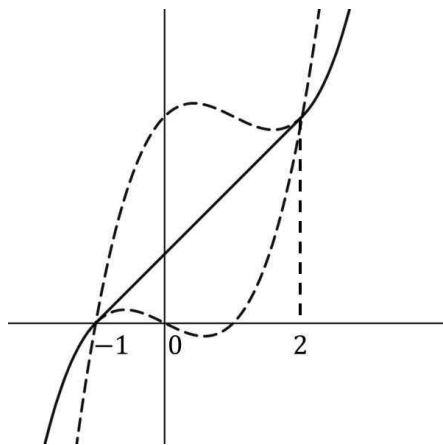


이렇게 되어야 합니다. 그런데 (나)조건에서 일대일 대응이어야 한다고

했었죠. 일대일 대응이 뭐였죠? 일대일 함수이어야 하고 공역과 치역이 같아야 하죠. 일대일 함수는 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이어야 한다는 거예요. 다시 말하면 x 값이 다르면 y 값도 달라야 한다는 거죠. x 축에 평행하게 선을 그어서 두 점 이상 만나면 안 돼요. 반드시 한 점에서만 만나거나 아예 만나지 말아야 하는 거죠.

여기에 공역과 치역이 같아야 합니다. 공역은 아무 말이 없으면 y 값 전체니까 치역도 y 값 전체여야 합니다. 그러니까 정리하자면 x 축에 평행하게 선을 그어서 반드시 한 점에서만 만나고, 모든 y 값을 가져야 합니다. (x 축에 평행하게 선을 그어서 아예 만나지 않는 건 안 돼요. 모든 y 값을 가져야 하니까요.)

그런데 위의 그래프 확인해보세요. $x > 2$ 에서는 두 개 이상의 점에서 만나는데요? 따라서 $x=m-1$ 는 선택할 수 없습니다. 따라서 $m+1=2$ 이어야 합니다. $m=1$ 이네요. 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요. 이러면 계속 증가하는 그래프니까 x 축에 평행하게 선을

그어서 단 한 번만 만나고 모든 y 값을 갖네요.

이제 n 의 값을 구해봅시다. 그냥 단순히 $f(x-1)+n$ 가 $(2, f(2))$ 를 지나는 거예요. $f(2)=6$ 이니 $f(1)+n=6$ 이어야 합니다. $f(1)=0$ 이므로 $n=6$ 이네요. 따라서 $m+n=7$ 입니다. 답은 ④번이네요.

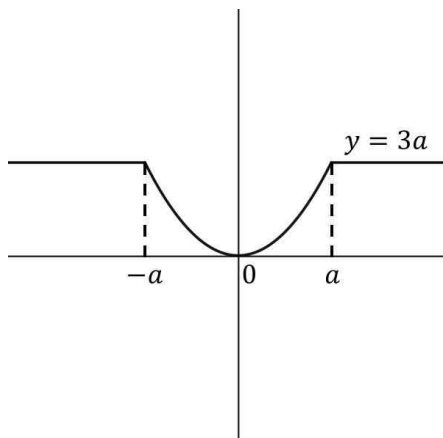
30. 정답 290

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$$a > 0 \text{ 인데 } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{a}x^2 & (-a \leq x \leq a) \\ 3a & (x < -a \text{ 또는 } x > a) \end{cases} \quad \text{입니다. 이때 } y = f(x) \text{의 그래프와 } x \text{축,}$$

$x = -3, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하라고 하네요.

일단 그래프부터 그려볼까요?



이렇게 됩니다.

이제 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축, $x = -3, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 해요. 그런데 3은 a 보다

큰가요? 아니면 작나요? 모르죠? 그러면 케이스를 나눠봐야겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a < 3$ 일 때

일단 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이에요. 그 말은 오른쪽만 넓이를 계산하고 그 넓이가 8의 절반인 4이면

되는 거죠. 그러면 넓이는 0부터 a 까지 $\int_0^a \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a = a^2$ 이고 a 부터 3까지는 직사각형의 넓이를 구하는

거니까 가로 $3-a$, 세로 $3a$ 해서 $3a(3-a) = -3a^2 + 9a$ 입니다. 총 $-2a^2 + 9a$ 인데 이게 4니까

$-2a^2 + 9a = 4$ 이고 $2a^2 - 9a + 4 = (2a-1)(a-4) = 0$ 입니다. $a < 3$ 이니까 $a = \frac{1}{2}$ 이네요.

2-2) $a \geq 3$ 일 때

이번엔 0부터 3까지 $\int_0^3 \frac{3}{a}x^2 = \left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3 = \frac{27}{a}$ 입니다. 이게 4니까 $\frac{27}{a} = 4$ 이고 $a = \frac{27}{4}$ 이네요. $a \geq 3$ 이죠?

따라서 모든 a 의 합은 $S = \frac{29}{4}$ 입니다. $40S = 290$ 이네요.

31. 정답 56

1) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$ 가 일차함수인데 $g(x) = \int_0^x (x-2)f(s)ds$ 입니다. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x = 0$ 을 넣으면

$g(0) = 0$ 이 됩니다. $x = 2$ 도 넣어보면 $g(2) = 0$ 이네요.

이후엔 미분해야겠죠? 미분하는 변수가 s 니까 $(x-2)$ 는 밖으로 빼고 $g(x) = (x-2) \int_0^x f(s)ds$ 를 미분하면

$g'(x) = (x-2)f(x) + \int_0^x f(s)ds$ 입니다. $f(x)$ 가 일차함수니까 $g'(x)$ 는 이차함수겠네요. $g(x)$ 는 삼차함수겠죠?

이때 실수 t 에 대하여 $(0, 0)$ 을 지나고 기울기가 t 인 직선 $y = tx$ 와 $y = g(x)$ 가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 한답니다. 이때 $g(k) = 0$ 을 만족시키는 모든 실수 k 에 대하여 $h(t)$ 는 $t = -k$ 에서 불연속이라네요.

일단 $g(k)=0$ 이 되는 k 는 2개가 있죠? 0과 2가 있어요. 그러면 $h(t)$ 는 $t=0$, $t=-2$ 에서 불연속이 되겠어요.

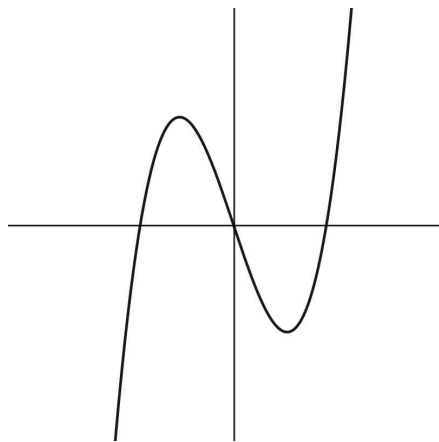
$h(t)$ 가 불연속이라는 건 어떤 의미일까요? $h(t)$ 는 $(0, 0)$ 을 지나고 기울기가 t 인 직선 $y=tx$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 개수라고 했었어요. 그러면 기울기가 t 에서 살짝만 바뀌어도 만나는 점의 개수가 변한다는 말이겠네요.

지금 $h(t)$ 는 $t=0$, $t=-2$ 에서 불연속이어야 하니까 기울기가 0일 때, -2 일 때 각각 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변해야 합니다. 그러면 천천히 그래프를 그려서 확인해봅시다.

2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 연속은 좌극한 우극한 함수값 확인

일단 $g(x)$ 는 $g(0)=g(2)=0$ 이에요. 그런데 $g(x)$ 는 삼차함수잖아요? 그러면 케이스가 두 가지가 있죠. x 축과 세 점에서 만나거나 한 점에서 접하고 한 점에서 만나는 거예요.

만약에 세 점에서 만난다고 해볼게요. 그냥 아무렇게나 그려보세요.

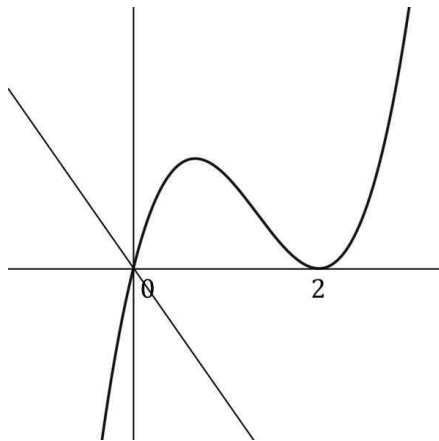


이렇게 됩니다. 이거 원점에서 기울기가 0인 직선 그려보세요. 기울기가

살짝 변하면 만나는 점의 개수가 변하나요? 변하지 않아요. x 축과 세 점에서 만나게 그래프를 그리면 모두 안 됩니다.

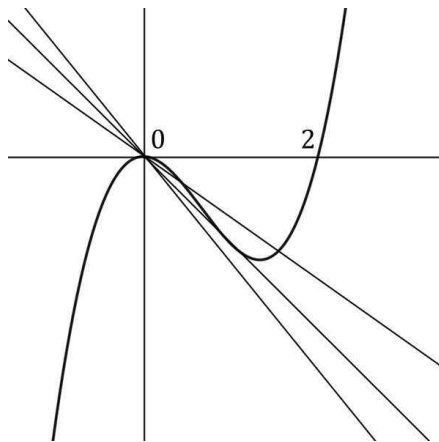
결국 $x=0$, $x=2$ 둘 중에 하나에서 접하고, 나머지 하나에서 만나는 그래프가 되어야겠네요. 조심해야 할 건 $g(x)$ 의 최고차항의 계수를 알려주지 않았다는 거예요. 무의식적으로 최고차항의 계수가 양수인 경우만 하지 않도록 조심하세요!

일단 양수인 경우부터 가봅시다.



이렇게 그리면 기울기가 -2 일 때 기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의

개수가 변하나요? 변하지 않네요. 이건 안 됩니다.



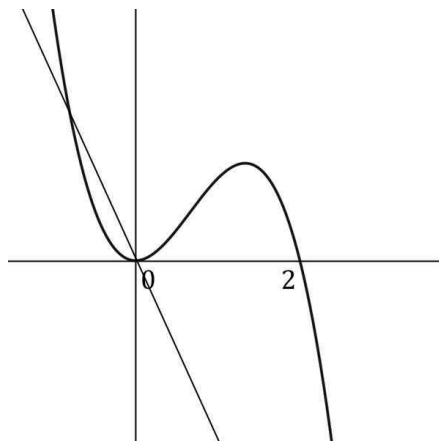
이렇게 그리면 가능합니다. 기울기가 -2 인 직선이 접한다면 기울기가

살짝 작으면 1개, 접하면 2개, 살짝 커지면 3개의 점에서 만나니까 불연속이 되죠. 기울기가 0일 때에도 마찬가지입니다. 되네요!

그냥 아예 $g(4)$ 의 값을 구해버릴게요. 일단 최고차항의 계수를 k 라 하면 $g(x) = kx^2(x-2)$ 이죠? 이 함수와 $-2x$ 가 $x=0$ 에서 그냥 만나고 한 점에서 접하니까 $kx^3 - 2kx^2 = -2x$ 라 하면

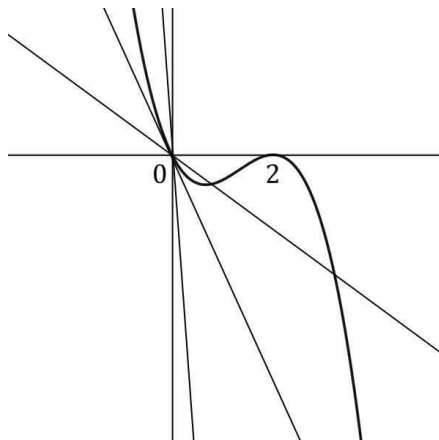
$kx^3 - 2kx^2 + 2x = x(kx^2 - 2kx + 2) = 0$ 에서 $kx^2 - 2kx + 2 = 0$ 은 중근을 가져야 합니다. 따라서 판별식이 0이어야 하므로 $k^2 - 2k = k(k-2) = 0$ 입니다. k 는 최고차항의 계수니까 0이 될 수 없으므로 $k=2$ 이네요. 따라서 $g(x) = 2x^2(x-2)$ 이고 $g(4) = 64$ 입니다.

계속 가봅시다. 이번엔 음수인 경우로 가볼게요.



이렇게 그리면 기울기가 -2 일 때 기울기를 살짝 변화시켜도 만나는 점의

개수가 변하지 않습니다.



이렇게 $x=0$ 에서 접선의 기울기가 -2 가 되도록 그리면 -2 일 때

기울기를 살짝 변화시키면 만나는 점의 개수가 변합니다. 기울기가 0 일 때도 마찬가지이구요.

일단 최고차항의 계수를 k 라 하면 $g(x)=kx(x-2)^2$ 입니다. $x=0$ 에서 접선의 기울기가 -2 이어야 하니까

미분하고 집어 넣으면 $4k=-2$ 입니다. $k=-\frac{1}{2}$ 이네요. $g(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)^2$ 이고 $g(4)=-8$ 입니다. 모든 값의

합은 $64-8=56$ 입니다.

32. 정답 ①

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수극한은 위아래 위아래 식 차수, 계수 비교

자연수 n 이 있습니다. n 에다 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠죠?

그리고는 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$ 이라네요. 일단 x 가 무한대로 가요. 그런데 아래 식의 차수는

2인데 극한값이 2로 존재하네요? 그러면 위 식의 차수 역시 2로 아래 식과 같아야 해요. 그런데 위 식은 $f(x) - x^3$ 입니다. 삼차식이 있으니까 없애줘야겠죠? 따라서 $f(x) = x^3 + \dots$ 입니다.

이러면 $f(x) - x^3$ 은 이차식이 되었어요. 그 다음에는 위와 아래의 계수를 비교해야겠죠?

위 식의 최고차항의 계수 / 아래 식의 최고차항의 계수 가 극한값인데 이게 2입니다. 이때 아래 식의 최고차항의 계수가 1이니까 위 식의 최고차항의 계수는 2여야겠죠? 따라서 $f(x) - x^3 = 2x^2 + \dots$ 이고 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ 입니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수극한은 논리다, 함수 구하기 - 인수정리

이때 $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ \frac{1}{n} & (f(x) = 0) \end{cases}$ 이라고 합니다. 애가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한대네요.

일단 해석부터 해볼게요. $f(x)$ 가 지금 분모에 있어요. 그래서 $f(x) \neq 0$ 이면, 즉 분모가 0이 아니라면

$g(x) = \frac{x-1}{f(x)}$ 입니다. 그리고 $f(x) = 0$ 일 때는 $g(x) = \frac{1}{n}$ 이에요.

일단 $f(x) \neq 0$ 인 부분은 살펴볼 필요가 없어요. $f(x)$ 가 다항함수라 분모에 가 있어도 어차피 연속일 테니까요. 따라서 우리는 $f(x) = 0$ 인 부분만 살펴보면 됩니다.

$f(x) = 0$ 의 한 실근을 k 라고 해볼게요. 지금 $g(x)$ 는 $f(x) = 0$ 이 되는 경계에서 함수가 바뀌잖아요? 이런 함수가 연속이 되려면 $x = k$ 에서 좌극한 값과 우극한 값, 그리고 함숫값이 모두 같아야 합니다. 결국 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{x-1}{f(x)}$ 과 $\frac{1}{n}$ 이 같아야 하겠네요. 이게 $f(x) = 0$ 이 되는 모든 실근에 대해서 적용되어야 합니다.

만약 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 3개라고 해볼게요. 대충 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 라고 해보죠. 그러면

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \lim_{x \rightarrow b} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \lim_{x \rightarrow c} \frac{x-1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 모두 $\frac{1}{n}$ 이어야 합니다.

그런데 a, b, c 중에 하나가 1이라고 하더라도 저 셋 중에 최소한 2개는 ∞ 혹은 $-\infty$ 가 되어야 하지 않나요?

분모가 0으로 가잖아요. 값이 $\frac{1}{n}$ 이 나올 수가 없어요. 서로 다른 두 개의 실근을 갖는데 하나는 중근인

$f(x) = (x-a)(x-b)^2$ 같은 경우도 마찬가지입니다.

그런데 실근이 아예 없을 수는 없죠. 삼차함수는 x 축과 한 번은 만나야 하니까요. 그렇다면 남은 건 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우겠네요.

그 실근을 k 라고 하면 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{x-1}{(x-k)(x^2+\alpha x+\beta)} = \frac{1}{n}$ 입니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재합니다.

따라서 분자도 0으로 가서 위아래를 같은 인수로 나눠줘야겠죠? 따라서 $k=1$ 입니다.

$f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$ 이네요.

그런데 아까 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 라고 했었잖아요? $f(x)=(x-1)(x^2+\alpha x+\beta)$ 의 이차항의 계수가 2여야 하니까 $\alpha-1=2$ 이고 $\alpha=3$ 이네요. $f(x)=(x-1)(x^2+3x+\beta)$ 입니다.

아까 실근이 하나이고 나머지는 허근인 경우여야 한다고 했었죠? 따라서 $x^2+3x+\beta$ 는 허근을 가져야 합니다.

판별식이 0보다 작아야 하니까 $9-4\beta < 0$ 이고 $\beta > \frac{9}{4}$ 이네요.

이제 실제로 극한값을 계산해볼까요? $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+3x+\beta)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+3x+\beta} = \frac{1}{\beta+4} = \frac{1}{n}$ 이니까

$\beta+4=n$ 입니다. n 은 자연수이죠? 그런데 $\beta > \frac{9}{4}$ 여야 하니까 $\beta+4=n > \frac{9}{4}+4$ 입니다. 따라서 최소의 n 은 7이네요. 답은 ①번입니다.

33. 정답 ②

1) 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a 는 첫항, d 는 공차)로 놓기, 조건해석

첫째항이 -45 이고 공차가 d 인 등차수열이 있습니다. 구하라는 게 자연수 d 이니까 d 는 자연수여야 하네요.

그럼 바로 $a_n = -45 + d(n-1)$ (d 는 자연수)라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $|a_m| = |a_{m+3}|$ 인 자연수 m 이 존재한답니다. 일단 지금 구조가 -45 부터 시작해서 n 이 증가할수록 점점 a_n 의 값이 증가하는 형태잖아요? 그러면 언젠가는 양수가 되는 지점도 있겠죠. a_m 과 a_{m+3} 이 모두 양수라고 생각해 보세요. 무조건 a_m 은 a_{m+3} 보다 작아요. 왜냐면 공차가 자연수라 n 이 증가할수록 a_n 의 값이 커지니까요. a_m 과 a_{m+3} 이 양수라면 $a_m = a_{m+3}$ 은 절대로 성립할 수 없어요. 이 둘이 모두 음수인 경우도 마찬가지죠.

따라서 a_m 은 음수여야 하고 a_{m+3} 은 양수여야 합니다. 따라서 $-a_m = a_{m+3}$ 이어야 하네요. 수를 넣어서

정리해보면 $45 - d(m-1) = -45 + d(m+2)$ 이고 $90 = d(2m+1)$ 입니다. d 는 자연수죠? m 도 자연수이구요.
 그러면 자연수 $\times$ 자연수가 90이 되려면 1×90 , 2×45 , 3×30 , 5×18 , 6×15 , 9×10 중 하나여야 하겠네요.
 그런데 $2m+1$ 은 3 이상의 홀수니까 가능한 경우는 d 와 $2m+1$ 순서대로
 $(2, 45)$, $(6, 15)$, $(10, 9)$, $(18, 5)$, $(30, 3)$ 만 가능하네요.

(나)조건에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k > -100$ 입니다. 그러니까 $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 아무리 작아도 -100 보다는
 커야 한다는 거죠?

생각해봅시다. $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 가장 작아지는 부분이 어디일까요? 마지막으로 음수가 되고 다음 항은 양수로 바뀌는
 부분에서 $\sum_{k=1}^n a_k$ 이 가장 작아질 거예요. 음수를 더하면 가장 작아지는데 양수를 더하면 커지니까요. 그런데 아까
 a_m 이 음수이고 a_{m+3} 이 양수라고 했었잖아요? 그러면 최소가 되는 부분은 m 과 $m+2$ 사이에 있겠네요.

여기까지 생각하고 아까 구해놓은 케이스 별로 나눠서 해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) $(2, 45)$ 일 때

$d=2$ 이고 $m=22$ 이네요. 근데 이건 딱 봐도 아닐 것 같지 않나요? 시작이 -45 인데 공차가 2면 a_3 까지만
 와도 더하면 벌써 값이 -100 이 넘는데요?

2-2) $(6, 15)$ 일 때

$d=6$, $m=7$ 입니다. 이것도 뭔가... $a_1 = -45$, $a_2 = -39$, $a_3 = -36$ 를 더하면 -100 이 넘네요.

2-3) $(10, 9)$ 일 때

$d=10$, $m=4$ 입니다. 이건 확인해봐야겠네요. $a_1 = -45$, $a_2 = -35$, $a_3 = -25$ 를 더하면 -100 이 넘네요.

2-4) $(18, 5)$ 일 때

$d=18$, $m=2$ 입니다. 이건 되겠네요. $a_1 = -45$, $a_2 = -27$, $a_3 = -9$, $a_4 = 9$ 이니까 아무리 작아도
 -81 이네요. 이건 됩니다! $d=18$ 하나 있네요.

2-5) $(30, 3)$ 일 때

$d = 30$, $m = 1$ 입니다. $a_1 = -45$, $a_2 = -15$, $a_3 = 15$ 이니까 아무리 작아도 -60 이죠. 되네요. $d = 30$ 도 됩니다.

따라서 모든 자연수 d 의 합은 $18 + 30 = 48$ 입니다. 답은 ②번이네요.

34. 정답 192

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

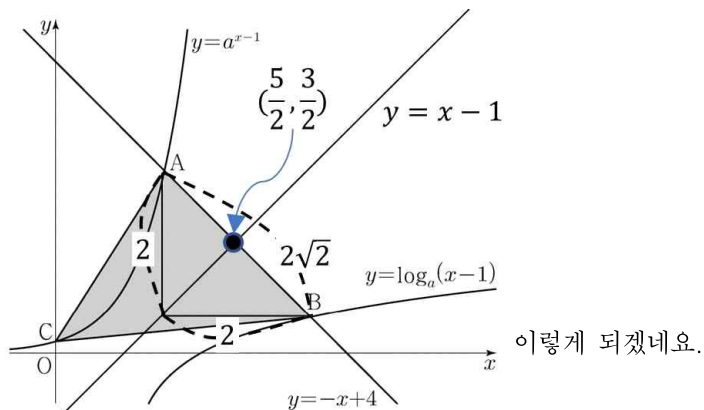
$a > 1$ 인데 $y = -x + 4$ 가 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 과 만나는 점을 각각 A, B라고 한답니다. 그림에 표시되어 있죠?

이거 함수를 보면 대칭 관계라는 걸 확인할 수 있네요. $y = a^x$ 와 $y = \log_a x$ 는 서로 $y = x$ 축 대칭 관계잖아요?

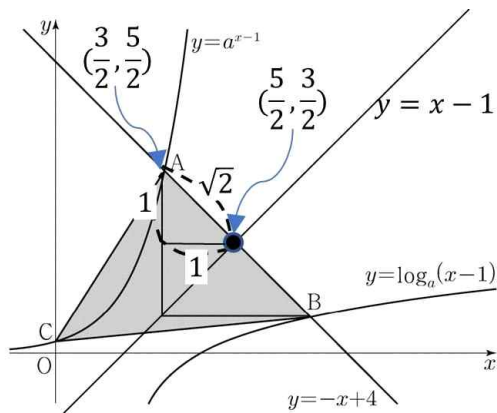
그런데 이 두 함수 모두 x 자리에 $x-1$ 이 들어가 있으니깐 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 는 $y = x-1$ 축

대칭이죠. 그러면 $y = x-1$ 과 $y = -x+4$ 가 만나는 점은 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 겠네요.

거기에 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 랍니다. 지금 $y = -x+4$ 의 기울기는 -1 이잖아요? 그러면



그런데 여기서 A, B 역시 $y = x-1$ 축에 대하여 대칭이니까 $y = x-1$, $y = -x+4$ 가 만나는 점과 A와의 거리는 $y = x-1$, $y = -x+4$ 가 만나는 점과 B와의 거리와 같죠. $\sqrt{2}$ 입니다. 그럼 이것도 마찬가지로



이렇게 됩니다. 따라서 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 입니다.

$y = a^{x-1}$ 이 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 를 지나니까 $a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ 이고 $a = \frac{25}{4}$ 이네요.

이제 삼각형 ABC의 넓이를 구해야 해요. 이거는 밑변을 $\overline{AB}$ 를 고정시킨 후에 기울기가 1이고 점 C를 지나는 직선이 $y = -x + 4$ 와 만나는 점과 C와의 거리를 높이로 해서 구하면 되겠죠?

일단 C의 좌표는 $y = \left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$ 가 y 축과 만나는 점이니까 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$ 입니다. 기울기가 1이고 점 C를 지나

직선은 $y = x + \frac{4}{25}$ 이구요. $y = -x + 4$ 와 만나는 점은 $\left(\frac{48}{25}, \frac{52}{25}\right)$ 입니다. $\left(\frac{48}{25}, \frac{52}{25}\right)$ 과 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$ 의 거리는

$\frac{48\sqrt{2}}{25}$ 이죠. 아까 기울기가 1일 때는 x 값(혹은 y 값)의 차이에 $\sqrt{2}$ 를 곱했잖아요. 따라서

$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25} = S$ 입니다. $50S = 192$ 이네요.

35. 정답 2

1) 문제해석

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있는데 원점을 지나고 $f(1-x) = -f(1+x)$ 를 만족시킨답니다. 이거 어디서 많이 봤죠?

넘기면 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 이 되고 2로 나누면 $\frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = 0$ 가 됩니다. $1-x$ 와 $1+x$ 를 더하고

2로 나누면 1이 되죠. 이 형태는 결국 $f(x)$ 가 $(1, 0)$ 대칭이라는 말이 됩니다. 1에서 x 만큼 떨어진 곳에서의 함숫값과 $-x$ 만큼 떨어진 곳에서의 함숫값의 부호가 항상 반대가 되어야 하고, 두 함숫값의 중점은 0이 되어야

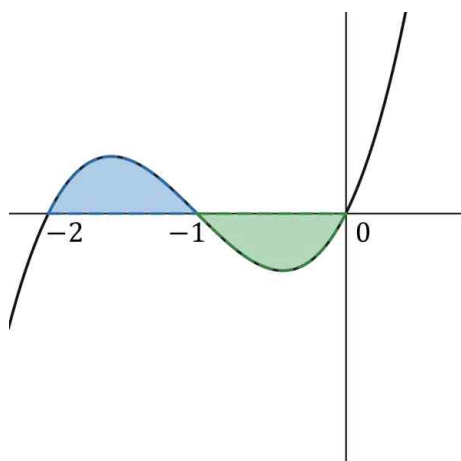
하니까 둘은 점 $(1, 0)$ 을 중심으로 대칭되는 형태가 되겠죠. $f(1)=0$ 이겠어요.

이때 $f(0)=0$ 이잖아요? $(1, 0)$ 대칭인데 $(0, 0)$ 을 지나면 당연히 $(2, 0)$ 도 지나야죠. 인수정리에 의해 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ 입니다.

2) 정적분 관찰

$y=f(x)$ 와 $y=-6x^2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 일단 만나는 부분부터 찾아봐야겠어요.

$f(x)-(-6x^2)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$ 이니까 $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ 에서 만나네요. 이거 근데 그래프 그려보면



이렇게 되네요. 이거 $(-1, 0)$ 대칭이죠? x 축과 만나는 점간의 간격이

모두 같잖아요. 대칭이라는 거죠. 그러면 -2 에서 -1 , -1 에서 0 까지 각각 적분할 필요없이 -1 에서 0 까지만 적분하고 $\times 2$ 해버리면 되겠어요. 대칭이니까 적분값 역시 부호가 반대가 되겠죠. 따라서

$$2 \left| \int_{-1}^0 f(x) + 6x^2 dx \right| = 2 \times \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 \right]_{-1}^0 \right| = \frac{1}{2} \text{입니다. } 4S = 2 \text{입니다.}$$

36. 정답 ③

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰

$a > 0$ 인데 $\left\{ x \mid -\frac{a}{2} < x \leq a, x \neq \frac{a}{2} \right\}$ 에서 $f(x) = \tan \frac{\pi x}{a}$ 이랍니다. 그림도 있네요.

이때 $y=f(x)$ 위를 지나는 세 점 O , A , B 이 있는데 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 C 라고 한답니다. ABC 가 정삼각형일 때 ABC 의 넓이를 구하랍니다.

일단 잘 생각을 해보죠. $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ 에서 $f(x)$ 는 원점대칭함수예요. 이 상황에서 원점을 지나는 직선이 $y=f(x)$ 와 점 A, B에서 만난다는 건 A, B의 중점은 원점이 된다는 말이겠죠. 원점을 지나는 직선 역시 원점대칭함수잖아요. 다시 표현하면 A, B의 x 좌표는 부호가 반대입니다.

또한 C는 A에서 x 축에 평행한 직선을 그어서 $y=f(x)$ 와 만나는 점이에요. $f(x)$ 는 주기가 있죠? a 가 주기입니다. 그러면 A와 C의 x 좌표의 차이는 a 겠네요. 일단 정삼각형의 한 변의 길이는 나왔어요.

마지막으로 B와 C를 살펴봐야겠네요. A와 B가 점 (0, 0)에 대하여 대칭이었잖아요? 일단 A의 x 좌표를 $-t$ 라 하면 B의 x 좌표는 t 입니다. 이때 삼각형 ABC는 정삼각형이니까 A와 B의 x 값의 차이는 C와 B의 x 값의 차이와 같아야겠죠? A와 C의 x 값의 중점이 B의 x 값이 될 테니까요. 정삼각형이잖아요. 따라서 C의 x 좌표는 B의 x 좌표인 t 에 B의 x 좌표와 A의 x 좌표의 차이인 $2t$ 를 더한 $3t$ 가 되어야 합니다. 그런데 아까 A와 C의 x 좌표의 차이는 a 라고 했었죠? 따라서 $3t - (-t) = a$ 이고 $t = \frac{a}{4}$ 입니다.

$A\left(-\frac{a}{4}, \tan -\frac{\pi}{4}\right), B\left(\frac{a}{4}, \tan \frac{\pi}{4}\right), C\left(\frac{3a}{4}, \tan \frac{3\pi}{4}\right)$ 이네요.

아까 정삼각형 한 변의 길이는 a 라고 했어요. 그러면 $\overline{AB} = a$ 여야겠죠? 선분 AB도 정삼각형의 한 변이니까요. 그럼 이거는 점과 점 사이의 관계를 이용해야겠어요.

그런데 사실 이거는 굳이 그러지 않아도 돼요. 왜냐면 A, B는 원점 대칭이잖아요. $\overline{AB} = a$ 는 사실상 $2\overline{OB} = a$ 와 같죠. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ 이니까 피타고라스의 정리에 의하여 $\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ 입니다. $a^2 = \frac{16}{3}$ 이네요.

이제 ABC의 넓이를 구해봅시다. 공식은 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이잖아요? 따라서 넓이는 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 입니다. 답은 ③번이네요.

37. 정답 ②

1) 그림 있으면 그림 보면서

원 C_1, C_2 가 있는데 중심이 각각 O_1, O_2 이고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$ 입니다. 같은 원 두 개네요. 이때 원 C_1

위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 있어요. 그림에 보이죠? 그리고 A, O_1 , O_2 가 한 직선 위에 있고, C, O_2 , D가 한 직선 위에 있습니다. 이것도 그림에서 확인할 수 있어요.

이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$ 라고 하자고 합니다. 이것도 보이네요.

$\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$ 이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 일 때 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하려고 합니다. 이제 과정을 볼게요.

$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$ 라네요. 이걸 따라올 수 있죠? 그림에서 180° 를 두 개의 각으로 찢은 거잖아요. 그리고 $\angle O_1O_2D = \theta_3$ 이구요. $\angle CO_2O_1 = \pi - \theta_3$ 이네요. 이때 삼각형 CO_2O_1 는 이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름의 길이니까요. 그러면 $\angle CO_2O_1 = \pi - \theta_3 = \angle O_2CO_1$ 겠네요. 삼각형의 세 각의 합은 π 이니까 $\angle O_1O_2C = \pi - \theta_3 = \angle O_2CO_1 = \theta_3 - \theta_2$ 입니다. 따라서 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$ 이네요. 음... 굳이 알 필요는 없었을까요? 일단 좀 더 가봅시다.

$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$ 와 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 를 정리하면 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$ 가 되죠? $\angle BO_1C = \theta_1$ 입니다. 이거는 180° 를 세 각으로 찢은 거네요. θ_1 , θ_2 으로 찢으면 나머지 $\angle BO_1C$ 가 남죠. 그런데 $2\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \theta_1 + \theta_2 = \pi$ 이니까 $\angle BO_1C = \theta_1$ 가 되겠네요. 거기에 삼각형 BAO_1 과 CBO_1 도 합동입니다. 각이 θ_1 로 같고 두 변의 길이가 반지름이잖아요. 요정도 확인해주자구요.

그리고 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ 라고 합니다. 이거도 그림 보면 알 수 있죠? 그래서 삼각형 O_1O_2B 와 O_2O_1D 는 합동이랍니다. 일단 한 각이 θ_3 로 같고, $\overline{O_1O_2}$ 라는 변을 공유하고, $\overline{BO_1} = \overline{O_2D}$ 이죠.

$\overline{AB} = k$ 라 할 때 $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$ 라네요. 일단 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$ 이죠? 거기에 삼각형 O_1O_2B 와 O_2O_1D 는 합동이니까 $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$ 가 되네요. 이때 $\overline{AO_2} = \boxed{\text{(가)}}$ 랍니다.

그림을 잘 보세요. 지름을 한 변으로 하는 원에 내접하는 삼각형의 한 각은 90° 잖아요? 그러면 삼각형

ABO_2 에서 $\angle O_2BA = \frac{\pi}{2}$ 이네요. 이러면 피타고라스의 정리로 $\overline{AO_2} = \boxed{\text{(가)}}$ 를 구할 수 있죠?

$k^2 + (2\sqrt{2}k)^2 = 9k^2$ 이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{\text{(가)}} = f(k) = 3k$ 입니다.

$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$ 이므로 $\cos \frac{\theta_1}{2} = \boxed{\text{(나)}}$ 라네요. 일단 삼각형 BAO_1 은 이등변삼각형이니까

$\angle O_1BA = \frac{\pi - \theta_1}{2}$ 입니다. 그런데 $\angle O_2BA = \frac{\pi}{2}$ 이니까 $\angle O_2BO_1 = \frac{\theta_1}{2}$ 입니다. 이때 삼각형 BO_1O_2 도

이등변삼각형이죠? 두 변의 길이가 반지름으로 같네요. 따라서 $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$ 가 됩니다. 아무튼

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = p \text{입니다.}$$

2) 삼각형은 정해져 있다 : 내부 - 두 변의 길이와 한 각

삼각형 O_2BC 에서 $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$ 이라네요. $\overline{BC} = k$ 는 삼각형 BAO_1 과 CBO_1 가

합동인 거에서 나온 거겠네요. $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$ 는 $\angle CO_2O_1 = \theta_1$ 를 $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$ 로 쪼개고 남은 나머진데요.

그러므로 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$ 입니다. “이므로”가 나왔으니까 알려준 거 써먹으란 얘기겠죠?

삼각형 CO_2B 에서 두 변의 길이 $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$ 와 한 각 $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$ 을 아니까 코사인법칙을

$$\text{사용하면 } \cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{(2\sqrt{2}k)^2 + \overline{O_2C}^2 - k^2}{2 \times 2\sqrt{2}k \times \overline{O_2C}} \text{입니다. 이거 정리하면 } (3\overline{O_2C} - 7k)(\overline{O_2C} - 3k) = 0 \text{입니다.}$$

이때 삼각형 CO_2B 의 빗변의 길이는 $2\sqrt{2}k$ 인데 이걸 초과할 수는 없으니까 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)} = g(k) = \frac{7}{3}k$ 입니다.

이제 마지막 $f(p) \times g(p)$ 를 구해봅시다. $f(k) = 3k$, $g(k) = \frac{7}{3}k$, $p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 입니다. 따라서 $\frac{56}{9}$ 이네요. 답은

②번입니다.

38. 정답 678

1) 조건해석, 자연수 보이면 숫자 넣기

수열 $\{a_n\}$ 이 있는데 (가)조건에서 $|a_1| = 2$ 입니다. 그리고 (나)조건에서 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$ 이라네요. 이거 아까

$|a_1| = 2$ 랑 연결해서 n 에다 숫자 넣어보면 $|a_2| = 4$, $|a_3| = 8$, $|a_4| = 16$, ...가 되는 것 아닌가요? 그러면

$|a_n| = 2^n$ 이네요?

(다)조건에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$ 입니다. 어라...? 우리가 아는 건 절댓값밖에 없어요. 그런데 절댓값 풀고 다 더한 게 -14 입니다. 이때 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 를 구합니다. 음.... 굳이 홀수항만 더하라고 한 이유가 있을까요?

아무튼 일단 다 나열해볼게요.

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \\ -2 & -4 & -8 & -16 & -32 & -64 & -128 & -256 & -512 & -1024 \end{array}$$

이렇게 됩니다. 위나 아래 둘 중 하나를 고르면 되는 거예요.

생각을 좀 해봅시다. 만약 $a_{10} = 1024$ 라면? 나머지가 다 $(-)$ 라고 하더라도 다 더하면 2가 됩니다. 이러면 안 되죠? 우리는 -14 를 만들어야 해요. 따라서 $a_{10} = -1024$ 입니다.

또 생각을 해보죠. 만약 $a_9 = -512$ 라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -1026 이 됩니다. 그러면 -14 를 만들 수 없어요. 따라서 $a_9 = 512$ 입니다.

계속 가볼까요? 만약 $a_8 = -256$ 이라면? 그러면 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -514 가 됩니다. 이러면 또 -14 를 만들 수 없죠? 따라서 $a_8 = 256$ 입니다.

$a_7 = -128$ 이라면? 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -258 이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_7 = 128$ 입니다.

$a_6 = -64$ 라면? 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -130 이 됩니다. 따라서 $a_6 = 64$ 입니다.

$a_5 = -32$ 라면? 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -66 이 됩니다. 따라서 $a_5 = 32$ 입니다.

$a_4 = -16$ 라면? 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -34 이 됩니다. 따라서 $a_4 = 16$ 입니다.

이제 여기서부터는 조심해야 해요. 왜냐면 지금까지 다 더하면 -16 이거든요. 우리가 만들어야 하는 건 -14 죠? $a_3 = -8$ 라면? 나머지가 다 $(+)$ 라고 하더라도 다 더하면 -18 이 됩니다. 안 되네요. 따라서 $a_3 = 8$ 입니다.

여기까지 다 더하면 -8 입니다. 이제 남은 건 2와 4예요. 이거는 그냥 $(-)$ 로 다 더하면 되지 않나요? 그럼 $-8 - 2 - 4 = -14$ 가 나오죠. 따라서 $a_1 = -2$, $a_2 = -4$ 입니다.

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = -2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 678 \text{입니다.}$$

39. 정답 ④ [2023년 3월 13]

1) 조건해석

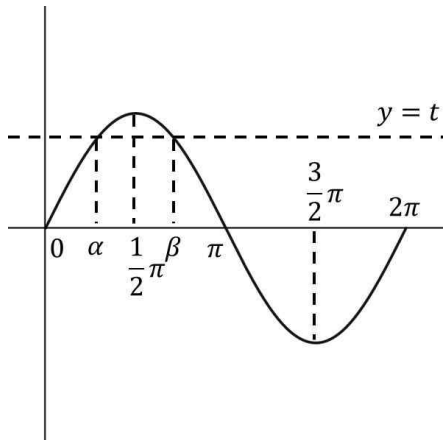
$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\sin x$ 가 있다고 합니다. 이때 $0 \leq a \leq 2$ 인데 (가)조건에서 $\{g(a\pi)\}^2=1$ 라고 하네요. 그러면 $g(a\pi)=1$ 이거나 $g(a\pi)=-1$ 이죠? $g(x)=\sin x$ 이므로 가능한 a 는 $\frac{1}{2}$ 이거나 $\frac{3}{2}$ 입니다.

2) 합성함수는 치환

(나)조건에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 $f(g(x))=0$ 의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$ 라고 하네요. 일단 $g(x)=t$ 라고 치환하면 $0 \leq x \leq 2\pi$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 입니다. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin x$ 의 함숫값은 -1 부터 1 까지의 범위 내에 있으니까요.

이렇게 되면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t)=0$ 가 되는 t 를 찾은 후, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin x=t$ 가 되는, 즉 $y=\sin x$ 와 $y=t$ 가 만나게 되는 x 값을 찾는 두 개의 과정을 거치는 문제가 되는 거예요.

이때 잘 생각해봐야 할 점은 합이 $\frac{5}{2}\pi$ 라는 점입니다. $y=\sin x$ 는 축에 대하여 대칭이라는 특징이 있어요.

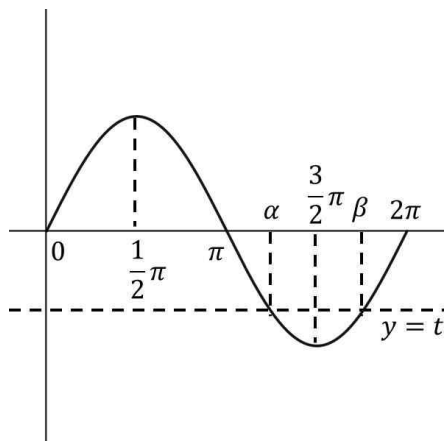


이 그림에서 이렇게 $y=t$ 를 설정하면 $g(x)=t$ 가 되는 x 의 합은 축의

x 값의 두 배인 π 이 됩니다. 왜냐하면 $g(x)=\sin x$ 는 $x=\frac{1}{2}\pi$ 라는 축에 대하여 대칭이므로 $x=\frac{1}{2}\pi$ 에서

$x=\alpha$ 까지의 거리와 $x=\frac{1}{2}\pi$ 에서 $x=\beta$ 까지의 거리가 같거든요. 따라서 $\frac{1}{2}\pi-\alpha=\beta-\frac{1}{2}\pi$ 이고

$\alpha+\beta=\pi$ 입니다. 이걸 축의 x 값의 두 배죠.



이렇게 설정해도 마찬가지로입니다. 축의 두 배인 3π 가 되죠.

$y = t = 0$ 으로 설정해도 마찬가지로요.

그런데 합은 $\frac{5}{2}\pi$ 이므로 $\frac{5}{2}\pi$ 를 초과하는 후자의 경우는 불가능합니다. 그러면 전자의 π 에 무언가를 더해야

한다는 거겠죠. $\frac{5}{2}\pi = \pi + \frac{3}{2}\pi$ 이죠? 그리고 $\sin x = t$ 를 만족시키는 x 가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 t 는 -1 이구요. 따라서 조건을

만족시키는 t 는 $0 < t < 1$ 에서 하나, $t = -1$ 이 되어야 합니다. $\sin x = t$ 를 만족시키는 t 가 -1 이므로

$f(t) = 0$ 를 만족시키는 t 역시 -1 이고, 따라서 $f(-1) = 0$ 입니다.

3) 케이스 분류

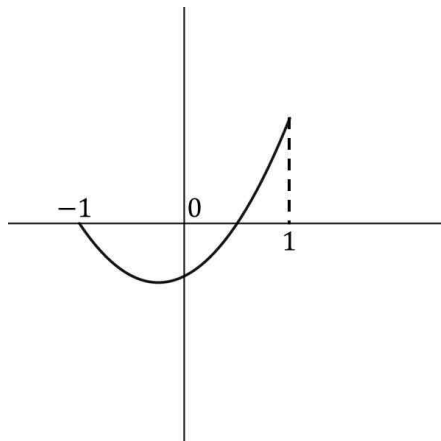
이때 $a = \frac{1}{2}$ 이거나 $a = \frac{3}{2}$ 이잖아요? 각각 하나씩 해보고 $f(-1) = 0$ 이고 $f(t) = 0$ 를 만족시키는 t 가

$0 < t < 1$ 에 있는지 확인해봅시다.

3-1) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + b$ 인데 $f(-1) = 0$ 이므로 $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 입니다. 축이 $x = -\frac{1}{4}$ 이고

$(0, -\frac{1}{2})$, $(1, 1)$ 를 지나는 그래프를 그려보면



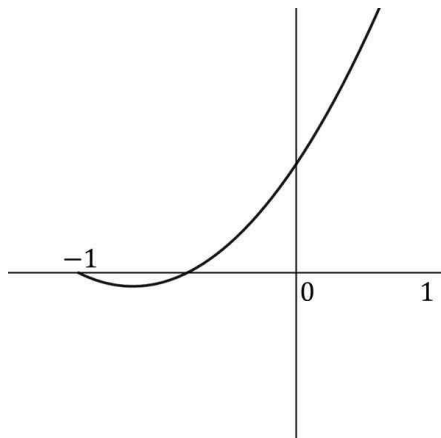
이렇게 됩니다. x 축과 만나는 점이 0과 1 사이에 있네요? 조건에

부합합니다! 따라서 $f(2) = \frac{9}{2}$ 입니다. 답은 ④번이네요.

3-2) $a = \frac{3}{2}$ 일 때

이미 답은 알지만 왜 이 경우는 안 되는지 확인은 해볼게요. $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + b$ 인데 $f(-1) = 0$ 이므로

$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 입니다. 축이 $x = -\frac{3}{4}$ 이고 $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 3)$ 를 지나는 그래프를 그려보면



이렇게 됩니다. x 축과 만나는 점이 0과 1 사이에 없습니다. 조건에

부합하지 않네요.

40. 정답 66 [2023년 3월 20]

1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

삼차함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$ 인 삼차함수라고 합니다. 이때 양수인 p 와 (가)조건에서

$$g'(0)=0, \text{ (나)조건에서 } g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases} \text{인 } g(x) \text{가 있다고 하네요.}$$

일단 $g'(0)=0$ 이라는 건 $g(x)$ 는 최소한 $x=0$ 에서는 미분가능하다는 거죠? 또한 $x=0$ 에서 접선의 기울기가 0이어야 합니다. 그 전에 $g(x)$ 부터 해석해볼게요.

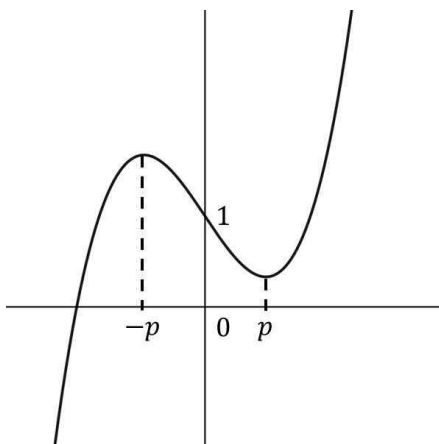
$$\text{먼저 } g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x < 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases} \text{는 } x < 0 \text{에서는 } g(x)=f(x-p)-f(-p) \text{입니다. } x=0 \text{을 넣으면}$$

$g(0)=0$ 이 나오네요. 그리고 $f(x)$ 라는 함수를 p 만큼 오른쪽으로 옮긴 다음에 그걸 $f(-p)$ 만큼 위아래로 옮긴 함수입니다.

또한 $x \geq 0$ 에서는 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 입니다. 이 역시 마찬가지로 $x=0$ 을 넣으면 $g(0)=0$ 이네요. 이쪽은 $f(x)$ 라는 함수를 p 만큼 왼쪽으로 옮긴 다음에 그걸 $f(p)$ 만큼 위아래로 옮긴 함수입니다.

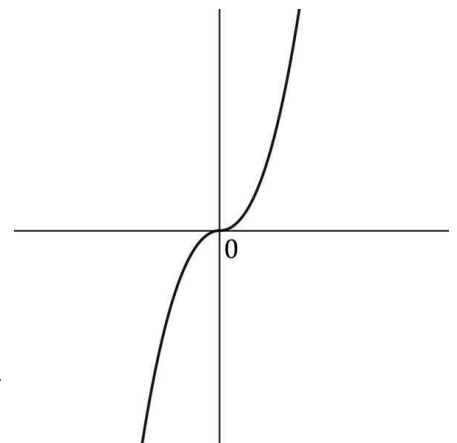
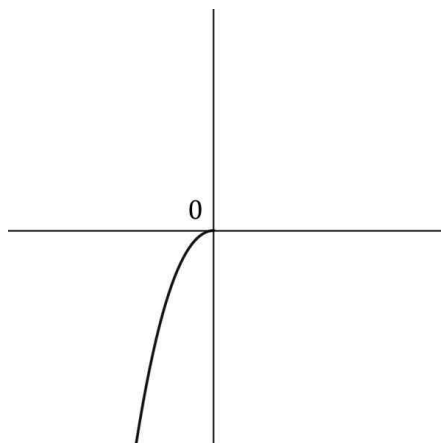
또한 아까 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서는 미분가능하고 그 접선의 기울기가 0이어야 한다고 했었죠? 먼저 $x < 0$ 에서는 $g(x)=f(x-p)-f(-p)$ 이므로 접선의 기울기는 $f'(-p)$ 이고 이 값은 0이어야 합니다. $f'(-p)=0$ 이네요.

$x \geq 0$ 에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$ 이고 접선의 기울기는 $f'(p)$ 이고 이 값은 0이어야 하므로 $f'(p)=0$ 입니다. 이러면 $f(x)$ 는



이런 함수겠네요. 이제 $g(x)$ 를 그려보죠. 먼저 $x < 0$ 에서는 함수를

p 만큼 오른쪽으로 옮긴 다음에 원점을 지나도록 설정하고

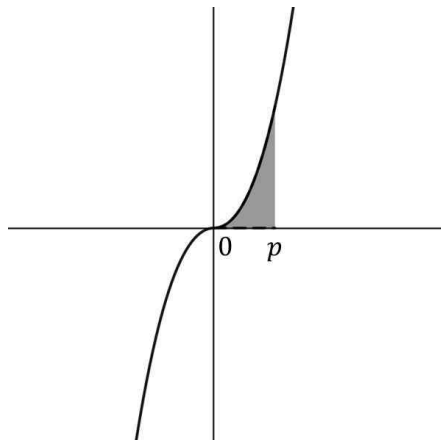


$x \geq 0$ 부분도 마찬가지로 해보면

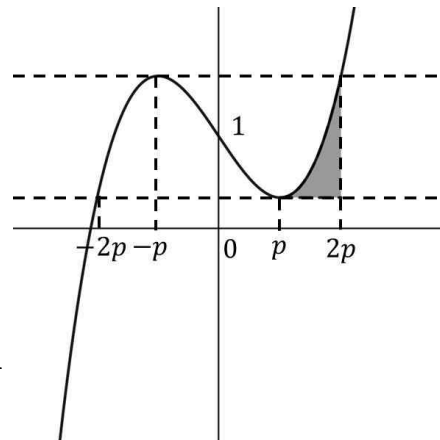
이렇게 되겠네요!

2) 정적분 관찰

이때 $\int_0^p g(x)dx = 20$ 라고 합니다. 일단 $g(x)$ 를 잘 관찰해보세요. $x \geq 0$ 에서 $g(x)$ 는 $x \geq p$ 에서 $f(x)$ 와 같은 형태잖아요? 애초에 $f(x)$ 를 p 만큼 왼쪽으로 움직인 다음에 $x \geq 0$ 에서 잘라낸 함수가 $g(x)$ 니까요. 단순한 평행이동이기 때문에 범위만 대응시켜주면 정적분 값은 같아야 합니다. 그러니까 다시 말하면



색칠된 부분과



색칠된 부분의 값이

동일해야 한다는 거죠.

일단 색칠된 부분을 구해볼까요? 저 색칠된 부분을 구하는 건 사실상 $f(x)$ 를 아래로 내려서 $x=p$ 에서 x 축과 접하게 만든 후 p 부터 $2p$ 까지 정적분하는 것과 같죠? 따라서

$\int_0^p g(x)dx = 20 = \int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx$ 입니다. 이때 평행이동을 해도 정적분 값은 동일하다는 논리를

사용해볼게요. 지금 우리가 구하는 건 $\int_p^{2p} (x-p)^2(x+2p)dx = 20$ 인데 어차피 정적분 식의 x 값을 전부 p 만큼

왼쪽으로 밀어버려도 값은 동일하겠죠? 따라서 $\int_0^p x^2(x+3p)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + px^3 \right]_0^p = \frac{5}{4}p^4 = 20$ 가 됩니다.

$p^4 = 16$ 이고 $p > 0$ 이므로 $p = 2$ 이네요.

3) 함수 구하기 - 차함수

$f(x)$ 는 $y = f(p) = f(2)$ 와 $x = p = 2$ 에서 접하고 $x = -4$ 에서 만나므로 차함수에 의하여

$f(x) - f(2) = (x - 2)^2(x + 4)$ 이고 $f(x) = (x - 2)^2(x + 4) + f(2)$ 입니다.

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $f(0) = 16 + f(2) = 1$ 이고 $f(2) = -15$ 이네요. $f(x) = (x - 2)^2(x + 4) - 15$ 이고 $f(5) = 66$ 입니다.

41. 정답 729 [2023년 3월 22]

1) 문제해석, 절댓값 함수

먼저 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수라고 합니다.

이때 $g(x) = |f(x) - t|$ 라고 하네요. 이걸 $f(x)$ 를 t 만큼 아래로 내리고 절댓값을 씌운 함수죠?

이때 $h(t)$ 라는 함수가 있는데 애는 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$ 의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k 의 개수라고 합니다.

이건 뭘까요? 천천히 해석해봅시다.

먼저 “극한값이 존재한다”는 건 좌극한값과 우극한값이 동일하다는 의미입니다. 일단 분모인 $x - k$ 에 절댓값이

있어요. 이거부터 풀어보죠. 먼저 $x > k$ 일 때, 즉 $x - k > 0$ 일 때 우극한은 $\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x) - g(k)}{x - k}$ 입니다. 이걸

$x = k$ 보다 큰 쪽에서의 미분계수죠? 간단하게 우리만의 표현으로 표현하자면 $g'(k+)$ 가 되겠네요.

$x < k$ 일 때는요? 좌극한은 $\lim_{x \rightarrow k-} -\frac{g(x) - g(k)}{x - k} = -g'(k-)$ 가 됩니다. $x = k$ 보다 작은 쪽에서의

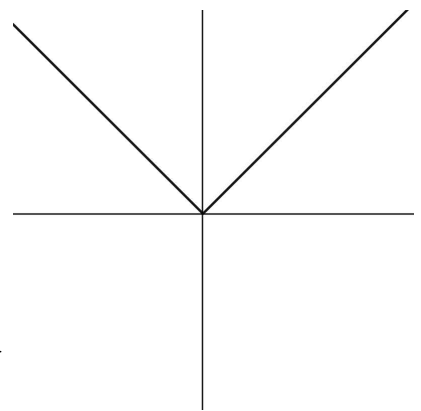
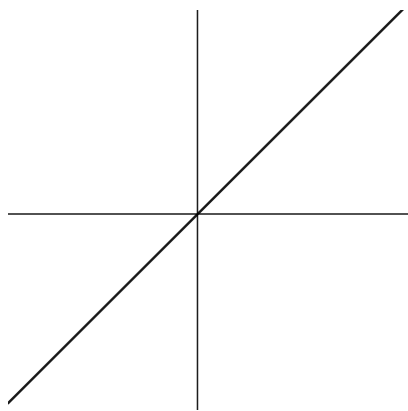
미분계수입니다.

결국 이 둘이 같아야 하므로 $g'(k+) = -g'(k-)$ 이 되는 점의 개수가 $h(t)$ 가 되겠군요.

그러면 $g'(k+) = -g'(k-)$ 는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 일반적인 상황에서는 $g'(k+) = -g'(k-)$ 는 불가능합니다. 왜냐하면 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 다르다는 건 미분불가능이라는 건데 다항함수는 모든 점에서 미분가능이거든요.

다만 그 값이 0이라면요? 0은 부호를 바꾸든 말든 0이니까 성립하죠. 일단 하나 찾았네요.

그리고 특수한 상황도 고려를 해야죠. $g(x)$ 는 절댓값 함수잖아요? 절댓값 함수의 특징은 x 축 아래의 부분은 위로 접혀 올라간다는 거죠. 접혀 올라간다는 건 미분계수 역시 부호가 반대로 된다는 거구요.



이런 함수가 있다면 절댓값을 씌웠을 땐

이렇게 x 축 아래에 있는 $x < 0$ 부분이 접혀 올라갑니다. 그러면 $x = 0$ 에서의 우미분계수와 좌미분계수는 정확히 부호가 반대가 되죠. 결국 조건을 만족하는 경우는 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 x 축과 만나는 경우 두 가지입니다. 이러한 점의 개수가 $h(t)$ 인 거죠.

2) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(가)조건에서 $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t) = 5$ 라고 합니다. t 가 4보다 약간 클 때, 즉 $f(x)$ 를 4보다 약간 더 내리고 절댓값 씌운 $g(x) = |f(x) - 4|$ 일 때는 미분계수가 0이거나 x 축과 만나는 점이 5개라는 거죠?

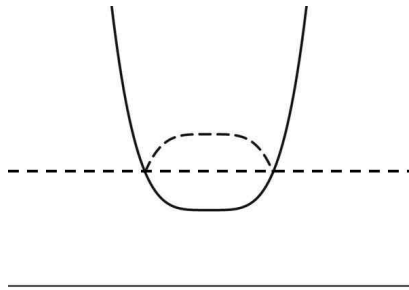
(나)조건에서 $h(t)$ 는 $t = -60$ 와 $t = 4$ 에서만 불연속이라고 합니다. 일단 $t = 4$ 는 (가)조건에도 있던 값이에요. 당연히 주의해서 봐야 합니다.

$h(t)$ 가 불연속이라는 건 $f(x)$ 를 t 만큼 내리고 절댓값 씌울 때 미분계수가 0이거나 미분계수가 0이 아니면서 x 축과 만나는 점의 개수가 특정 지점에서 변한다는 거죠? 좌극한값, 함숫값, 우극한값 중 어느 하나라도 다르면 불연속이니까요.

그리고 두 지점에서만 불연속이라는 것도 포인트입니다. 결국 개형을 정한 다음 하나하나 확인해봐야겠네요.

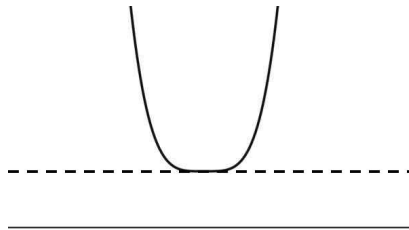
이때 어차피 t 만큼 아래로 내려서 절댓값으로 접어 올리는 거랑 $y = t$ 라는 직선을 그어서 직선에 대하여 접어

올리는 거랑 결과는 똑같으니까 설명은 후자로 하겠습니다.



이런 개형인 경우 불연속점은 하나입니다. 이렇게 점선을 그으면 점선과

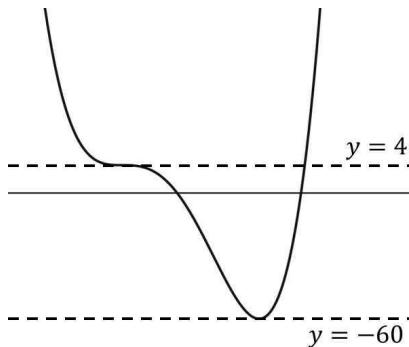
만나는 점 두 개와 미분계수가 0이 되는 점 하나를 합해 $h(t)=3$ 이다가



이렇게 점선을 그으면 미분계수가 0이 되는 점이 하나로 $h(t)=1$ 이 되고,

더 아래로 내려가도 $h(t)=1$ 입니다.

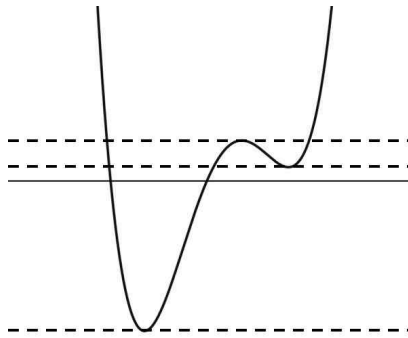
여기서 잘 생각해볼게요. 미분계수가 0이 되는 점은 어차피 고정되어 있어요. t 값에 따라 변하는 건 $y=t$ 와의 교점 중 접하지 않는 점의 개수죠. 그러면 빠르게 확인해봅시다.



그림과 같이 점선을 그었을 때 $h(t)$ 가 불연속이 됩니다. 기본적으로 미분계수가 0이 되는 점 2개에 t 가 4보다 클 때는 접점이 아닌 교점이 2개, $t=4$ 일 때 1개, 4보다 작을 때는 다시 2개, $t=-60$ 부터는 0개가 되죠.

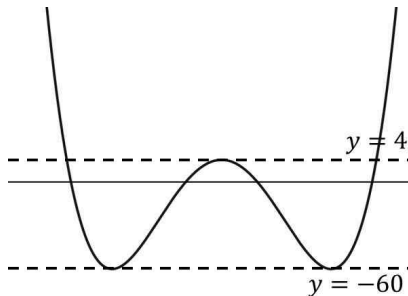
그런데 문제는 $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=5$ 이어야 한다는 거예요. $t=4$ 보다 클 때 5개의 점이 조건을 충족해야 하는데 지금

같은 상황은 4개죠. 이 개형은 불가능합니다. 마찬가지로의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.



이런 개형인 경우를 살펴볼게요. 이 경우 불연속점이 3개가 나타납니다. 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 첫 번째 점선 전까지 접점이 아닌 교점이 2개, 두 번째 점선 전까지 4개였다가 두 번째 점선일 때 2개로 변하고, 다시 2개였다가 세 번째 점부터는 0개로 변하죠. 조건을 만족하지 않습니다. 마찬가지로의 이유로 개형이 좌우로 뒤집힌 개형도 불가능합니다.

결국 남은 개형은



이거죠. 일단 조건을 만족하는지 보면 기본적으로 미분계수가 0인 점이 3개에 위에서부터 $y = 4$ 까지는 접점 아닌 교점이 2개, $y = -60$ 까지는 4개였다가 $y = -60$ 부터는 0개가 됩니다.

또한 $t = 4$ 보다 클 때 미분계수가 0인 점 3개 + 접점 아닌 교점 2개로 총 5개니까 (가)조건도 만족하네요. 찾았어요!

3) 함수 구하기 - 차함수

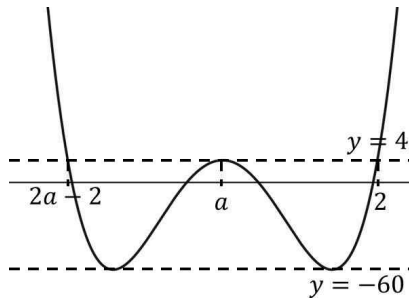
먼저 사차함수 중 이런 대칭축이 존재하는 개형의 특징은 대칭축으로부터 극소가 되는 점의 x 좌표의 차이가 동일하다는 거예요. 대칭축의 x 좌표를 a 라고 잡고 $y = f(x)$ 가 $y = -60$ 과 접하는 점의 x 좌표를 각각

$$a - b, a + b \text{라고 하면 차함수에 의하여 } f(x) - (-60) = (x - a + b)^2(x - a - b)^2 \text{이고}$$

$$f(x) = (x - a + b)^2(x - a - b)^2 - 60 \text{입니다. 이때 } f(a) = 4 \text{이므로 } b^4 - 60 = 4 \text{이고 } b = 2\sqrt{2} \text{이네요.}$$

$b = -2\sqrt{2}$ 도 어차피 똑같으니 상관없습니다. $f(x) = (x - a + 2\sqrt{2})^2(x - a - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 입니다.

이때 $f(2) = 4$ 이고 $f'(2) > 0$ 이므로 $x = 2$ 는



이렇게 그려지겠네요.

$f(x) = (x - a + 2\sqrt{2})^2(x - a - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 에 $f(2) = 4$ 를 해보면 $(2 - a + 2\sqrt{2})^2(2 - a - 2\sqrt{2})^2 = 64$ 이고 정리하면 $((2 - a)^2 - 8)^2 = 64$ 이 됩니다. $(a^2 - 4a - 4)^2 = 64$ 이고 $a^2 - 4a - 4 = 8$ 이거나 $a^2 - 4a - 4 = -8$ 입니다.

$a^2 - 4a - 4 = -8$ 의 경우 $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0$ 이고 $a = 2$ 가 되는데 이건 불가능하죠? 무조건 $a < 2$ 여야 하니까요.

$a^2 - 4a - 4 = 8$ 의 경우 $a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2) = 0$ 이므로 $a = -2$ 입니다.

$f(x) = (x + 2 + 2\sqrt{2})^2(x + 2 - 2\sqrt{2})^2 - 60$ 이네요. 아니면 위의 그림처럼 대칭축 $x = a = -2$ 를 기준으로 $x = 2$ 와 반대편의 $x = 2a - 2 = -6$ 를 잡고 $f(x) = (x + 6)(x + 2)^2(x - 2) + 4$ 로 설정해도 됩니다. 이게 더 편하겠네요.

이제 $f(4) + h(4)$ 를 구해보죠. $h(4)$ 는 이미 알죠? 미분계수가 0인 점이 3개에 점점 아닌 교점이 2개니까 $h(4) = 5$ 이구요, $f(4) = 724$ 입니다. 따라서 $f(4) + h(4) = 729$ 이네요.

42. 정답 30 [2023년 4월 20]

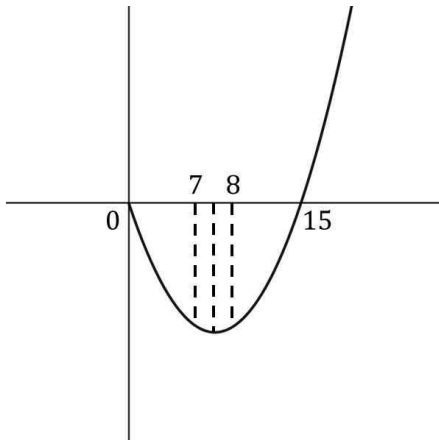
1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 등차수열 $a_n = a + (n-1)d$ (a 는 첫항, d 는 공차)로 놓기

등차수열 a_n 이 있는데 n 항까지 합이 S_n 이고, a_{13} 의 값을 구하랍니다. 가보죠.

(가)조건에서 S_n 은 $n=7, n=8$ 에서 최솟값을 갖는다고 합니다. 먼저 $n=7, n=8$ 에서 최솟값이라는 건 일단 값이 같다는 거죠? $S_7 = S_8$ 인데 $S_7 = a_1 + \dots + a_7$ 이고 $S_8 = a_1 + \dots + a_7 + a_8$ 이므로 $a_8 = 0$ 입니다.

$a_n = a + (n-1)d$ 로 설정하면(a 는 첫항, d 는 공차) $a + 7d = 0$ 이고 $a = -7d$ 이네요. $a_n = (n-8)d$ 입니다.

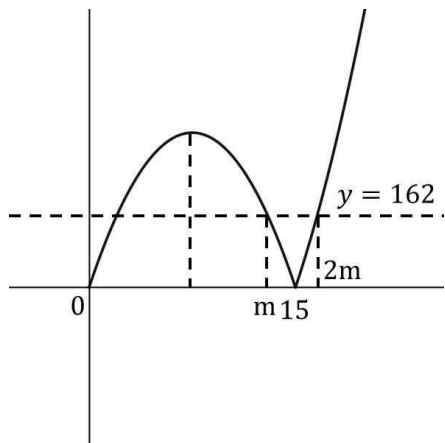
그리고 a_n 은 사실상 n 에 대한 일차식이고, S_n 은 $\frac{-7d + (n-8)d}{2} \times n = \frac{n(n-15)d}{2}$ 이므로 사실상 최고차항의 계수가 $\frac{d}{2}$ 인 이차함수로 볼 수 있어요. 이때 최솟값을 가져야 하니까 d 는 양수겠죠. $n=0, n=15$ 에서 n 축과 만나구요.



대충 이렇게 되겠어요.

2) 절댓값 함수

이때 $|S_m| = |S_{2m}| = 162$ 인 자연수 $m(m > 8)$ 이 존재한다고 합니다. 함수에 절댓값이 있네요? 접어 올려봅시다.



이렇게 됩니다.

그러면 $n = m$ 부분은 아래에서 올라오게 된 거죠? S_n 은 기본적으로 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 형태니까요. 따라서 $S_m = -162$ 이고 $S_{2m} = 162$ 입니다.

$S_n = \frac{d}{2}n(n-15)$ 이죠? 각각 넣어봅시다. $\frac{d}{2}m(m-15) = -162$, $dm(2m-15) = 162$ 입니다. 다시 정리해보면

$dm^2 - 15dm = -324$ 이고 $2dm^2 - 15dm = 162$ 이네요. 따라서 $dm^2 = 486$, $dm = -54$ 이고

$m = 9$, $d = 6$ 입니다. $a_n = 6(n-8)$ 이고 $a_{13} = 30$ 이네요.

43. 정답 32 [2023년 4월 22]

1) 조건해석, 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우, 절댓값 함수

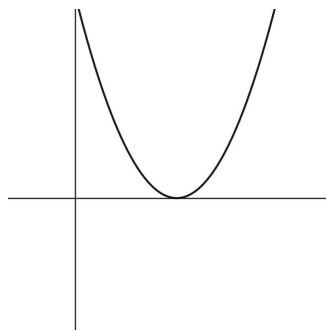
일단 이차함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 있는데 (가)조건에서 $g(x)$ 는 미분가능하고 도함수는 연속입니다.

(나)조건을 정리해보면 결국

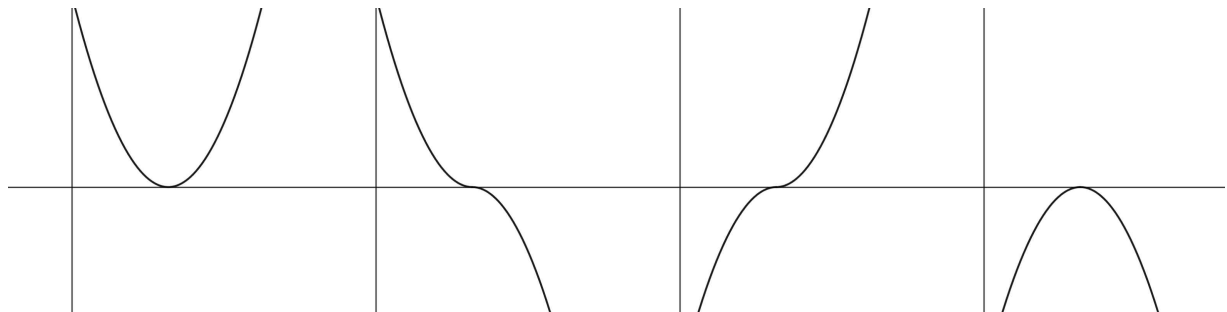
$-2 < x < 2$ 일 때는 $g(0) = 0$, $g'(x) = -x + a$ 이고,

$x \geq 2$, $x \leq -2$ 일 때는 $|g'(x)| = f(x)$ 이라는 거죠.

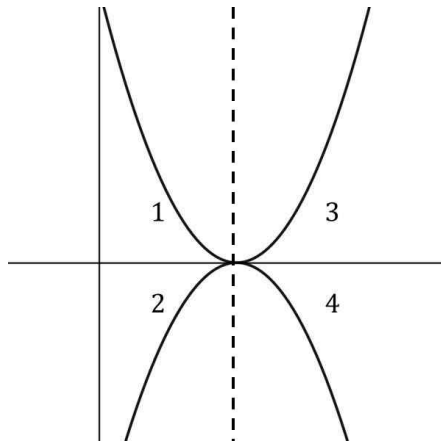
$|g'(x)| = f(x)$ 이라는 건 $g'(x)$ 가 $f(x)$ 를 따라가는데 아래로 접는 것도 가능하다는 말이에요. 다시 말하자면



이게 $f(x)$ 라고 했을 때



$g(x)$ 는 이 네 가지 형태가 모두 가능합니다. 어차피 절댓값으로 올리면 $f(x)$ 랑 똑같이 되거든요. 그러니까 다시 말하자면



이렇게 1, 2번 중에서 하나를 고르고, 3, 4번 중에서 하나를 고르면 되는

함수인 거예요. 이때 주의해야 할 점은 절댓값을 씌운 결과가 $f(x)$ 이기 때문에 범위 내에서는 $f(x)$ 는 무조건 x 축 위에 있어야 합니다. x 축 아래에 있으면 음수라는 말인데 절댓값을 씌우면 음수가 불가능하잖아요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

(다)조건에서 $g(x)$ 가 $x=1$, $x=b$ 에서 극값을 갖는다고 합니다. 일단 $x=1$ 에서 극값을 가지니까 $g'(1)=0$ 이죠? 따라서 $a=1$ 입니다. $-2 < x < 2$ 에서 $g'(x) = -(x-1)$ 이네요.

이때 도함수는 연속이어야 하니까 $g'(-2) = f(-2) = 3$, $g'(2) = -1$ 이어야 하겠죠? 당연히 $|g'(2)| = f(2) = 1$ 이구요.

$x=b$ 에서도 극값을 갖는데 이미 $g'(1)=0$ 은 있으니 $|x| \geq 2$ 에서 조건을 만족시키는 거겠죠? 일단

$g'(b)=f(b)=0$ 입니다.

여기서 문제는 $f(x)$ 의 개형이에요. 만약 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면? $|x| \geq 2$ 에서 무조건 x 축과 만나고 x 축 아래로 내려가게 됩니다. 이러면 범위 내에서 x 축 위에 있어야 한다는 조건과 모순이 발생하죠? 최고차항의 계수는 양수입니다.

$f(-2)=3$, $f(2)=1$ 이므로 $x=-2$ 에서 $f(x)$ 는 감소해야 합니다. $f(x)$ 는 이차함수라 한 번 증가하면 계속 증가해야 하는데 $f(-2)=3$, $f(2)=1$ 이면 감소하잖아요?

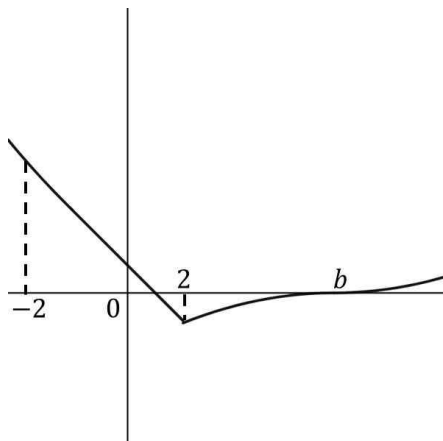
이때 이미 $f(-2)$ 의 값이 양수이므로 감소하는 $f(x)$ 의 특성상 $x < -2$ 에서 x 축과 만날 수 없습니다. 따라서 $f(b)=0$ 이 되는 b 는 $x > 2$ 에 있어야 합니다.

그런데 그렇다고 $-2 < x < 2$ 에서 극소점이 있으면 안 됩니다. 그러면 $x > 2$ 에서 증가하는 형태인데 $f(2)$ 의 값이 양수라 x 축과 만날 수 없거든요. 따라서 $f(b)=0$ 이 되는 b 는 $f(x)$ 가 x 축과 만나게 되는 가장 작은 실근이 되고 $f(x)$ 는 $x=b$ 까지 계속 감소하는 형태입니다.

그런데 여기서 또 $f(x)$ 가 x 축과 두 번 만나는 것도 불가능합니다. 그러면 x 축 아래로 내려가는 부분이 생기는데 $x > 2$ 의 범위에서는 $f(x)$ 는 항상 x 축 위에 있어야 한다고 했었죠?

결국 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 x 축에 접해야 합니다. $f(x)=k(x-b)^2$ 의 형태가 되는 거죠.

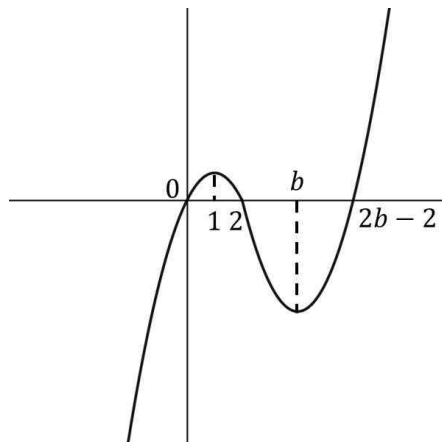
이때 $g'(x)$ 는 $f(x)$ 의 개형에서 부호를 선택할 수 있다고 했고, $g'(2)=-1$ 이므로 $g'(x)$ 가 연속이 되기 위해서는 $2 < x < b$ 부분에서 $-f(x)$ 의 형태가 되어야 합니다.



이제 우리가 구해야 할 건 x 축과 만나는 모든 점의 x 좌표의 합을 구해야 합니다. 일단 $g(0)=0$ 을 알긴 하죠.

$-2 < x < 2$ 에서 $g'(x) = -(x-1)$ 이고 적분해서 올린 후 $g(0)=0$ 을 넣으면 $g(x) = -\frac{1}{2}x(x-2)$ 입니다.
 $g(2)=0$ 이네요.

이제 대충 그려보면



$x=b$ 를 전후로 함수가 부호가 바뀐 관계이므로 $x > 2$ 에서 $g(x)$ 는 $x=b$ 축 대칭입니다. 따라서 우리가 구하는 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 그림과 같이 구할 수 있고 합은 $2b$ 인 거죠. b 를 구해야 합니다.

$f(x) = k(x-b)^2$ 인데 $f(-2)=3$, $f(2)=1$ 이죠? 가볼게요. $k(b+2)^2 = 3$, $k(b-2)^2 = 1$ 이고 정리하면
 $kb^2 + 4kb + 4k = 3$, $kb^2 - 4kb + 4k = 1$ 에 $b^2 - 8b + 4 = 0$ 입니다. 근의 공식을 이용하면 $4 \pm 2\sqrt{3}$ 입니다. 이때
 $b > 2$ 이므로 $b = 4 + 2\sqrt{3}$ 이네요. 합은 $8 + 4\sqrt{3}$ 이고 $p=8$, $q=4$ 이므로 $p \times q = 32$ 입니다.

44. 정답 ① [2024학년도 6월 13]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 삼각형은 정해져 있다 - 내부 : 두 변의 길이와 한 각
 일단 그림이 있고 $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD) = -\frac{1}{3}$, $\angle DAB > \frac{\pi}{2}$ 라고 합니다. 그림에다 다
 표시해두구요. 이후에 뭐 어찌구저찌구하는데 이미 그림에 다 표시되어 있습니다.

먼저 삼각형 BCD의 경우 두 변의 길이와 한 각이 정해졌습니다. 바로 $\overline{BD}$ 를 구해보죠.

$$\cos C = -\frac{1}{3} = \frac{3^2 + 2^2 - \overline{BD}^2}{2 \times 3 \times 2} \text{ 이고 정리하면 } \overline{BD} = \sqrt{17} \text{ 입니다.}$$

점 E는 선분 AC를 1:2로 내분하는 점입니다. $\overline{AE}=2r$, $\overline{CE}=4r$ 이라고 할게요. 그리고 이후에는 P_1, P_2, Q_1, Q_2 를 설명하고, $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$ 라고 합니다. 여기서 잘 생각해 보세요. 일단 문제에서 중요하게 다뤄지는 건 AE를 지름으로 하는 원과 CE를 지름으로 하는 원입니다. 거기에 $\overline{AE}=2r$, $\overline{CE}=4r$ 로 서로의 반지름에 관한 관계식도 있어요. CE가 AE의 두 배죠. 그런데 심지어 새로운 관계식 $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$ 도 있는데요? 그리고 각 원에는 삼각형이 내접하고 있어요. 길이의 비에 관한 공식을 생각해 보세요.

$\frac{A}{\sin A}=2R$ 을 사용할 수 있을 것 같지 않나요? 심지어 반지름도 연관되어 있어 식을 연결할 수도 있을 것 같아요. 가보죠.

먼저 $\angle ABD = A$, $\angle BCD = B$ 라 하면 삼각형 AP_1P_2 에 대하여 $\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin A}=2r$ 이고, CQ_1Q_2 에 대하여

$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin C}=4r$ 입니다. 그러면 $\frac{2\overline{P_1P_2}}{\sin A}=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin C}=4r$ 가 되겠군요. 이때 $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$ 이고

$\overline{Q_1Q_2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\overline{P_1P_2}$ 이므로 넣어서 정리하면 $\frac{6}{\sin A}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin C}=4r$ 가 됩니다.

이때 $\cos C=-\frac{1}{3}$ 이네요? 그러면 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ 을 이용해서 $\sin C$ 를 구해봅시다. 넣고 정리하면

$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 가 나오네요. $\frac{6}{\sin A}=\frac{15}{2}=4r$ 이고 $\sin A=\frac{4}{5}$, $r=\frac{15}{8}$ 입니다. 이때 $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 를 이용하면 $\cos A=-\frac{3}{5}$ 이네요.

이후에 삼각형 ABD의 넓이가 2라는 것과 $\overline{AB}+\overline{AD}$ 의 값을 구하라고 합니다. 일단 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 는 삼각형 ABD의 두 변의 길이이죠? 그리고 ABD의 넓이는 2이구요. 우리는 나머지 한 변의 길이인 $\overline{BD}=\sqrt{17}$ 와 한 각인 $\cos A=-\frac{3}{5}$ 를 알죠. 다 나왔네요?

먼저 편의상 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$ 이라고 할게요. 코사인법칙에 의하여 $\cos A=-\frac{3}{5}=\frac{a^2+b^2-17}{2\times a\times b}$ 이고 정리하면

$a^2+b^2+\frac{6}{5}ab=17$ 입니다.

그리고 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times b\times a\times \sin A=2$ 이고 $\sin A=\frac{4}{5}$ 이므로 $ab=5$ 이네요. $a^2+b^2+\frac{6}{5}ab=17$ 에

넣으면 $a^2+b^2=11$ 입니다. 우리는 $a+b$ 를 구해야 하잖아요? 제곱의 형태로 만들고 루트 씌우죠.

$a^2 + b^2 = 11$ 의 양변에 $2ab = 10$ 를 더하면 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = 21$ 가 되구요, 길이가 음수가 될 리 없으니 $a + b = \sqrt{21}$ 입니다. 답은 ①번이네요.

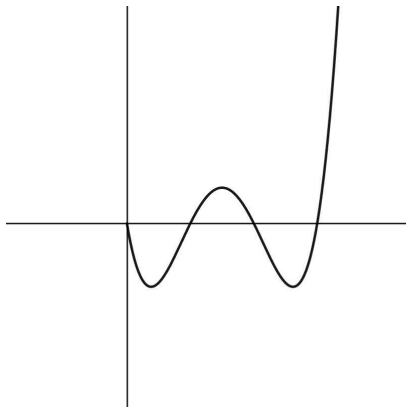
45. 정답 ③ [2024학년도 6월 14]

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$ 인데 출발한 후에 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a 에 대하여 $t=0$ 부터 $t=2$ 까지 위치의 변화량의 최댓값을 구합니다.

일단 운동 방향을 한 번만 바꾼다는 건 어떤 의미인가요? 도함수가 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 뜻이죠. 지금 위치의 함수의 도함수는 속도의 함수 $v(t)$ 잖아요? 다시 말하면 $v(t)$ 의 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 말이 됩니다.

그런데 지금 $v(t)$ 를 잘 보세요. 사차함수입니다. 만약에 a 혹은 $2a$ 가 0과 1이 아닌 다른 값이라면 $v(t)$ 는



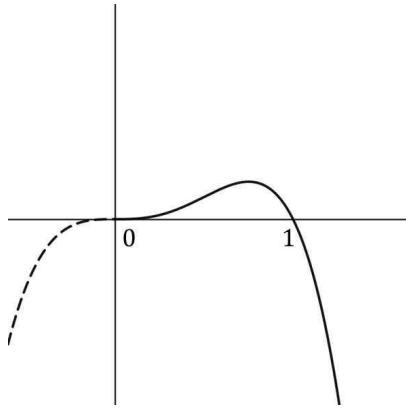
이런 함수가 되겠죠? 이러면 부호의 변화가 3번이나 일어나게 됩니다. 조건에 맞지 않잖아요?

결국 a 혹은 $2a$ 가 0과 1가 되어 겹치는 부분이 있어야 하겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a=0$ 일 때

$a=0$ 이라면 $v(t) = -t^3(t-1)$ 입니다. 그래프를 그려보면

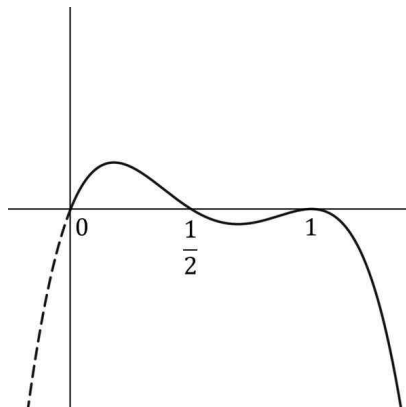


이렇게 됩니다. 부호의 변화가 단 한 번만 일어나죠? 맞네요!

$t = 0$ 부터 $t = 2$ 까지의 위치의 변화량을 구해봅시다. $\int_0^2 -t^3(t-1)dt = \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right]_0^2 = -\frac{12}{5}$ 입니다.

2-2) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

정확히 말하면 $2a = 1$ 일 때입니다. 이러면 $v(t) = -t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)^2$ 이고 그래프로 그려보면

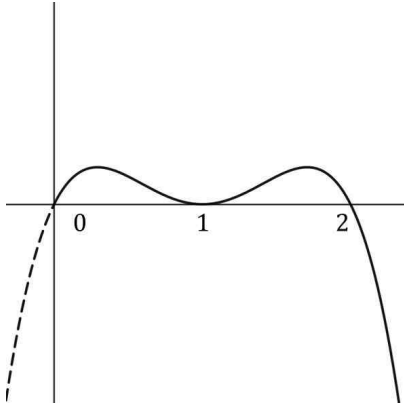


이렇게 됩니다. $t = \frac{1}{2}$ 일 때 부호변화가 일어난 후 다시 일어나지 않네요. 조건을 만족시킵니다. 위치의

변화량을 구해보면 $\int_0^2 -t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)^2 dt = \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 = -\frac{11}{15}$ 이네요.

2-3) $a = 1$ 일 때

$v(t) = -t(t-1)^2(t-2)$ 이고 그래프는



이렇게 됩니다. $t = 2$ 에서만 부호변화가 일어나네요. 조건을 만족합니다. 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt = \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 = \frac{4}{15} \text{입니다.}$$

위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이네요. 답은 ③번입니다.

46. 정답 39 [2024학년도 6월 20]

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 있는데 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 입니다. 그럼 $g(0)=0$ 이고 $g'(x)=f(x)$ 이죠?

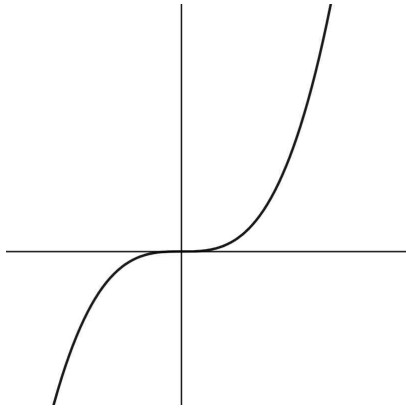
그리고 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수입니다.

이때 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(4)$ 이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 라고 하네요.

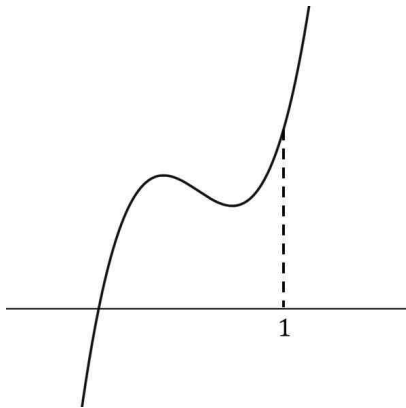
먼저 $g(x) \geq g(4)$ 라는 건 $x \geq 1$ 에서 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 최솟값을 갖게 된다는 거죠? 그리고 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이므로 절댓값을 씌웠을 때는 $x=3$ 에서 최솟값을 갖게 된다는 거구요.

2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기

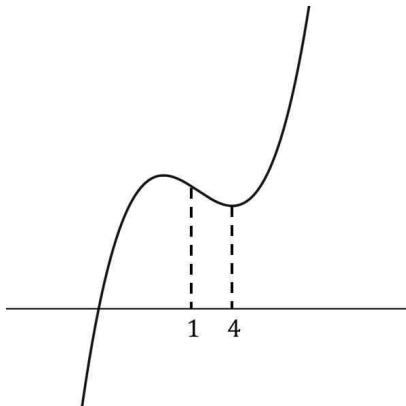
일단 먼저 개형부터 살펴볼게요. 감소하는 부분 없이 계속 증가하는 개형을 생각해보죠.



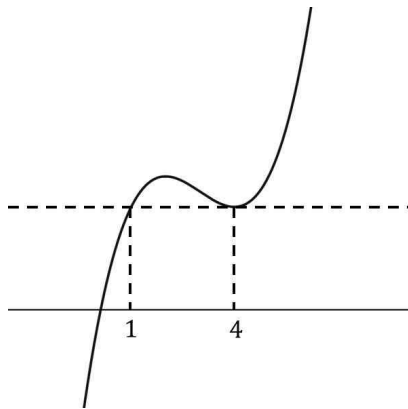
어느 곳에 $x=1$ 을 설정하더라도 $x \geq 1$ 에서 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 가지게 됩니다. 따라서 이 개형은 불가능합니다. 따라서



이런 개형이 됩니다. 이제 문제는 $x=1$ 을 어디에 설정해야 하나 하는 거예요. 그림과 같이 설정하면 $x \geq 1$ 에서 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 가지게 됩니다. 안 되죠?



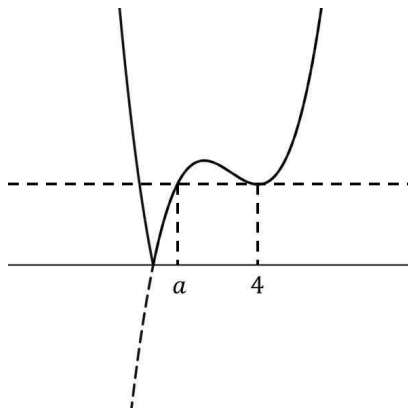
이런 식으로 설정하면 $x \geq 1$ 일 때 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 최소가 되어야 하므로 극소가 되는 x 좌표는 4가 됩니다. 언제까지일까요?



이때가 마지막이겠네요. 왜냐하면 이거보다 더 왼쪽으로 가면 최소가 되는

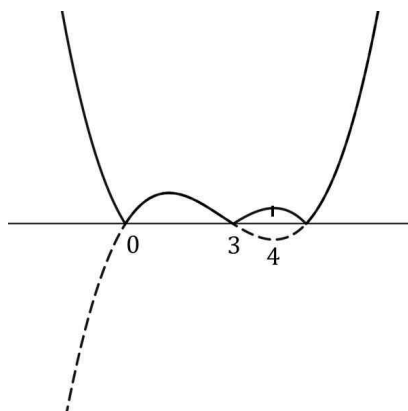
지점이 $x = 1$ 이 되거든요.

이제 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 를 확인해보죠. 이거는 $x \geq 1$ 일 때 $g(x)$ 에 절댓값을 씌운 $|g(x)|$ 는 $x = 3$ 에서 최솟값을 갖게 된다는 의미입니다. 우리가 방금 찾은 개형을 위아래로 움직이면서 확인해볼게요.



이렇게 설정하면 최솟값은 $x = 3$ 이 불가능합니다. $x = 1$ 은 a 와 4 사이에 있는데 최솟값은 a 보다 작은 곳에 있잖아요.

지금 보니까 최소가 되는 지점은 x 축과 만나는 지점이네요. 절댓값 함수는 무조건 0보다 크거나 같으니까 최소는 0이 되는 지점이죠. 그러니까 다시 말하면 $g(3) = 0$ 이 되도록 해야 하겠네요. 설정해보면



이렇게 되겠네요.

결국 정리해보면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 이고 $g(0)=g(3)=0$ 이고 $g'(4)=0$ 인 삼차함수입니다. 함수를 구해볼게요.

3) 함수 구하기 - 인수정리

먼저 $g(0)=g(3)=0$ 이므로 인수정리에 의해 $g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-a)$ 라 할 수 있습니다. $g'(4)=0$ 이므로

미분하고 값을 넣어보면 $g'(x)=x^2-\frac{2(a+3)}{3}x+a$ 이고 $g'(4)=8-\frac{5a}{3}=0$ 이고 $a=\frac{24}{5}$ 입니다.

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)\left(x-\frac{24}{5}\right)$ 이고 $g'(x)=f(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$ 입니다. $f(9)=39$ 이네요.

47. 정답 380 [2024학년도 6월 22]

1) 문제해석

0이 아닌 정수 a 가 있는데 $f(x)=x^3-2ax^2$ 이라고 합니다. $f(x)=x^2(x-2a)$ 이니 $x=0$ 에서 x 축에 접하고 $x=2a$ 에서 지나가는 지령이같은 삼차함수죠? $x=\frac{4a}{3}$, $x=0$ 에서 극값을 갖구요.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 곱이 -12 가 되도록 하는 a 에 대하여 $f'(10)$ 의 값을 구하라네요. 일단 조건을 볼까요?

$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$ 을 만족시키는 x_1, x_2, x_3 이 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에 존재한다고 합니다.

그러니까 이걸 다시 표현하면 우리는 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 이라는 범위를 설정할 건데, 그 범위 안에서는

$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$ 가 성립해야 한다는 거죠? 그리고 이게 성립하는 모든 k 의 값의 곱이

-12 가 되어야 한다는 거구요. 대충 소인수분해 해보면 $-2^2 \times 3$ 인데 경우의 수가 너무 많아서 찍을 수는 없겠네요.

$\left\{ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right\} \times \left\{ \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \right\} < 0$ 는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 형태를 잘 관찰해보세요. 점과 점

사이의 기울기의 식이죠? 왼쪽의 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 는 점 $(x_1, f(x_1))$ 과 점 $(x_2, f(x_2))$ 을 이은 직선의

기울기이고, 오른쪽의 $\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$ 는 점 $(x_2, f(x_2))$ 과 점 $(x_3, f(x_3))$ 을 이은 직선의 기울기이네요. 여기서

x_1, x_2, x_3 는 존재성만을 말해줬으니깐 단 하나의 케이스만 존재하더라도 조건이 성립합니다. 아무튼 두 값을 곱했을 때 음수가 나와야 한다는 거네요. 둘 중 하나는 음수가 되어야 한다는 거예요.

그런데 생각해보면 계속 증가하는 부분, 혹은 계속 감소하는 부분만 존재할 때 함수 위의 점 세 개를 정해서

기울기를 곱했을 때 음수가 나올까요? $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에서 계속 증가하는 부분만 존재한다면 기울기는

양수×양수가 되어 양수가 될 거고, 계속 감소하는 부분만 존재한다면 기울기는 음수×음수가 되어 양수가 될

거예요. 그러니까 기울기의 곱이 음수가 된다는 말은 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에 증가하는 부분과 감소하는

부분이 동시에 존재해야 한다는 거죠.

다시 정리해봅시다. $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하는 k 를 찾아낸 다음,

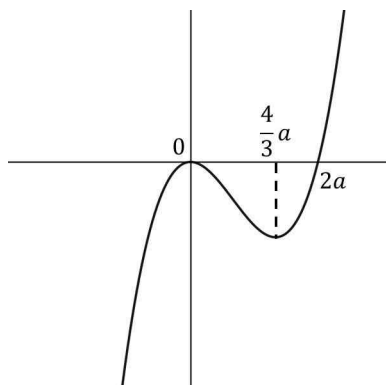
그 찾아낸 k 의 곱이 -12 가 되도록 하는 a 를 구한 후,

$f'(10)$ 의 값이 계산해라. 이거네요.

일단 $f(x) = x^2(x - 2a)$ 이므로 a 가 양수냐 음수냐에 따라 개형이 두 가지가 가능합니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 케이스 분류

2-1) $a > 0$ 일 때



이런 함수네요.

일단 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위 안에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하게 하는 최솟값은 $k + \frac{3}{2} = 0$ 이 될 때이고, 최댓값은 $k = \frac{4}{3}a$ 일 때이죠. 그러니까 $-\frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$ 가 조건을 만족시키는 k 의 범위입니다.

그런데 여기서 조심해야 할 점은 $0 < x < \frac{4}{3}a$ 의 범위보다 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위가 작을 경우,

$k < x < k + \frac{3}{2}$ 에서는 감소만 할 가능성이 존재한다는 거예요. 이 경우는 $-\frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$ 에서 제거해야 합니다.

먼저 k 의 곱이 음수가 나와야 하기 때문에 $-\frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$ 의 범위 안에 존재하는 정수인 -1 은 무조건

필요합니다. 그러니까 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 의 범위에서는 무조건 증가와 감소가 둘 다 있어야 해요. 그런데 그건 가능할 거 같네요. $-1 < x < 0$ 의 범위에서 증가하고, $x > 0$ 일 때는 감소하는 부분이 무조건 존재하니까 가능합니다.

그리고 $k = 0$ 은 포함되어서는 안 됩니다. 그러면 곱이 0이 되겠죠? 따라서 0을 제외하기 위해서 $0 < x < \frac{3}{2}$ 의

범위는 무조건 감소만 해야 합니다. 따라서 범위의 오른쪽 끝인 $\frac{3}{2}$ 보다 감소하는 범위의 끝점인 극소점의 x 좌표

$\frac{4}{3}a$ 이 커야 하므로 $\frac{3}{2} < \frac{4}{3}a$ 이고 $a > \frac{9}{8}$ 입니다.

이후에 곱이 -12 가 되려면 $k = 3, 4$ 가 포함되어야 하겠죠? $k = 1$ 은 있든 없든 상관없구요.

먼저 $k = 3$ 의 경우 $3 < x < \frac{9}{2}$ 의 범위 사이에 극소점의 x 좌표인 $x = \frac{4}{3}a$ 가 포함되어 있어야 합니다.

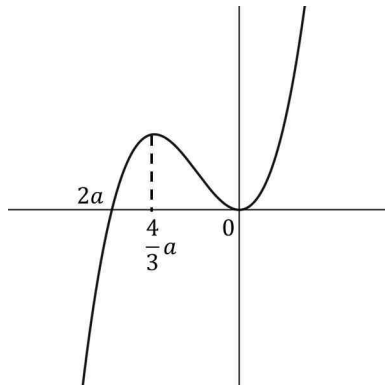
$3 < \frac{4}{3}a < \frac{9}{2}$ 이고 $\frac{9}{4} < a < \frac{27}{8}$ 입니다.

$k = 4$ 도 마찬가지로 $4 < \frac{4}{3}a < \frac{11}{2}$ 이고 $3 < a < \frac{33}{8}$ 입니다.

그런데 $\frac{9}{4} < a < \frac{27}{8}$ 와 $3 < a < \frac{33}{8}$ 를 동시에 만족시키는 정수 a 가 존재하나요? $3 < a < \frac{33}{8}$ 를 만족시키는 건

$a = 4$ 인데 이러면 $\frac{9}{4} < a < \frac{27}{8}$ 를 만족시킬 수 없네요. 아예 조건을 만족시킬 수 없는 경우입니다.

2-2) $a < 0$ 일 때



여기도 마찬가지로 확인해보면 되겠죠? 그런데 음수일 때는 조심해야 할 점이 더 있어요.

먼저 $k \geq 0$ 일 때는 아예 불가능합니다. 계속 증가하는 부분이잖아요? 따라서 k 는 무조건 음의 정수여야 합니다. k 가 음의 정수라면 곱했을 때 부호도 신경써야 해요. 음의 정수가 짝수 개면 -12 가 아니라 12 가 나오겠죠?

여기서 경우의 수를 한 번 생각해볼게요. 1×12 , 2×6 , 3×4 가 가능합니다. 다만 1×12 는 불가능합니다. 왜냐하면 무조건 음의 정수라서 $-1 \times -12 = 12$ 가 되거든요. 그러면 2×6 , 3×4 는 왜 가능하냐고 물으실 수 있지만 애네 둘은 -1 을 중간에 끼워넣는 게 가능합니다. $-1 \times -2 \times -6 = -12$ 이고, $-1 \times -3 \times -4 = -12$ 이니깐요. 따라서 가능한 k 는 $(-1, -2, -6)$ 이거나 $(-1, -3, -4)$ 입니다.

일단 최초로 달성하는 범위는 $k + \frac{3}{2} = \frac{4}{3}a$ 을 넘을 때부터 $k = 0$ 일 때까지입니다. $\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < k < 0$ 의 범위

안에 있는 거죠. 다만 $a > 0$ 때와 마찬가지로 감소만 하는 구간에 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 가 있다면 그건 범위에서 제외해줘야 합니다.

$(-1, -2, -6)$ 의 경우 각각의 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 여기서는 $-3, -4, -5$ 가 제외되었으니 이 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k = -6$ 일 때의 범위에는 극대점이 포함되고, $k = -1, -2$ 일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. 그런데 $k = -2$ 일 때는 $-2 < x < -\frac{1}{2}$ 로 극소점의 x 좌표인 $x = 0$ 가 포함되어 있지 않은데요? 이 경우는 불가능하겠네요.

$(-1, -3, -4)$ 의 경우 역시 각각의 $k < x < k + \frac{3}{2}$ 의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 다만 여기서는 -2 가 제외되었으니 $k = -2$ 인 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k = -3, -4$ 일 때의

범위에는 극대점이 포함되고, $k = -1$ 일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. $k = -1$ 일 때는

$-1 < 0 < \frac{1}{2}$ 로 당연하게 되고, $k = -3, -4$ 일 때는 $-3 < \frac{4}{3}a < -\frac{3}{2}$ 이고 $-4 < \frac{4}{3}a < -\frac{5}{2}$ 이네요.

정리하면 $-\frac{9}{4} < a < -\frac{9}{8}$ 이고 $-3 < a < -\frac{15}{8}$ 입니다. 이를 모두 만족시키는 음의 정수는 $a = -2$ 이네요.

$f(x) = x^2(x + 4)$ 이고 $f'(x) = 3x^2 + 8x$ 이니까 $f'(10) = 380$ 이네요.