

과천여자고등학교 <공통수학1> 2025년 1학년 1학기 1차지필평가 다항식 ~ 이차함수	확실히 해결	계산 실수	조건을 잘못 봄	걸린 시간	채점

1. 두 다항식 $A = x^2 - 2xy - 3y^2$, $B = 2x^2 + xy + y^2$ 에 대하여 $A - 2(X - B) = 3A$ 가 성립할 때, 다항식 X 는 [4.0점]

- ☒ ① $x^2 + 3xy + 4y^2$ ② $x^2 + 2xy - 3y^2$ ③ $2x^2 + xy - y^2$
 ④ $x^2 - 2xy + 3y^2$ ⑤ $x^2 - 3xy - 4y^2$

풀: $A - 2X - 2B = 3A$
 $\Rightarrow 2X = -2A - 2B$
 $\Rightarrow X = -A - B$
 $= -x^2 + 2xy + 3y^2$
 $+ 2x^2 + xy + y^2$
 $= x^2 + 3xy + 4y^2$

2. 이차방정식 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면? [4.1점]

- ☒ ① 10 ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{2}{13}$

풀: $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\frac{1}{2})}$
 $= \frac{2^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{(\frac{1}{2})}$
 $= 10$

3. 다음은 다항식 $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ 을 $2x + 1$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하기 위하여 조립제법을 이용하는 과정이다.

$-\frac{1}{2}$	2	-3	4	1
		-1	2	3
	2	-4	6	-2

이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(2x^2 - 4x + 6\right) - 2$
 $= (2x + 1) \left(x - 2 + 3\right) - 2$
 따라서 몫은 $(x - 2 + 3)$ 이고, 나머지는 -2 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(2) + g(2)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ☒ ⑤ 9

풀: $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$
 $g(x) = x - 2 + 3$

4. 복소수 $z = \frac{1+i}{1-i}$ 에 대하여

$1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots + 9z^9 + 10z^{10} = a + bi$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면? [4.3점]

- ① 48 ☒ ② 50 ③ 52
 ④ 52 ⑤ 56

풀: $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$
 $\Rightarrow a + bi = 1 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + 9i^9 + 10i^{10}$
 $= (1 - 2 + 4 - 6 + 8 - 10) + (1 - 3 + 5 - 7 + 9)i$
 $= -5 + 5i$
 $\Rightarrow a = -5, b = 5$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

5. 두 자연수 x, y 에 대하여 $xy^2 + 2xy + y^2 + x + 2y + 1$ 의 값이 100일 때, $x \times y$ 의 값을 구하면? (단, $y \neq 1$) [4.4점]

- ① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

솔: $xy^2 + 2xy + y^2 + x + 2y + 1 = 100$

$\Rightarrow (y^2 + 2y + 1)x + (y^2 + 2y + 1) = 100$

$\Rightarrow (y^2 + 2y + 1)(x+1) = 100$

$\Rightarrow \underbrace{(x+1)}_{2} \underbrace{(y+1)^2}_{5^2} = 2^2 \cdot 5^2$

$\Rightarrow y+1 = 5, x+1 = 2 \rightarrow x=3, y=4$

6. 다항식 $(x+2)^3 + 3(x+2)^2 + 3(x+2) + 1$ 을 $(x+1)^2$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은? [4.8점]

- ① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

솔: $f(x) = (x+2)^3 + 3(x+2)^2 + 3(x+2) + 1$

$= (x+1+1)^3 + 3(x+1+1)^2 + 3(x+1+1) + 1$

$= (x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 + 3(x+1)^2 + 6(x+1) + 3 + 3x + 7$

$= (x+1)^2(x+1+6) + \underline{12x+20}$

$\Rightarrow R(x) = 12x+20$

$\Rightarrow R(2) = 44$

7. $0 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x) = (x^2 - 4x + 6)^2 - 2(x^2 - 4x + 6) + 3$ 의 최댓값을 α , 최솟값을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은? [4.5점]

- ① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

솔: $t = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$

$\Rightarrow t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2 \quad (2 \leq t \leq 6)$

$\alpha = (6-1)^2 + 2 = 27$
 $\beta = (2-1)^2 + 2 = 3$

8. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3}$
 $(3x^2 - x - 1)^5 = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ 이 성립할 때,

$\frac{a_1}{3^1} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_5}{3^5} + \dots + \frac{a_9}{3^9} = -\frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하면? (단, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 상수이고 p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4.5점]

① 87 ② 121 ③ 243
④ 364 ⑤ 458

솔: $x = \frac{1}{3}$ 대입 $\Rightarrow 1 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_9}{3^9} + \frac{a_{10}}{3^{10}} = -1$

$x = -\frac{1}{3}$ 대입 $\Rightarrow 1 - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} - \frac{a_3}{3^3} + \dots - \frac{a_9}{3^9} + \frac{a_{10}}{3^{10}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^5$

① - ② : $2\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_9}{3^9}\right) = -1 - \left(-\frac{1}{243}\right) = \frac{-242}{243}$

$\therefore \frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_9}{3^9} = -\frac{121}{243}$

9. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2k - 5 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 최댓값을 구하면? [4.5점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

$$\Delta = 16 - 4(2k - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2k + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2k < 9$$

$$\Rightarrow k < \frac{9}{2}$$

10. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 8k$ 의 그래프와 직선 $y = 2ax + b - 4k^2$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 접할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면? [4.6점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

$$x^2 - 4kx + 8k = 2ax + b - 4k^2$$

$$x^2 - 2(2k+a)x + 4k^2 + 8k - b = 0$$

$$\Delta = (2k+a)^2 - 4(4k^2 + 8k - b) = 0$$

$$= 4(a-2)k + a^2 + 4b = 0$$

$$\Rightarrow a=2, b=-4$$

11.

모든 실수 x 에 대하여 다음 두 이차식 $f(x), g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$x=1, 2$ 때만.

$$(i) (x-1)f(x) = (x+2)g(x) \Rightarrow g(1)=0, f(2)=0$$

$$(ii) f(x) \times g(x) = 4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$$

& 최댓값을 구하면

$f(5) - g(5)$ 의 값을 구하면? [4.6점] (단, $f(x), g(x)$ 의 최댓값을 구하는 2이다.)

- ① 31 ② 29 ③ 27
④ 25 ⑤ 23

$$f(x) \times g(x) = (x-1)(x+2)(2x-1)^2$$

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)(2x-1) \\ g(x) = (x-1)(2x-1) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} f(x) = -(x+2)(2x-1) \\ g(x) = -(x-1)(2x-1) \end{cases}$$

$$f(5) - g(5) = 27 \text{ or } -27$$

12. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

일 때, $\frac{4a^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{4b^2}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{4c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$ 의 값을 구하면?

[4.66점]

- ① -3 ② -6 ③ -9
④ -12 ⑤ -15

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = 0$$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$\Rightarrow \frac{4a^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{4b^2}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{4c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$= \frac{4a^2}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{4b^2}{c^2 + a^2 - (c+a)^2} + \frac{4c^2}{a^2 + b^2 - (a+b)^2}$$

$$= \frac{2a^2}{-bc} - \frac{2b^2}{ca} - \frac{2c^2}{ab}$$

$$= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{-abc} = \frac{2(3abc)}{-abc} = -6$$

13. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha + 2, \beta + 2$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구하면? [4.6점]

- ① $x^2 + 2x + 3 = 0$ ② $x^2 + 3x + 2 = 0$
 ③ $x^2 + 3x - 2 = 0$ ④ $x^2 - 3x - 2 = 0$
 ⑤ $x^2 - 2x + 3 = 0$

sol:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha+2) + (\beta+2) = \alpha + \beta + 4 = 2 \\ (\alpha+2)(\beta+2) = \alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 4 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

14. 어느 일차식과 다항식 $x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ 을 곱한 다항식을 $F(x)$ 라고 할 때, 다항식 $F(x)$ 의 모든 7계수의 합이 10이고 다항식 $F(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 7이다. 이때, 일차식을 $G(x)$ 라고 할 때, $G(5)$ 의 값을 구하면? [4.6점]

- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 19

sol:
$$\begin{cases} F(x) = (x^3 - 5x^2 + 7x - 1)G(x) \\ F(1) = 10, F(2) = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x) = 2x + 3$$

15. $(1+2i)^2 z + (\bar{z} - 7)i + 9 = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 에 대하여 $\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}$ 의 값을 구하면? [4.6점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

sol: $z = a+bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow (-3+4i)(a+bi) + (a-7-bi)i + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-3a-3b+9)}_0 + \underbrace{(5a-3b-7)}_0 i = 0$$

$$a=2, b=1$$

$$\Rightarrow z = 2+i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 4 \\ z\bar{z} = 5 \end{cases}$$

16. 이차방정식 $x^2 - x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\bar{\alpha}-7}{\alpha^2+\bar{\alpha}+2} + \frac{\bar{\beta}-7}{\beta^2+\bar{\beta}+2}$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이다.) [4.7점]

- ① $\frac{2}{19}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{4}{17}$
 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

sol:
$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha, \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 5 \\ \alpha^2 - \alpha + 5 = 0, \beta^2 - \beta + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\bar{\alpha}-7}{\alpha^2+\bar{\alpha}+2} + \frac{\bar{\beta}-7}{\beta^2+\bar{\beta}+2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta-7}{\alpha^2+\beta+2} + \frac{\alpha-7}{\beta^2+\alpha+2} \stackrel{\beta=\bar{\alpha}, \alpha=\bar{\beta}}{=} \frac{-\alpha-6}{\alpha^2-\alpha+3} + \frac{-\beta-6}{\beta^2-\beta+3} \\ &\stackrel{\alpha^2=\alpha-5}{=} \frac{-\alpha-6}{-2} + \frac{-\beta-6}{-2} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + 6 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

17. 등식 $a^3 - b^3 - (a^2 - b^2)c + a^2b - ab^2 = 0$ 을 만족시키는 8이하의 서로 다른 세 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하면? [4.7점]

- ① 36 ② 32 ③ 28
 ④ 24 ⑤ 20

sol: $-(a-b)(a+b)c + (a-b)(a^2+ab+b^2) + ab(a-b) = 0$

$\Rightarrow (a-b)(-(a+b)c + (a^2+ab+b^2) + ab) = 0$
 $(a+b)^2$

$\Rightarrow (a-b)(a+b)(a+b-c) = 0$

$a=1 \Rightarrow b \leq 7 \& b \neq 1$

$a=2 \Rightarrow b \leq 6 \& b \neq 2$

$a=3 \Rightarrow b \leq 5 \& b \neq 3$

$a=7 \Rightarrow b=1$

$6+5+4+3+3+2+1 = 24$

18. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 $S(n) = (1+x^2)^n + (1-x)^n$

이라 하자. 이때, $S(1) + S(2) + S(3) + S(4)$ 의 값은? [4.7점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
 ④ 0 ⑤ 1

sol: $x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$\Rightarrow 1 - x = -x^2$

$S(n) = x^n + (-x^2)^n$

$S(1) + S(2) + S(3) + S(4)$

$= x + x^2 + x^3 + x^4 - x^2 - x^4 - x^3 - x^6$

$= x + x^3 + 2x^4 - x^6 + x^8$

$= x + (-1) - 2x - 1 + x^2$

$= x^2 - x - 2$

$= (x^2 - x + 1) - 3 = -3$

19. 모든 실수 x 에 대하여 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $P(x) + Q(x) = 4 \rightsquigarrow Q(x) = 4 - P(x)$

(2) $\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$

$P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수일 때, $P(2) + Q(3)$ 의 값은? [4.7점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

sol: $P(x)^3 + Q(x)^3 = (P(x) + Q(x))(P(x)^2 - P(x)Q(x) + Q(x)^2)$
 $= 4(P(x)^2 - P(x)(4 - P(x)) + (4 - P(x))^2)$
 $= 4(3P(x)^2 - 4P(x) + 16)$

$\Rightarrow 3P(x)^2 - 4P(x) + 16 = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4$

$\Rightarrow P(x)^2 - 4P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$

$\Rightarrow P(x)(P(x) - 4) = (x-1)(x+2)(x^2+x+2)$

$= (x^2+x-2)(x^2+x+2)$

$= (-x^2-x+2)(-x^2-x-2)$

$\begin{cases} Q(x) = 4 - P(x) \\ P(2) = -4 \\ Q(3) = 4 - P(3) = 14 \end{cases}$

20. 인수분해를 이용하여 $\frac{902^3 + 8}{902 \times 900 + 4}$ 의 값을 구하면? [4.8점]

- ① 903 ② 904 ③ 905
 ④ 906 ⑤ 907

sol: $902 = x$

$\Rightarrow \frac{x^3 + 8}{x(x-2) + 4} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4}$

$= x + 2$

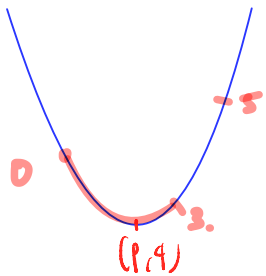
$= 904$

21. 두 양수 p, q 에 대하여 이차함수 $f(x) = (x-p)^2 + q$ 와 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값은? [4.9점]

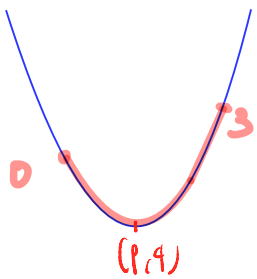
- (가) $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 m 이고 최댓값은 $m+4$ 이다.
 (나) $0 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 m 이고 최댓값은 $4m$ 이다.

- ① 64 ② 65 ③ 66
 ④ 67 ⑤ 68

sol: Case 1



$$\begin{aligned} p &= 2, \quad q = m, \\ f(0) &= 2^2 + m = m + 4 \\ f(5) &= 3^2 + q = m + 9 = 4m \\ m &= 3. \\ \Rightarrow f(x) &= (x-2)^2 + 3 \\ f(10) &= 8^2 + 3 = \boxed{67} \end{aligned}$$

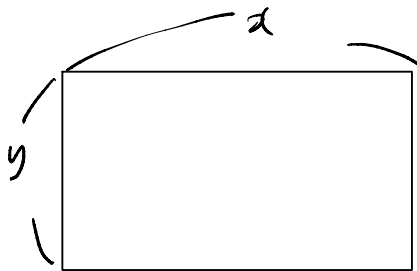


$$\begin{aligned} p &= 1, \quad q = m. \\ f(3) &= 2^2 + m = m + 4 \\ f(5) &= 4^2 + m = 4m \\ \Rightarrow m &= \frac{16}{3} = 9\frac{1}{3} \end{aligned}$$

22. 길이가 60인 철망을 이용하여 직사각형 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.) [5.0점]

- ① 215 ② 220 ③ 225
 ④ 230 ⑤ 235

sol:



$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x + 2y &= 60 \quad (0 < x < 30) \\ \Rightarrow xy &= x(30 - x) \\ &= -x^2 + 30x \\ &= -(x - 15)^2 + 225 \end{aligned}$$

-
- 1) ①
 - 2) ①
 - 3) ⑤
 - 4) ②
 - 5) ①
 - 6) ③
 - 7) ②
 - 8) ④
 - 9) ③
 - 10) ③
 - 11) ③
 - 12) ②
 - 13) ⑤
 - 14) ②
 - 15) ④
 - 16) ⑤
 - 17) ④
 - 18) ③
 - 19) ⑤
 - 20) ②
 - 21) ④
 - 22) ③