



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t - a) dt$$

를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가
 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이다.

$f(1)=15$, $f'(1)=1$ 일 때, $f(4)$ 의 값은? [2025년 3월 14]

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

1. 정답 ④ [2025년 3월 14]

1) 문제해석

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수인데 조건을 만족시키라고 하네요. 조건을 한 번 볼게요.

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t - a) dt$ 를 만족시키는 a 의 범위가 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이라고 합니다.

일단 $\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t - a) dt$ 를 만족시킨다는 건 뭘까요? 함수의 형태부터 볼게요. 먼저 왼쪽에 있는 $f(t) - f(a)$ 라는 함수는 $y = f(t)$ 를 $-f(a)$ 만큼 위아래로 조정한 함수입니다. 그렇게 하면 $t = a$ 에서 t 축과 만나게 되는 함수죠. 다시 말하면 $y = f(t)$ 를 $t = a$ 에서 t 축과 만나게 위아래로 조정한 함수라고 해석할 수 있겠네요.

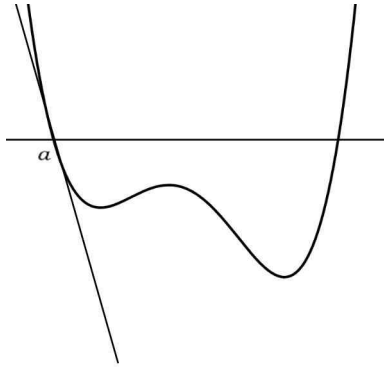
오른쪽에 있는 $f'(a)(t - a)$ 는요? 일단 $f'(a)$ 는 $t = a$ 에서의 접선의 기울기죠? 그리고 점 $(a, 0)$ 을 지나구요. 그런데 $f(t) - f(a)$ 도 점 $(a, 0)$ 을 지나지 않았나요? 그러면 결국 $f'(a)(t - a)$ 는 $f(t) - f(a)$ 의 $t = a$ 에서의 접선이라고 할 수 있겠네요. $t = a$ 에서 같은 점 $(a, 0)$ 을 지나고 접선의 기울기를 가지니까요.

정리하자면 $f(t) - f(a)$ 는 $f(t)$ 를 $t = a$ 에서 t 축과 만나게 위아래로 조정한 함수이고, $f'(a)(t - a)$ 는 그 함수의 $t = a$ 에서의 접선입니다. 그리고 $x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

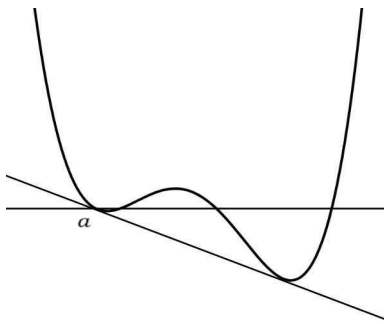
$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t - a) dt \text{ 이어야 하니까 } f(t) - f(a) \text{가 } f'(a)(t - a) \text{보다 항상 위에 있어야}$$

하겠죠? 다시 말해 조건을 만족시키기 위해서는 $f(t) - f(a)$ 의 $t = a$ 에서의 접선은 $f(t) - f(a)$ 보다 항상 작거나 같아야 합니다. 가로지르는 부분이 없어야 한다는 말이에요. 그러면 접선이 $f(t) - f(a)$ 보다 위에 있는 경우가 발생하게 되니까요. 이제 함수를 그려서 확인해봅시다.

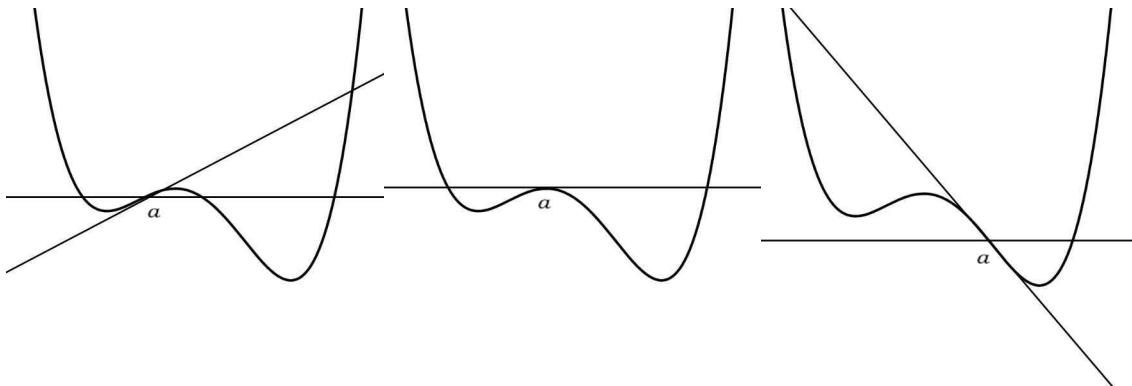
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기



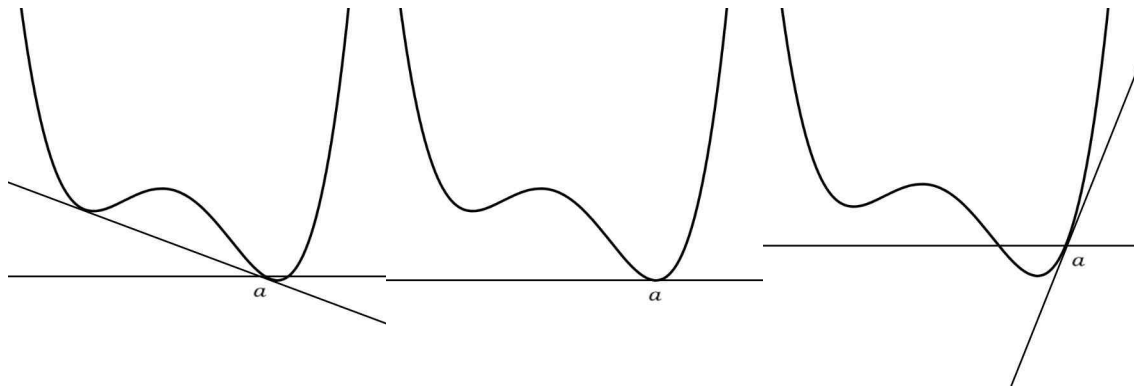
이렇게 함수를 그려볼게요. $f(x)$ 의 개형은 아직 확정이 아니니까 대략 그렸다고 생각해주세요. 먼저 $t=a$ 를 설정해야 해요. 그럼처럼 설정했다면? $f(t)-f(a)$ 가 항상 $t=a$ 에서의 접선보다 크거나 같죠? 이러면 조건을 만족하네요. 언제까지일까요?



이렇게 $t=a$ 를 설정할 때까지네요. 이 $t=a$ 보다 a 가 커지면

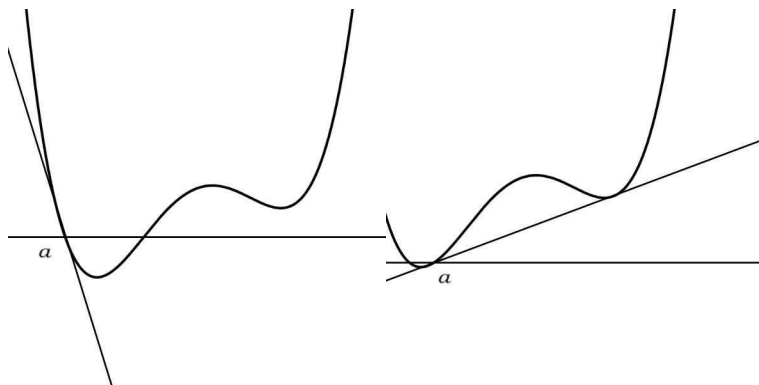


$f(t)-f(a)$ 가 $t=a$ 에서의 접선보다 작은 부분이 생기죠? 그러다가

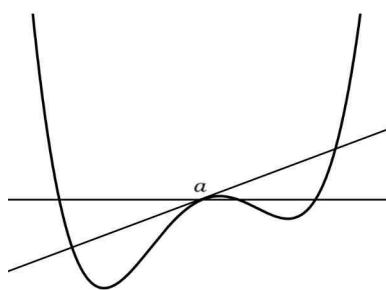


이렇게 첫 번째 그림에서 접선에 접하는 두 점 중 첫 번째와 다른 접점이 될 때부터 계속 $t=a$ 에서의 접선보다 위에 있게 되네요. 따라서 첫 번째 접점이 -1 , 두 번째 접점이 3 이 됩니다.

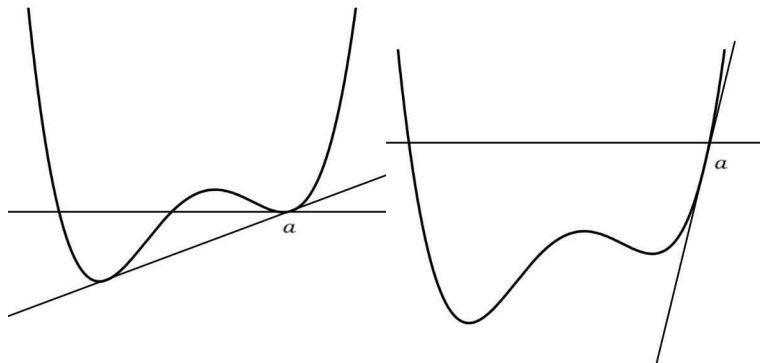
다른 개형도 확인해볼까요?



이렇게 설정하면 조건 만족하죠?

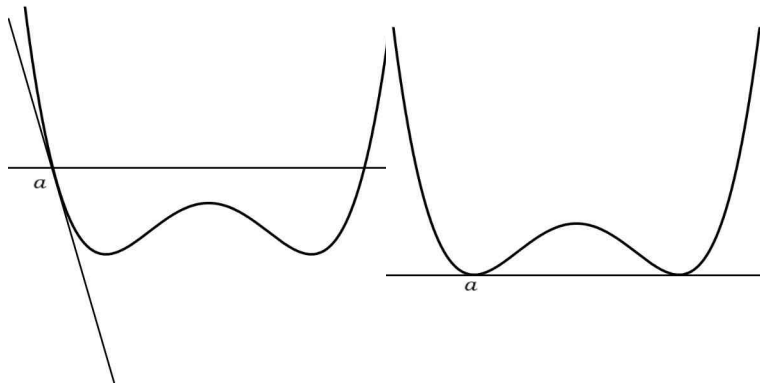


이 때는 안되는데

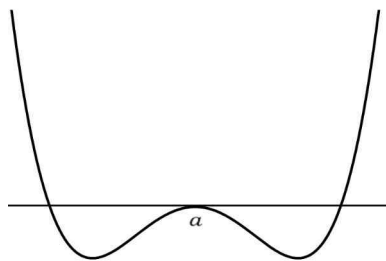


이렇게 설정하면 되네요.

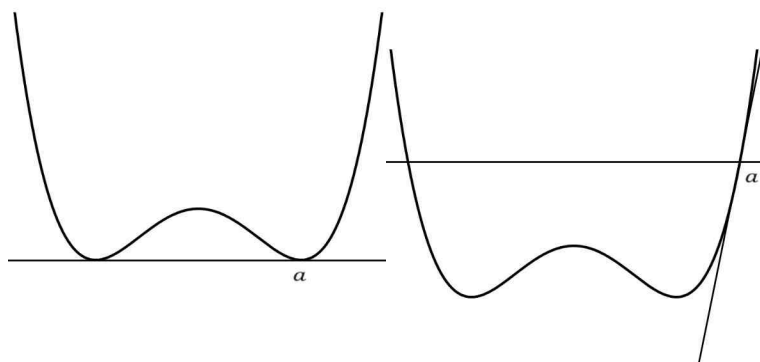
이 개형 역시 접선이 두 접점을 지날 때 조건을 만족하네요?



이것도 이렇게 $t = a$ 를 설정하면 조건 만족



이 때는 안되다가



이때부터 또 되네요.

모든 개형을 확인했어요. 결국 조건을 만족시키는 a 는 접선이 동시에 두 점을 접하면서 지나갈 때의 점의

t 좌표인 $-1, 3$ 이네요.

3) 함수 구하기 - 차함수

결국 $y=f(x)$ 가 어떤 일차함수 $y=ax+b$ 에 대하여 $x=-1, x=3$ 에서 접하는 상황이네요? 접하는 경우는 $(x+1), (x-3)$ 이라는 인수를 각각 짝수 개씩 가져야 하죠? $f(x)$ 는 사차함수이니깐 두 개, 두 개 가지면 되겠네요. 따라서 $f(x)-(ax+b)=(x+1)^2(x+3)^2$ 이고 $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+ax+b$ 입니다.

$f(1)=15$ 이므로 $a+b=-1$ 이고 $f'(1)=1$ 이므로 $f(x)$ 를 미분해보면 $f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)+a$ 이고 $a=1$ 입니다. $b=-2$ 이네요. $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$ 이고 $f(4)=27$ 입니다. 답은 ④번이네요.

2. 세 실수 a, p, q ($p < q$)에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} |2^x - 4| & (x \leq p \text{ 또는 } x \geq q) \\ a + \log_2 x & (p < x < q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$ 의 값은?

[2025년 3월 15]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2. 정답 ② [2025년 3월 15]

1) 문제 해석

먼저 $a, p, q (p < q)$ 가 있는데 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 4| & (x \leq p \text{ 또는 } x \geq q) \\ a + \log_2 x & (p < x < q) \end{cases}$ 라고 합니다. 그리고 이 함수가

일대일대응이어야 한다고 하네요.

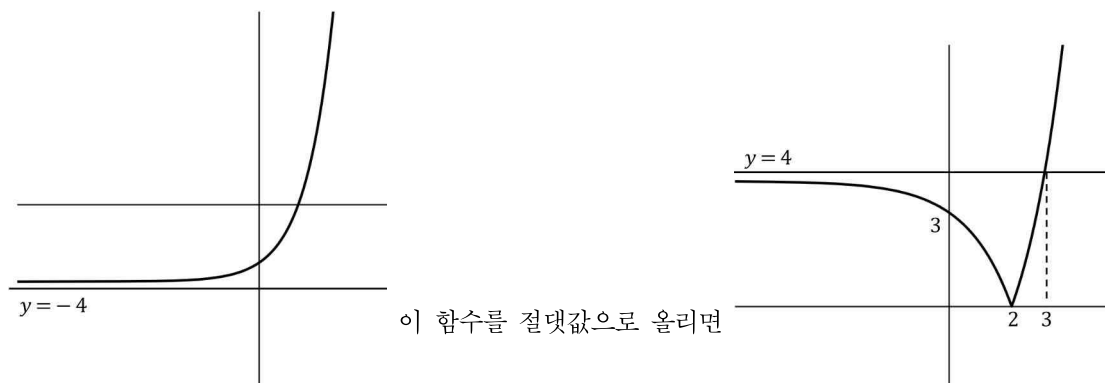
일대일대응은 뭔가요? 먼저 일대일함수여야 합니다. 하나의 x 값이 하나의 y 값에만 대응되어야 우리가 함수라고 부를 수가 있어요. $f(1)$ 이라는 값이 2도 되고 3도 되면 그건 함수라고 부를 수 없죠. 일대일함수는 반대로 하나의 y 값이 하나의 x 값에만 대응되는 함수를 말합니다. $f(1)$ 도 2이고 $f(3)$ 도 2인 $f(1) = f(3) = 2$ 인 경우는 존재하잖아요? 그런 경우가 아예 없어야 한다는 말입니다. 그래프로 표현하자면 x 축에 평행한 선을 그어서 두 점 이상 대응되는 점이 없으면 일대일함수가 되는 거예요.

그리고 일대일대응은 공역과 치역이 같아야 합니다. 문제에서 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 함수라고 그랬으니 정의역과 공역은 모두 실수 전체의 집합입니다. 따라서 치역 역시 실수 전체의 집합이어야 하죠. 이것 해석하면 결국 $f(x)$ 는 모든 실수 y 값을 함숫값으로 가져야 한다는 말이 됩니다.

종합해보면 $f(x)$ 는 모든 y 값을 함숫값으로 가지면서 각각의 y 값이 각기 다른 x 값에 대응되어야 하는 함수겠네요.

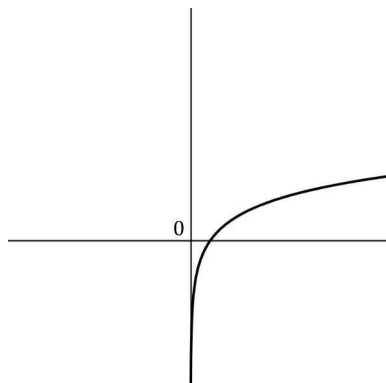
2) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 절댓값 함수

이제 함수를 그려볼게요. 먼저 $|2^x - 4|$ 부터 보죠. 이건 $y = 2^x - 4$ 에 절댓값을 씌운 형태이죠?



이렇게 그릴 수 있네요. $f(x)$ 는 이 함수를 $x \leq p$ 와 $x \geq q$ 부분만 사용하면 됩니다.

$p < x < q$ 부분의 $a + \log_2 x$ 는요? $\log_2 x$ 를 a 만큼 위아래로 조정할 함수네요. 대략

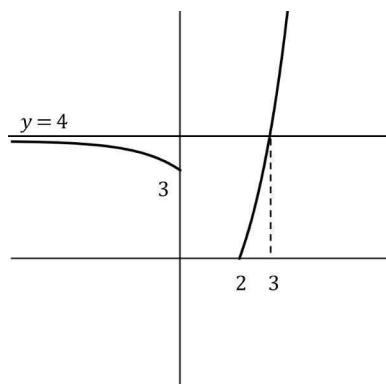


이렇게 되겠어요. 이거를 $p < x < q$ 에서 짜른 함수가 $f(x)$ 입니다.

이제 조건을 만족시키는 z 를 확인해봅시다. $|2^x - 4|$ 를 잘 보세요. x 축에 평행한 직선을 그었을 때 두 점에서 만나는 부분이 있죠? $0 < y < 4$ 일 때입니다. 이 부분은 없어야 하겠죠?

또한 모든 실수 y 값으로 가져야 합니다. 일단 $x > q$ 부분은 문제가 없어요. 함수가 계속 위로 가면서 모든 y 값을 함숫값으로 가지게 될 테니까요. 그런데 함숫값이 음수일 때는요? $|2^x - 4|$ 만으로는 부족합니다. 아예 함숫값으로 가질 수 없거든요. 이러면 $a + \log_2 x$ 부분의 $x = 0$ 에 한없이 가까워질 때를 이용해야겠죠? 이 부분이 반드시 포함되어야 모든 y 값을 가질 수 있게 되겠네요. 따라서 $p = 0$ 입니다.

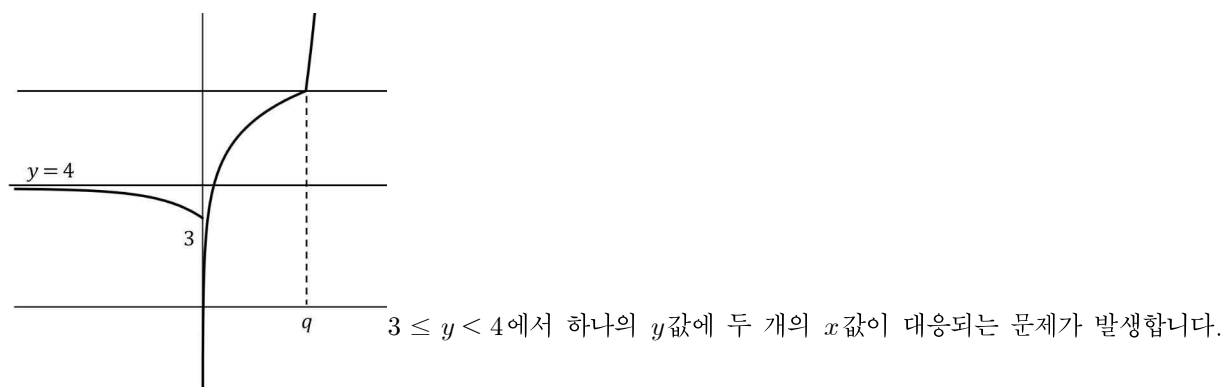
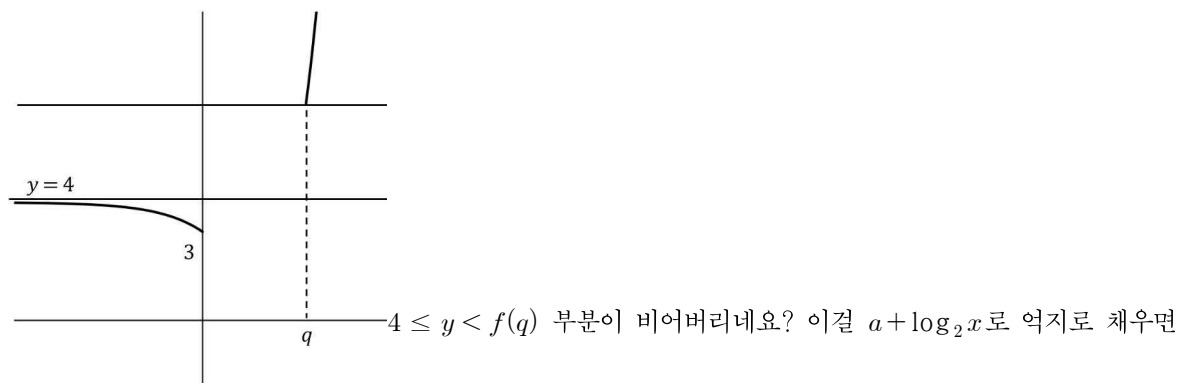
그럼 이제 q 값을 정해봅시다. 여기서 아까 생각했던 것을 되돌아보면 $|2^x - 4|$ 는 $0 < y < 4$ 부분이 y 값을 두 번 가져 문제가 되는 거잖아요? 그런데 $p = 0$ 이니까 일단 $x \leq 0$ 에서의 $|2^x - 4|$ 는 $f(x)$ 의 일부분으로 확정이 됐어요. 그러면 y 값 역시 $x \leq 0$ 에서의 y 값인 $3 \leq y < 4$ 도 $f(x)$ 의 값이 되었죠? 이때 q 가 3보다 작다면? $3 \leq y < 4$ 에서 겹치는 부분이 발생하죠?



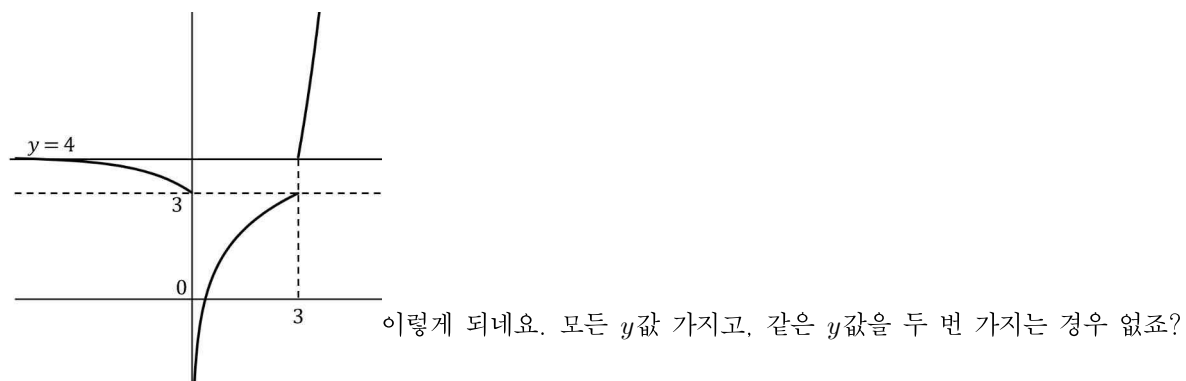
이렇게 $q = 2$ 이라면 $f(x) = 3$ 이 되는 x 값이 그림에서와 같이 두 개 존재하게

되잖아요? 이게 $3 \leq y < 4$ 의 모든 부분에 대하여 발생해요. 따라서 $q \geq 3$ 이어야 합니다.

그런데 $q > 3$ 이라면? 그래프가 또 이상해져요.



따라서 $q=3$ 이고



$f(3)=3$ 이므로 $a + \log_2 3 = 3$ 인데... a 값의 계산은 안될 것 같네요.

$p=0$, $q=3$ 이므로 $f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f(1.5)$ 입니다. $0 < x < 3$ 에서 $a + \log_2 x$ 이므로 $a + \log_2 1.5$ 를 구해야 하죠?

이때 $\log_2 1.5 = \log_2 \frac{3}{2} = -1 + \log_2 3$ 잖아요? 따라서 $f(1.5) = a - 1 + \log_2 3 = 2$ 입니다. 답은 ②번이네요.

3. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} & (a_n \geq 3) \\ 10 & (a_n < 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6 = 2$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을
구하시오. [2025년 3월 21]

3. 정답 381 [2025년 3월 21]

1) 문제해석

a_1 이 자연수이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} & (a_n \geq 3) \\ 10 & (a_n < 3) \end{cases}$ 을 만족시키는 수열이 있습니다. 이때

$a_6 = 2$ 를 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합을 구하라네요.

일단 $a_6 = 2$ 을 알고 있으니 a_5 부터 접근해볼게요. $a_6 = \begin{cases} \frac{a_5}{5} & (a_5 \geq 3) \\ 10 & (a_5 < 3) \end{cases}$ 인데 $a_6 \neq 10$ 이니깐 $\frac{a_5}{5} = a_6 = 2$ 이고

$a_5 = 10$ 이죠?

이제 a_4 를 확인해야 하는데... 여기서 케이스가 갈립니다. $a_4 \geq 3$ 이라면 $\frac{a_4}{4} = a_5 = 10$ 이고 $a_4 = 40$ 이고,

$a_4 < 3$ 이라면 $a_5 = 10$ 이니 둘 다 조건을 만족하죠. 여기서 케이스를 분류해야겠어요.

2) 케이스 분류

2-1) $a_4 = 40$ 일 때

$a_4 \neq 10$ 이니깐 $\frac{a_3}{3} = a_4 = 40$ 이고 $a_3 = 120$ 이네요. $a_3 \neq 10$ 이니깐 $\frac{a_2}{2} = a_3 = 120$ 이고 $a_2 = 240$ 이구요.

$a_2 \neq 10$ 이니깐 $\frac{a_1}{1} = a_2 = 240$ 이니깐 $a_1 = 240$ 입니다. 일단 하나 구했네요.

2-2) $a_4 < 3$ 일 때

$a_4 \neq 10$ 이니깐 $a_3 \geq 3$ 이고 $\frac{a_3}{3} = a_4$ 입니다. 이제 a_2 가 3보다 큰지 작은지에 따라 케이스가 또 나뉘네요.

2-2-1) $a_2 \geq 3$ 일 때

$\frac{a_2}{2} = a_3$ 입니다. 이제 마지막 a_1 만 남았어요. 만약 $a_1 < 3$ 이라면? $a_2 = 10$ 이 될 거예요. 그러면 a_2, a_3, a_4, a_5

순서대로 10, 5, $\frac{5}{3}$, 10가 됩니다. 이러면 조건 만족하네요? a_1 은 자연수이므로 $a_1 < 3$ 인 자연수는

1, 2입니다.

만약 $a_1 \geq 3$ 이라면? $a_1 = a_2$ 입니다. 이러면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 순서대로 $a_1, a_1, \frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{6}, 10$ 입니다. 이때

$a_1, a_2, a_3 \geq 3, a_4 < 3$ 이어야 하므로 $a_1 \geq 3, \frac{a_1}{2} \geq 3, \frac{a_1}{6} < 3$ 이어야 합니다. 종합하면 $6 \leq a_1 < 18$ 이네요.

이 중에 자연수는 6, 7, ..., 17입니다.

2-2-2) $a_2 < 3$ 일 때

이러면 $a_3 = 10$ 이죠? $a_4 = \frac{10}{3}$ 이구요. 그런데 $a_4 \geq 3$ 이네요? 우리가 가정한 $a_4 < 3$ 에 위배됩니다. 위배되지

않는다고 해도 $a_5 = \frac{10}{12}$ 이 되니까 $a_5 = 10$ 가 되질 않네요. 이 경우는 불가능합니다.

지금까지 구한 a_1 은 1, 2와 6, 7, ..., 17와 240입니다. 모두 더하면 381이네요.

4. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,
 $f(-5)$ 의 값을 구하시오. [2025년 3월 22]

4. 정답 154 [2025년 3월 22]

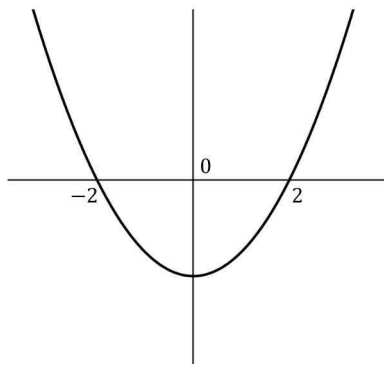
1) 함수 보이면 관찰 $\rightarrow$ 그래프 그리기, 절댓값 함수

먼저 삼차함수 $f(x)$ 가 있는데 $g(x)$ 가 $g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)| - |2x^2 - 8| & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라고 합니다. 이 함수가 실수

전체의 집합에서 미분가능하다고 하네요.

일단 함수가 굉장히 특이한 부분이 있어요. 바로 $x \geq 0$ 인 부분에서 $g(x) = |f(x)| - |2x^2 - 8|$ 인 함수죠. 이거는 일단 함수가 보이기 때문에 바로 분리해줄게요.

$$2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2) \text{이고}$$



이런 함수입니다. 이걸 절댓값을 씌우면 $0 < x < 2$ 부분에서는 반대 부호로

바뀌고 $x \geq 2$ 인 부분은 그대로 가겠죠? 따라서 $g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)| + 2x^2 - 8 & (0 \leq x < 2) \\ |f(x)| - 2x^2 + 8 & (x \geq 2) \end{cases}$ 입니다.

이러면 $x = 2$ 에서의 미분가능성을 따져봐야겠네요. 어느 점에서의 미분가능이라는 건 결국 그 점에서

좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다는 거잖아요? 만약 $f(2) > 0$ 이라면 좌미분계수는 $f'(2) + 8$,

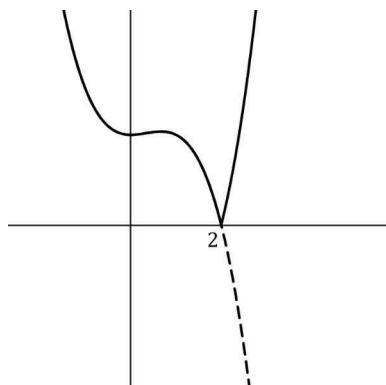
우미분계수는 $f'(2) - 8$ 가 됩니다. $f(2) < 0$ 이라면요? $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 x 축 아래에 있지만 절댓값이 씌워지면

부호가 반대로 바뀌면서 위로 올라가게 되죠? 이때 미분계수 역시 부호가 반대로 됩니다. 따라서 좌미분계수는

$-f'(2) + 8$, 우미분계수는 $-f'(2) - 8$ 이 되죠. 두 경우 모두 좌미분계수와 우미분계수가 같을 수가 없죠?

따라서 $f(2) = 0$ 이어야 합니다.

그래프를 그려보면



$f'(2)=a$ 라고 하면 그림처럼 $a < 0$ 이죠? 그런데 절댓값으로 씌워 올린

$|f(x)|$ 에서의 $x=2$ 의 좌미분계수는 $f'(2)=a$ 로 동일하지만 우미분계수는 $\lim_{x \rightarrow 2+} |f'(x)| = -a$ 가 됩니다.

반대로 $a > 0$ 인 경우도 마찬가지입니다. 좌미분계수가 음수가 나오고 우미분계수는 부호만 다른 양수가 나오죠. 따라서 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능이어야 하므로 $|f'(2)|+8 = -|f'(2)|-8$ 이어야 하고 $|f'(2)| = -8$ 입니다.

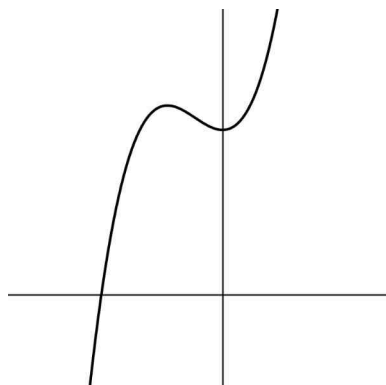
또한 함수의 경계도 확인해야겠죠? $g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ |f(x)|+2x^2-8 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$ 에서 먼저 $x=0$ 에서 연속이어야

하니까 $-f(0) = |f(0)|-8$ 입니다. $f(0) < 0$ 이라면 $-f(0) = -f(0)-8$ 이 되니까 식이 성립하지 않죠? 따라서 $f(0) > 0$ 이고 $-f(0) = f(0)-8$ 이므로 $f(0) = 4$ 입니다.

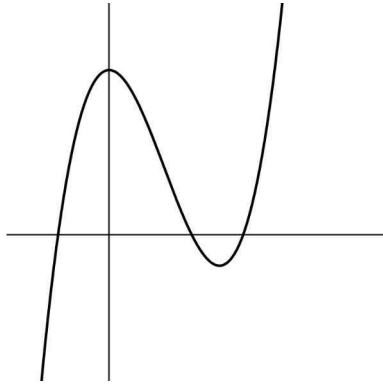
$x=0$ 에서 $f(0) = 4 > 0$ 이니까 사실상 $x \geq 0$ 에서 $x=0$ 부근은 $g(x) = f(x)+2x^2-8$ 이죠? $x=0$ 에서도 미분가능이어야 하므로 좌미분계수인 $-f'(0)$ 과 우미분계수인 $f'(0)$ 이 같아야 합니다. 따라서 $f'(0) = 0$ 이네요.

정리하면 $f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $|f'(2)| = 8$ 입니다. 이제 함수를 결정해볼게요.

우리는 아직 최고차항의 계수를 모르고 있어요. 만약 최고차항의 계수가 양수인 경우를 살펴볼게요.



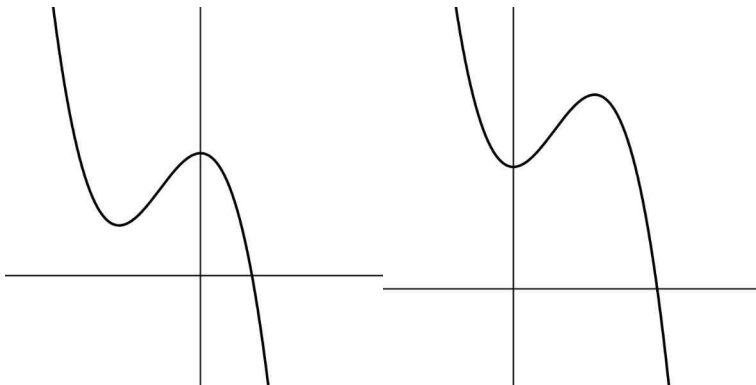
이거는 $f(2)=0$ 이 불가능하죠?



이거는 x 축과 만나는 어떤 점이 $x = 2$ 이더라도 문제가 발생해요. 아까도

설명했지만 절댓값 함수는 x 축과 만날 때 미분계수가 0이 아니라면 좌미분계수와 우미분계수가 달라집니다. 따라서 미분가능이 될 수가 없어요. $x = 2$ 에서는 함께 있던 $|2x^2 - 8|$ 의 미분계수가 같이 변화하면서 상쇄가 되었지만 그게 아니면 미분불가능합니다. 최고차항의 계수가 양수일 때는 아예 불가능하네요.

최고차항의 계수가 음수라면



두 경우 모두 $f(2) = 0$ 이 됩니다. 함수를 보면 $x = 2$ 에서 감소하므로 $f'(2) = -8$ 이겠네요.

2) 함수 구하기 - 차함수

$f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f'(2) = -8$ 입니다. $x = 0$ 에서 $y = 4$ 에 접하므로 $f(x) - 4$ 는 x 라는 인수를 적어도 두 개 가지죠? 최고차항의 계수를 a , 다른 인수를 b 로 잡으면 $f(x) - 4 = ax^2(x + b)$ 이고 $f(x) = ax^2(x + b) + 4$ 입니다. $f(2) = 0$ 이므로 $4a(2 + b) + 4 = 0$ 이고 $2a + ab + 1 = 0$ 입니다.

$f'(2) = -8$ 이므로 미분하고 값을 넣으면 $12a + 4ab = -8$ 이고 $3a + ab + 2 = 0$ 입니다. 위의 식과 연립하면 $a = -1$, $b = -1$ 이네요. $f(x) = -x^2(x - 1) + 4$ 입니다. $f(-5) = 154$ 입니다.

확통

5. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[2025년 3월 확통 28]

- (가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고,
짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

- ① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

5. 정답 ④ [2023년 4월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

먼저 1, 2, 3, 4가 각각 적힌 흰색 접시 4개와 A, B, C가 각각 적힌 검은색 접시 3개를 원 모양 식탁에 배치한다고 하네요. 이때 (가)조건에서 검은색 접시는 서로 이웃하면 안된다고 합니다. 그러면 일단 검은색 배치하고 사이사이에 최소한 흰색 접시가 하나씩은 들어가게 하면 되겠네요. 원으로 배열하면 $\frac{3!}{3} = 2$ 입니다.

검은색 접시 사이에는 지금 공간이 3개가 있죠? A랑 B 사이, B랑 C 사이, C랑 A 사이 이렇게 해서 3개가 있어요. 여기에 흰색 접시를 넣으려고 하는데 (나)조건에서 홀수끼리, 짝수끼리는 이웃하면 안된답니다.

지금 흰색 접시는 4개고 이거를 3개의 자리에 집어넣을 거니까 3개의 묶음으로 만들어야겠어요. 이때 묶음에는 흰색 접시 두 개, 한 개, 한 개 이렇게 들어가겠죠? 그런데 흰색 접시 두 개짜리 묶음은 무조건 이웃하게 되니까 이거를 홀수 하나, 짝수 하나로 뽑아야겠어요. 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$ 입니다. 이러면 묶음은 완성됐고 배열을 해야겠죠? 경우의 수는 $3! = 6$ 입니다. 그런데 두 개짜리 묶음은 서로 자리도 바꿀 수 있잖아요? 경우의 수는 $2! = 2$ 입니다. 따라서 모든 경우의 수는 $2 \times 4 \times 6 \times 2 = 96$ 입니다. 답은 ④번이네요.

6. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를

a, b, c, d 라 하자. $a \times b \times c \times d$ 가 16의 배수가 되는
순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오.

[2025년 3월 확통 29]

6. 정답 363 [2025년 3월 확통 29]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

주사위를 네 번 던져서 나온 눈의 수를 a, b, c, d 라고 하는데 다 곱해서 16의 배수가 되게 하는 경우의 수를 구하합니다.

16의 배수가 되려면 2의 배수가 최소한 4번은 나와야 한다는 거잖아요? 주사위의 눈은 1, 2, 3, 4, 5, 6이 가능하니까 2의 배수인 2, 4, 6이 핵심이 되겠네요.

이때 4는 2의 배수가 두 개 있는 것으로 적용되어 2, 6보다 핵심적이죠? 따라서 4의 개수를 기준으로 잡고 분류해봅시다.

이러면 결국 4와 2, 6, 그리고 나머지 1, 3, 5가 4번 중 각각 몇 번 나오는지에 따라서 경우의 수를 구하면 되겠네요. 이걸 순서쌍으로 (a, b, c) 의 형태로 표현할게요.

만약 4가 안 나왔다면? 그러면 2, 6으로 전부를 채워야 합니다. $(0, 4, 0)$ 이고 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 입니다.

4가 하나라면? 이러면 2, 6이 최소 2번은 나와야 합니다. 가능한 경우는 $(1, 2, 1), (1, 3, 0)$ 두 가지네요.

$(1, 2, 1)$ 의 경우 먼저 4를 배치합니다. 경우의 수는 4입니다. 이후에 1, 3, 5가 들어갈 자리를 정합니다.

경우의 수는 3이죠. 그럼 정해진 자리에 1, 3, 5 중 하나를 놓습니다. 경우의 수는 3입니다. 1, 3, 5이 들어갈 자리가 정해지면 2, 6이 들어갈 자리는 자동적으로 정해지죠? 두 자리에 들어갈 숫자를 정하면

$2 \times 2 = 4$ 입니다. 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 \times 4 = 144$ 입니다.

$(1, 3, 0)$ 의 경우도 4를 먼저 배치합니다. 경우의 수는 4입니다. 이러면 나머지 세 자리에는 2, 6을 배치하면 되니까 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 입니다. 따라서 $4 \times 8 = 32$ 이네요.

4가 두 개라면 2, 6이 없어도 조건을 만족시키네요. 가능한 경우는 $(2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 0)$ 세 가지입니다.

$(2, 0, 2)$ 의 경우 먼저 4가 들어갈 두 자리를 정합니다. 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$ 입니다. 이러면 자동적으로 나머지

1, 3, 5가 들어갈 자리가 정해지니까 각각 배치하면 $3 \times 3 = 9$ 입니다. 따라서 $6 \times 9 = 54$ 입니다.

$(2, 1, 1)$ 의 경우도 4가 들어갈 두 자리를 정하면 ${}_4C_2 = 6$ 입니다. 나머지 두 자리 중 2, 6이 들어갈 자리를

정하면 ${}_2C_1 = 2$ 입니다. 이러면 각각 2, 6 그리고 1, 3, 5를 배치하면 되죠? 따라서 $2 \times 3 = 6$ 입니다.
 $6 \times 2 \times 6 = 72$ 이네요.

(2, 2, 0)의 경우도 4의 자리를 먼저 정하면 ${}_4C_2 = 6$ 이고, 자동적으로 정해진 나머지 두 자리에 2, 6를 배치하면 $2 \times 2 = 4$ 입니다. $6 \times 4 = 24$ 이네요.

4가 세 개라면 가능한 경우는 (3, 0, 1), (3, 1, 0)입니다.

(3, 0, 1)의 경우 4가 들어갈 세 자리를 정하면 ${}_4C_3 = 4$ 입니다. 나머지 자리에는 1, 3, 5를 배치하면 되니까 경우의 수는 3이네요. $4 \times 3 = 12$ 입니다.

(3, 1, 0)의 경우도 4가 들어갈 세 자리를 정하면 ${}_4C_3 = 4$ 이고 나머지 자리에 들어갈 2, 6을 정하면 2입니다.
 $4 \times 2 = 8$ 이네요.

마지막으로 4가 네 개인 경우의 수는 1입니다. 따라서 구하는 경우의 수는
 $16 + 144 + 32 + 54 + 72 + 24 + 12 + 8 + 1 = 363$ 입니다.

7. 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게
다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는
학생이 있을 수 있다.) [2025년 3월 확통 30]

- (가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.

(나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의
개수의 2배이다.

7. 정답 330 [2025년 3월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생에게 나누어 주는데 같은 색 공끼리는 서로 구별이 안된다고 합니다. 일단 중복조합을 사용하는 상황인 것 같아요.

이때 (가)조건에서 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수라고 하고, (나)조건에서 D가 받는 공의 개수는 E의 두 배라고 하네요. 그럼 이걸 기준으로 상황을 이해해볼게요.

공은 총 8개가 있고, 만약 E가 아예 공을 못받았다면 D도 못 받습니다. 그러면 A, B, C가 8개를 받게 되죠? 이러면 홀수 개가 아니네요.

E가 하나를 받았다면 D는 두 개를 받아야 합니다. 이러면 A, B, C가 5개를 받으면 되네요. 이걸 조건을 만족시킵니다.

E가 두 개를 받았다면 D는 네 개를 받아야 합니다. 이러면 A, B, C가 2개를 받게 되니까 조건을 만족시키지 못합니다. 세 개 이상 받는다면 아예 공이 부족하구요.

따라서 가능한 경우는 A, B, C가 5개, D가 2개, E가 1개를 받는 상황입니다.

경우가 적은 걸 기준으로 잡죠. E는 검은 공을 받았을까요 흰 공을 받았을까요? 각각 나눠봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) E가 검은 공을 받는 경우

이러면 D가 받는 공은 검검, 검흰, 흰흰 이 세가지 경우가 가능하죠? 각각 경우를 또 나눠봅시다.

2-1-1) D가 검은 공 2개를 받는 경우

이러면 A, B, C에게 검은 공 1개와 흰 공 4개를 주면 됩니다. 이러면 세 명의 학생이 각각 공을 몇 개 받는지가 중요하겠죠? 가능한 순서쌍은 (0, 0, 5), (0, 1, 4), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 2)입니다. 각각 경우의 수를 구한 후 세 학생 A, B, C에게 배열하면 되겠네요.

(0, 0, 5)의 경우 한 학생에게 공을 5개 주는 경우입니다. 경우의 수는 1입니다. 이걸 세 학생에게 배열하면 중복이 있으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$ 입니다. 총 $1 \times 3 = 3$ 이네요.

(0, 1, 4)의 경우 검은 공 1개를 어디에 배치하는가가 중요해지겠네요. 경우는 (0, 검, 흰흰흰흰)과 (0, 흰, 검흰흰흰)이 있습니다. 두 경우 모두 중복이 없으므로 총 경우의 수는 $2 \times 3! = 12$ 입니다.

(0, 2, 3)의 경우 (0, 검흰, 흰흰흰), (0, 흰흰, 검흰흰) 두 경우가 있습니다. 이것도 중복이 없으니까 세 학생에게 배열하면 총 경우의 수는 $2 \times 3! = 12$ 입니다.

(1, 1, 3)의 경우 (검, 흰, 흰흰흰), (흰, 흰, 검흰흰) 두 경우가 있습니다. (검, 흰, 흰흰흰)의 경우는 중복이 없으므로 $3! = 6$ 인데 (흰, 흰, 검흰흰)의 경우는 중복이 있으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$ 입니다. 총 $6 + 3 = 9$ 이네요.

(1, 2, 2)의 경우 (검, 흰흰, 흰흰), (흰, 검흰, 흰흰) 두 경우가 있습니다. 이것도 마찬가지로 (흰, 검흰, 흰흰)의 경우 중복이 없으므로 $3! = 6$ 인데 (검, 흰흰, 흰흰)의 경우 중복이 있으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$ 입니다. 총 $6 + 3 = 9$ 이네요.

따라서 이 경우의 모든 경우의 수는 $3 + 12 + 12 + 9 + 9 = 45$ 입니다.

2-1-2) D가 검은 공 1개, 흰 공 1개를 받는 경우

A, B, C에게 검은 공 2개, 흰 공 3개를 주면 됩니다.

이것도 (0, 0, 5), (0, 1, 4), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 2)가 가능합니다.

(0, 0, 5)의 경우 경우의 수는 1이고, 중복이 있으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$ 입니다.

(0, 1, 4)의 경우 (0, 검, 검흰흰흰), (0, 흰, 검검흰흰)이 가능하고 중복이 없으므로 $2 \times 3! = 12$ 입니다.

(0, 2, 3)의 경우 (0, 검검, 흰흰흰), (0, 검흰, 검흰흰), (0, 흰흰, 검검흰)이 가능합니다. 중복이 없으므로 $3 \times 3! = 18$ 입니다.

(1, 1, 3)의 경우 (검, 검, 흰흰흰), (검, 흰, 검흰흰), (흰, 흰, 검흰흰)이 가능합니다.

(검, 검, 흰흰흰), (흰, 흰, 검흰흰) 두 경우는 중복이 있으므로 $2 \times \frac{3!}{2!} = 6$ 이고, (검, 흰, 검흰흰)의 경우는 중복이 없으므로 $3! = 6$ 입니다. 총 $6 + 6 = 12$ 이네요.

(1, 2, 2)의 경우 (검, 검흰, 흰흰), (흰, 검흰, 검흰), (흰, 검검, 흰흰)이 가능합니다.

(흰, 검 흰, 검 흰)의 경우 중복이 있으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$, 나머지는 없으므로 $2 \times 3! = 12$ 입니다. 총 $3 + 12 = 15$ 이네요.

따라서 이 경우의 모든 경우의 수는 $3 + 12 + 18 + 12 + 15 = 60$ 입니다.

2-1-3) D가 흰 공 2개를 받는 경우

A, B, C에게 검은 공 3개, 흰 공 2개를 주면 됩니다. 그런데 이러면 사실상 2-1-2)의 경우에서 공의 색만 반대가 된 상황 아닌가요? 구조가 같으니 경우의 수 역시 같습니다. 경우의 수는 60입니다.

따라서 E가 검은 공을 받는 경우의 수는 $45 + 60 + 60 = 165$ 입니다.

2-2) E가 흰 공을 받는 경우

이거도 마찬가지로 E가 검은 공을 받는 경우와 색만 반대로 된 경우죠? 경우의 수 역시 같습니다. 경우의 수는 165입니다.

따라서 구하는 경우의 수는 $165 + 165 = 330$ 이네요.