

01

[풀이]

$$\begin{aligned} \left(3^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(3^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

답 ③

02

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 5) = f(1) + 5 = 2f(1)$$

$$\therefore f(1) = 5$$

답 ⑤

03

[풀이]

일의 자리의 수가 짝수 즉, 2 또는 4이면 된다.

○○○2: 3개의 ○에 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 이다.

○○○4: 마찬가지로 방법으로 경우의 수는 125이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$125 + 125 = 250$$

답 ③

04

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(>0)$ 이라고 하자.

(그리고 $a_1 > 0$ 이다.)

문제에서 주어진 두 등식에서

$$a_1 r^3 = 4a_1 r, \quad a_1 + a_1 r = 12$$

왼쪽 등식을 풀면 $r^2 = 4$, $r = 2(\because r > 0)$

이를 오른쪽 등식에 대입하면

$$3a_1 = 12, \quad a_1 = 4$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = 4 \times 2^4 = 64$$

답 ⑤

05

[풀이]

$$f'(x) = 2x(2x+5) + (x^2-1) \times 2$$

$$\therefore f'(-1) = -6$$

답 ①

06

[풀이]

$$p = 0.1, \quad q = 1 - 0.1 = 0.9 \text{에서}$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}} = 0.03,$$

$$\text{즉 } \frac{0.3}{\sqrt{n}} = 0.03, \quad \sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

답 ④

07

[풀이]

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4} \pi = 24\pi$$

답 ④

08

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 우변을 전개하면

$$xf(x) + 6 = x^4 + 3x^3 + 2x + 6,$$

$$xf(x) = x^4 + 3x^3 + 2x$$

양변을 $x(\neq 0)$ 로 나누면

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x \right]_0^2$$

$$= 4 + 8 + 4 = 16$$

답 ②

[참고]

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3x^2 + 2) = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

09

[풀이]

$$a+b=7 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 를 모두 쓰면

$$\boxed{(1, 6)}, (2, 5), \boxed{(3, 4)}, \boxed{(4, 3)},$$

$$(5, 2), \boxed{(6, 1)} \text{ (총 6개)}$$

$$a \times b = (6 \text{의 배수})$$

$$= 6 \text{ 또는 } 12 \text{ 또는 } 18 \text{ 또는 } 24 \text{ 또는 } 30 \text{ 또는 } 36 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 를 모두 쓰면

$$\boxed{(1, 6)}, (2, 3), (3, 2), \boxed{(6, 1)},$$

$$(2, 6), \boxed{(3, 4)}, \boxed{(4, 3)}, (6, 2)$$

$$(3, 6), (6, 3),$$

$$(4, 6), (6, 4),$$

$$(5, 6), (6, 5),$$

$$(6, 6) \text{ (총 15개)}$$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 순서쌍은

$$(1, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 1) \text{ (총 4개)}$$

뿐이다.

따라서 구하는 확률은

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{6}{36} + \frac{15}{36} - \frac{4}{36} = \frac{17}{36}$$

답 ②

10

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 최솟값을 가진다.

$$f(k) = 2^{2k} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

$$2^{2k} = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}, \quad 2k = \frac{5}{2}$$

$$\therefore k = \frac{5}{4}$$

답 ⑤

11

[풀이]

접점의 x 좌표를 t 라고 하자.

$$y' = 3x^2 - 2 \text{에서 (기울기)} = 3t^2 - 2$$

접선의 방정식은

$$y = (3t^2 - 2)(x - t) + t^3 - 2t + 17$$

이 직선은 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (3t^2 - 2)(0 - t) + t^3 - 2t + 17,$$

정리하면

$$t^3 = 8, \quad t = 2 \quad (\because t \text{는 실수})$$

접선의 방정식을 다시 쓰면

$$y = 10(x - 2) + 21, \text{ 즉 } y = 10x + 1$$

이 직선이 점 $(a, 11)$ 을 지나므로

$$11 = 10a + 1$$

$$\therefore a = 1$$

답 ①

12

[풀이]

우선 제2열에 수를 나열하는 경우의 수를 구하자.

짝=짝+짝+짝 $\dots \textcircled{㉠}$

=짝+홀+홀 $\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$: 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 세 개의 수를 택한 순열의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

$\textcircled{㉡}$: 2, 4, 6, 8 중에서 한 개의 수를 택하고, 1, 3, 5, 7, 9 중에서 서로 다른 두 개의 수를 택할 경우의 수는 $4 \times {}_5C_2$ 이므로 구하는 경우의 수는

$$4 \times {}_5C_2 \times 3! = 240$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(24 + 240) \times 6!}{9!} = \frac{11}{21}$$

이때, 분자의 6!은 제1열, 제3열에 나머지 수를 놓는 경우의 수이다.

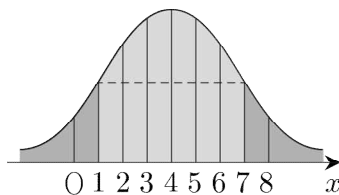
답 ②

13

[풀이]

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하자.

우선 조건 (가)에서 m 의 값을 구하자.



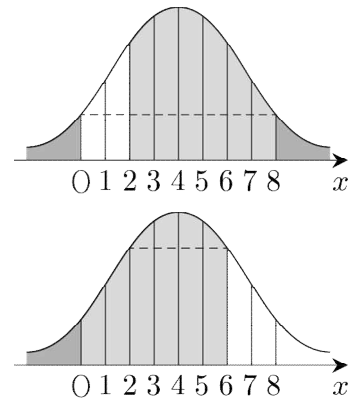
$$P(X \geq 1) + P(X \geq 7) = 1 \text{에서}$$

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \geq 1) = P(X \leq 1)$$

$$\text{즉, } P(X \geq 7) = P(X \leq 1)$$

위의 그림처럼 $m = 4 (= \frac{1+7}{2})$ 이다.

조건 (나)에서 σ 의 값을 구하자.



$$\begin{aligned} &P(|X-5| \leq 3) + P(X \leq 0) \\ &= P(2 \leq X \leq 8) + P(X \leq 0) \\ &= P(2 \leq X \leq 8) + P(X \geq 8) \\ &= P(X \geq 2) \text{ (여기까지 위의 그림)} \\ &= P(X \leq 6) \text{ (아래 그림)} \\ &= P\left(Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) \left(\because Z = \frac{X-4}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \leq 1) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{\sigma} = 1, \sigma = 2$$

$$\therefore \sigma(X) = 2$$

답 ②

14

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$$a_4 = a_3 - 2k, a_3 = 2k + 2 \quad (\because a_4 = 2)$$

마찬가지의 방법으로

$$a_2 = 4k + 2, a_1 = 6k + 2$$

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$$a_5 = ka_4 + 2 = 2k + 2$$

마찬가지의 방법으로

$$a_6 = 2k^2 + 2k + 2, a_7 = 2k^3 + 2k^2 + 2k + 2$$

그런데 $a_1 = a_7$ 이므로

$$\begin{aligned} &6k + 2 = 2k^3 + 2k^2 + 2k + 2, k^3 + k^2 - 2k = 0, \\ &k(k+2)(k-1) = 0, \therefore k = -2 \text{ 또는 } 0 \text{ 또는 } 1 \\ &k = -2, 0, 1 \text{ 일 때,} \end{aligned}$$

$$|a_1| + |a_2| = |6k+2| + |4k+2|$$

의 값은 각각 16, 4, 14이다.

따라서 구하는 최댓값은 16이다.

답 ③

15

[풀이]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라고 하면

$$v_1 = (x_1)' = 3t^2 + 3, \quad v_2 = (x_2)' = 6$$

$$v_1 = 5v_2, \quad 3t^2 + 3 = 30, \quad t^2 = 9, \quad t = 3$$

점 P의 시각 t 에서의 가속도를 a 라고 하면

$$a = (v_1)' = 6t$$

따라서 구하는 가속도는

$$6 \times 3 = 18$$

답 ③

16

[풀이]

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow |2\sin ax + b| = 1$$

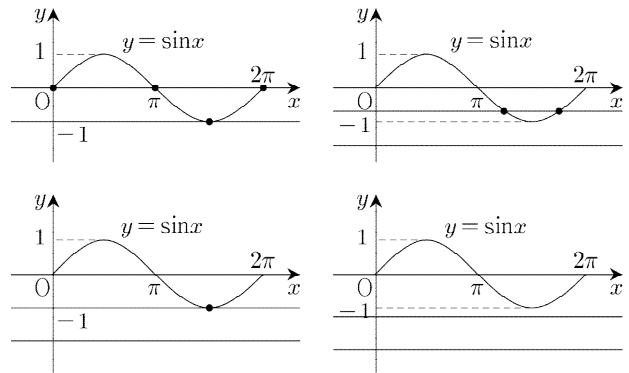
$$\Leftrightarrow \sin ax = \frac{-b+1}{2} \quad \text{또는} \quad \sin ax = \frac{-b-1}{2}$$

(단, $0 \leq x \leq 2\pi$)

이제 곡선 $y = \sin ax$ 와 두 직선 $y = \frac{-b+1}{2},$

$y = \frac{-b-1}{2}$ 의 교점의 개수의 합이 10이 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 를 찾으려 한다. 이때, 이 두 직선 사이의 거리는 1이고, 두 직선은 모두 제1사분면&제2사분면을 지나지 않는다.

• $a = 1$ 인 경우 (×)

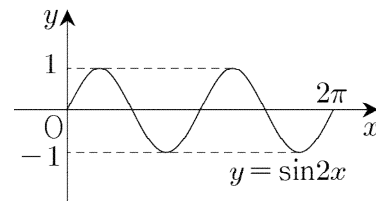


곡선 $y = \sin x$ 와 두 직선의 교점의 개수의 합은

$$4(=3+1), \quad 2(=2+0), \quad 1(=1+0), \quad 0(=0+0)$$

이다. 따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• $a = 2$ 인 경우 (×)

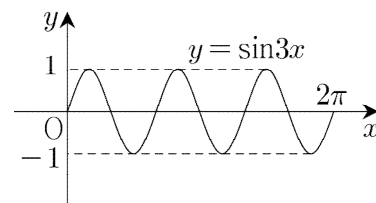


곡선 $y = \sin x$ 와 두 직선의 교점의 개수의 합은

$$7(=5+2), \quad 4(=4+0), \quad 2(=2+0), \quad 0(=0+0)$$

이다. 따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• $a = 3$ 인 경우 (○)



곡선 $y = \sin x$ 와 두 직선의 교점의 개수의 합은

$$10(=7+3), \quad 6(=6+0), \quad 3(=3+0), \quad 0(=0+0)$$

이다.

$$\frac{-b+1}{2} = 0, \quad \frac{-b-1}{2} = -1 \text{ 이면 } b = 1 \text{ 이고,}$$

두 직선은 $y = 0, y = -1$ 이다.

이때, $(a, b) = (3, 1)$

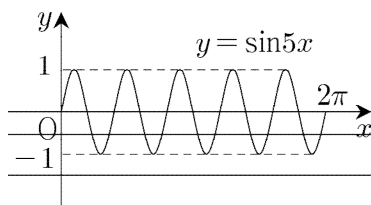
⋮

마찬가지의 방법으로 아래의 표를 얻는다.

a	곡선과 두 직선의 교점의 개수의 합
4	$13(=9+4)$, $8(=8+0)$, $4(=4+0)$, $0(=0+0)$
5	16, 10, 5, 0
6	19, 12, 6, 0
7	22, 14, 7, 0
8	25, 16, 8, 0
9	28, 18, 9, 0
10	31, 20, 10, 0
$\vdots$	$\vdots$

위의 표에서 $a=5$, $a=10$ 인
두 경우만이 가능하다는 것을 알 수 있다.

• $a=5$ 인 경우 (○)

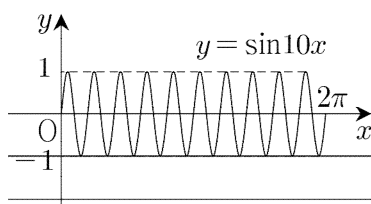


$$-1 < \frac{-b+1}{2} < 0, \quad \frac{-b-1}{2} < -1 \text{ 이면}$$

$$1 < b < 3 \text{에서 } b=2$$

$$\text{이때, } (a, b) = (5, 2)$$

• $a=10$ 인 경우 (○)



$$\frac{-b+1}{2} = -1 \text{ 이면 } b=3 \text{이고,}$$

두 직선은 $y=-1$, $y=-2$ 이다.

이때, 직선 $y=-2$ 는 곡선 $y=\sin 10x$ 와 만나지 않는다.

$$\text{이때, } (a, b) = (10, 3)$$

이상에서 순서쌍 (a, b) 는

$$(3, 1), (5, 2), (10, 3)$$

$a+b$ 의 값은 4, 7, 13뿐이다. 이때,

$$m=4, M=13$$

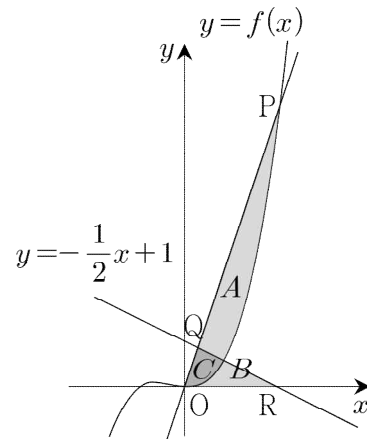
$$\therefore M+m=17$$

답 ④

17

[풀이]

아래 그림처럼 문제에서 주어진 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 C 라고 하자.



(단, $P(2, 6)$, $Q(2, 0)$)

위의 그림에서 직선 OP 의 방정식은

$$y=3x$$

두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{2}x+1$ 의 방정식을 연립하면

$$x=\frac{2}{7}, Q\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

$$A-B$$

$$=(A+C)-(B+C)$$

$=(\text{곡선 } y=f(x) \text{와 직선 } y=3x \text{로 둘러싸인 도형의 넓이})$

$-(\triangle QOR \text{의 넓이})$

$$=\int_0^2 \left(3x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{7}$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 - \frac{6}{7}$$

$$=\frac{8}{3} - \frac{6}{7} = \frac{38}{21}$$

답 ①

18

[풀이]

(가): 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α , β 라고 하자.

(단, $\alpha \neq \beta$)

$$f(x) - x = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

$$g(x) - x = (x - \alpha)(x - \beta)$$

(나):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - x)(g(x) - x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \alpha)^2(x - \beta)^2(x - \gamma)}{x^3}$$

가 수렴하기 위해서는

$(x - \alpha)^2(x - \beta)^2(x - \gamma)$ 가 x^3 을 인수로 가져야 한다.

$\alpha = \gamma = 0$ ($\beta \neq 0$)이면

$$(x - \alpha)^2(x - \beta)^2(x - \gamma) = x^3(x - \beta)^2$$

이고, 위의 극한은 수렴한다.

($\beta = \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$)인 경우도 마찬가지로 가능하고, 결과는 동일하다.)

이제 $\alpha = \gamma = 0$ ($\beta \neq 0$)로 두면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + x)(g(x) + x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x^2(x - \beta) + 2x\}\{x(x - \beta) + 2x\}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x(x - \beta) + 2\}\{(x - \beta) + 2\}}{x}$$

(이때, $\beta = 2$ 이어야 수렴한다.)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x(x - 2) + 2\}x}{x}$$

$= 2$ (수렴한다.)

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^2(x - 2) + x, \quad g(x) = x(x - 2) + x$$

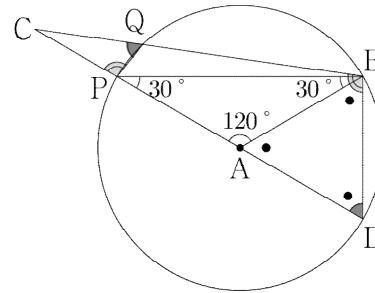
$$\therefore f(3) + g(8) = 12 + 56 = 68$$

답 ②

19

[풀이]

직선 CA가 원과 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 D라고 하자.



(단, $\bullet = 60^\circ$)

$$\cos A = -\frac{1}{2} \text{에서 } A = 120^\circ \text{ 이므로}$$

삼각형 ABP에서 $\overline{AB} : \overline{PB} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로

$\overline{AB} = 3$ (반지름의 길이)

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} = 2R, \quad \frac{\overline{AC}}{2R} = \sin B, \quad \frac{3}{2R} = \sin C$$

문제에서 주어진 비례식에 대입하면

$$\sin B : \sin C = \frac{\overline{AC}}{2R} : \frac{3}{2R} = 5 : 3, \quad \overline{AC} = 5,$$

$$\overline{CP} = 5 - 3 = 2$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right), \quad \overline{BC} = 7$$

한편 사각형 BQPD가 원에 내접하므로

$$\angle CQP = \angle CDB, \quad \angle CPQ = \angle CBD$$

이때, $\triangle CPQ \sim \triangle CBD$ (닮음)

그러므로

$$\overline{CP} : \overline{PQ} = \overline{CB} : \overline{BD}, \quad \text{즉 } 2 : \overline{PQ} = 7 : 3$$

($\because$ 삼각형 ABD는 정삼각형이다.)

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{6}{7}$$

답 ⑤

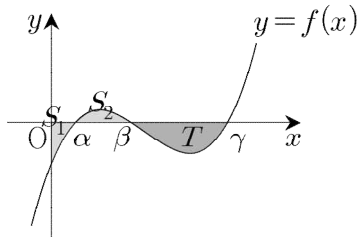
20

[풀이]

삼차함수 $f(x)$ 는 x 절편이 α, β, γ 이므로 극값을 갖는다.

(즉, 일대일 함수가 아니다.)

함수 $f(x)$ 의 그래프는



위의 그림과 같이 세 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2, T 로 두자.

함수 $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x) = f(x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha, \beta, \gamma$$

$g'(x) (= f(x))$ 의 값이 $x = \beta$ 의 좌우에서 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로

함수 $g(x)$ 는 $x = \beta$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore g(\beta) = 0$$

(마찬가지의 방법으로 함수 $g(x)$ 는 $x = \alpha, \gamma$ 에서 극댓값을 갖는다.)

$$g(\beta) = \int_0^\beta f(t)dt = \int_0^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt = 0,$$

$$\text{즉, } \int_\alpha^\beta f(t)dt = -\int_0^\alpha f(t)dt, \text{ 즉 } S_2 = S_1$$

이제 $S_1 = S_2 = S$ 로 두자.

$$h(\beta) = \int_0^\beta |f(t)|dt = S + S = 8, \quad S = 4$$

$$h(\gamma) = \int_0^\gamma |f(t)|dt = S + S + T = 24, \quad T = 16$$

$$\therefore g(\alpha) - g(\gamma) = \int_0^\alpha f(t)dt - \int_0^\gamma f(t)dt$$

$$= \int_0^\alpha f(t)dt - \left(\int_0^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\gamma f(t)dt \right)$$

$$= -\int_\alpha^\gamma f(t)dt$$

$$= -(S - T)$$

$$= 12$$

답 ①

21

[풀이]

$$|a_{k+1} - a_k| = 2 \quad \dots (*)$$

불가능한 경우를 몇 개 써보자.

1120021121: (*)을 만족시키는 k 는 3, 5뿐이다.

(×)

1120102121: (*)을 만족시키는 k 는 3, 6뿐이다.

(×)

1120202111: (*)을 만족시키는 k 는 3, 4, 5, 6뿐이다. (×)

⋮

이제 가능한 경우를 유형별로 모두 써보자.

$$\boxed{2020}111112: k=1, 2, 3 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$11\boxed{0202}1112: k=3, 4, 5 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\boxed{202}1\boxed{20}1111: k=1, 2, 5 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$$\boxed{202}1\boxed{02}1111: k=1, 2, 5 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

이제 각각의 경우의 수를 구하자.

㉠: $\boxed{2020}$, 1, 1, 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수에서

$\boxed{20202}$, 1, 1, 1, 1, 1을 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\frac{7!}{5!} - \frac{6!}{5!} = 36$$

$$\textcircled{㉡}: \boxed{0202}, 1, 1, 1, 1, 1, 2$$

㉠과 마찬가지로 방법으로 경우의 수는

$$\frac{7!}{5!} - \frac{6!}{5!} = 36$$

$$\textcircled{㉢}: \boxed{202}, \boxed{20}, 1, 1, 1, 1, 1$$

㉠과 마찬가지로 방법으로 경우의 수는

$$\frac{7!}{5!} - \frac{6!}{5!} = 36$$

$$\textcircled{㉣}: \boxed{202}, \boxed{02}, 1, 1, 1, 1, 1:$$

㉠과 마찬가지로 방법으로 경우의 수는

$$\frac{7!}{5!} - \frac{6!}{5!} = 36$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$36 \times 4 = 144$$

답 ⑤

22

[풀이]

밑과 진수의 조건에 의하여

$$7 - a > 0, 7 - a \neq 1, 2a - 3 > 0$$

연립하면

$$\frac{3}{2} < a < 7, a \neq 6$$

$$\therefore a = 2, 3, 4, 5$$

구하는 값은 $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ 이다.

답 14

23

[풀이]

$$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - 4x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$f(2) = C = 5$$

$$\therefore f(4) = 53$$

답 53

24

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{19} = 12,$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 20$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k$$

$$\begin{aligned} &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_{19} + a_{20} \\ &= (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}) \\ &= 20 - 12 = 8 \end{aligned}$$

답 8

25

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(-2) = 12 - 4a = 0, a = 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -2$$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값 5를 가지므로

$$f(0) = b = 5$$

$$\therefore f(3) = 3^3 + 3^3 + 5 = 59$$

답 59

26

[풀이]

확률질량함수의 성질에 의하여

$$P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=k)$$

$$= a + b \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right) = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times a + b \left(\frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{k^2}{k} \right)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} b,$$

$$E(X) = 0 \times a + b \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{k}{k} \right)$$

$$= kb$$

문제에서 주어진 등식에서

$$\frac{k(k+1)}{2} b = 2kb, \quad \frac{k+1}{2} = 2, \quad k = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a + b \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = a + \frac{11}{6}b = 1 \quad \dots \textcircled{L}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2E(X) - \{E(X)\}^2 \\ &= 6b - 9b^2 = -9 \left(b - \frac{1}{3} \right)^2 + 1 \leq 1 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $b = \frac{1}{3}$ 일 때 성립한다.)

$$b = \frac{1}{3} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } a = \frac{7}{18}$$

$$\therefore p + q = 25$$

답 25

27

[풀이]

[과정]

$a_n = \log_2 x$ 일 때, $x = 2^{a_n}$ 이므로 점 A_n 의 x 좌표는 2^{a_n} 이다.

$$\overline{OA_n} = 2^{a_n}, \quad \overline{OA_{n+1}} = 2^{a_{n+1}} \text{이고}$$

$$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : 4 \text{이므로}$$

$$2^{a_n} : 2^{a_{n+1}} = 1 : 4$$

이다.

$$2^{a_{n+1}} = 2^2 \times 2^{a_n} = 2^{a_n+2}, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

그러므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $\boxed{2}$ 이다.

그리고 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 1 (n \geq 1)$ 이다.

점 B_n 의 좌표는 $(2^{a_n}, 4^{a_n})$ 이므로

$$T_n = \frac{1}{2} \times \overline{A_n B_n} \times \overline{A_n A_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4^{a_n} \times (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4^{a_n} \times (2^{a_n+2} - 2^{a_n})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4^{a_n} \times (4 \times 2^{a_n} - 2^{a_n})$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^{2a_n} \times (3 \times 2^{a_n})$$

$$= \frac{3}{2} \times 2^{2a_n + a_n}$$

$$= \frac{3}{2} \times 2^{3a_n}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}} \times 8^{a_n}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1인 등차수열이므로

$$\sum_{n=1}^5 T_n = \sum_{n=1}^5 \frac{3}{2} \times 8^{2n-1} = \sum_{n=1}^5 \frac{3}{16} \times 64^n$$

$$= \frac{3}{16} \times \frac{64(64^5 - 1)}{64 - 1}$$

$$= \boxed{\frac{4}{21}} \times (2^{30} - 1)$$

이다.

$$(가): p=2 \quad (나): q=\frac{3}{2}$$

$$(다): r=\frac{4}{21}$$

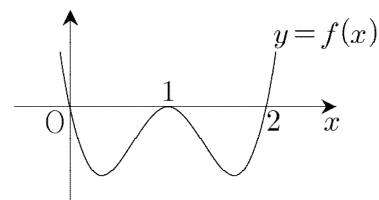
$$\therefore \frac{p}{q \times r} = \frac{2}{\frac{3}{2} \times \frac{4}{21}} = 7$$

답 7

28

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 그래프는



이때, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 극솟값을 갖

고,

$x = 1$ 에서 극댓값을 갖는다.

그리고 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

함수 $g(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

(가)+(나):

$$h(x) = \frac{|g(x) - g(k)|}{|x| - k} \quad (\text{단, } x \neq \pm k)$$

• 함수 $h(x)$ 는 $x = k$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow k+} \frac{|g(x) - g(k)|}{|x - k|} \times \frac{|x - k|}{|x| - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k+} \left| \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \right| \times \frac{|x - k|}{|x| - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k+} \left| \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \right| \times \frac{x - k}{x - k} \\ &= |g'(k)| \times 1 = |g'(k)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow k-} \left| \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \right| \times \frac{|x - k|}{|x| - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} \left| \frac{g(x) - g(k)}{x - k} \right| \times \frac{-(x - k)}{x - k} \\ &= |g'(k)| \times (-1) = -|g'(k)| \end{aligned}$$

함수의 연속성에 대한 정의에 의하여

$$|g'(k)| = -|g'(k)|, \text{ 즉 } g'(k) = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

• 함수 $h(x)$ 는 $x = -k$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -k} (|x| - k)h(x) &= \lim_{x \rightarrow -k} |g(x) - g(k)| \\ (k - k)h(-k) &= |g(-k) - g(k)|, \text{ 즉} \\ 0 &= 0 \times h(-k) = |g(-k) - g(k)|, \\ \therefore g(-k) &= g(k) \quad \dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

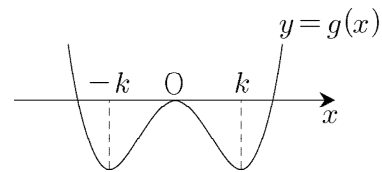
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -k+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -k+} \frac{|g(x) - g(-k)|}{|x - (-k)|} \times \frac{|x + k|}{|x| - k} \quad (\because \textcircled{㉡}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -k+} \left| \frac{g(x) - g(-k)}{x - (-k)} \right| \times \frac{|x + k|}{|x| - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow -k+} \left| \frac{g(x) - g(-k)}{x - (-k)} \right| \times \frac{x + k}{-x - k} \\ &= |g'(-k)| \times (-1) = -|g'(-k)| \\ \lim_{x \rightarrow -k-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -k-} \left| \frac{g(x) - g(-k)}{x - (-k)} \right| \times \frac{|x + k|}{|x| - k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -k-} \left| \frac{g(x) - g(-k)}{x - (-k)} \right| \times \frac{|x + k|}{|x| - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow -k-} \left| \frac{g(x) - g(-k)}{x - (-k)} \right| \times \frac{-x - k}{-x - k} \\ &= |g'(-k)| \times 1 = |g'(-k)| \end{aligned}$$

함수의 연속성에 대한 정의에 의하여

$$-|g'(-k)| = |g'(-k)|, \text{ 즉 } g'(-k) = 0 \dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형은



$$-k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + a, \quad 0 = 1 + a, \quad k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + a$$

연립하면

$$a = -1, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore a + 20k^2 = 9$$

답 9

29

[풀이]

$$2 = 1 + 1,$$

$$3 = 1 + 2 = 2 + 1,$$

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$$

$$5 = 2 + 3 = 3 + 2,$$

$$6 = 3 + 3$$

두 수의 합이 2, 3, 4, 5, 6일 확률은 각각

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$$

갑	을
3, 4, 5, 6	2
4, 5, 6	3
5, 6	4
6	5

갑이 확인한 두 수의 합이 을이 확인한 두 수의 합보다

클 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{2+3+2+1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{3+2+1}{9} \times \frac{2}{9} \\ & + \frac{2+1}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} \\ & = \frac{31}{81} \end{aligned}$$

이때, 값이 확인한 두 수의 합이 5일 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{2}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{9} \\ & = \frac{12}{81} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{12}{81}}{\frac{31}{81}} = \frac{12}{31}$$

$$\therefore p+q=43$$

답 43

30

[풀이]

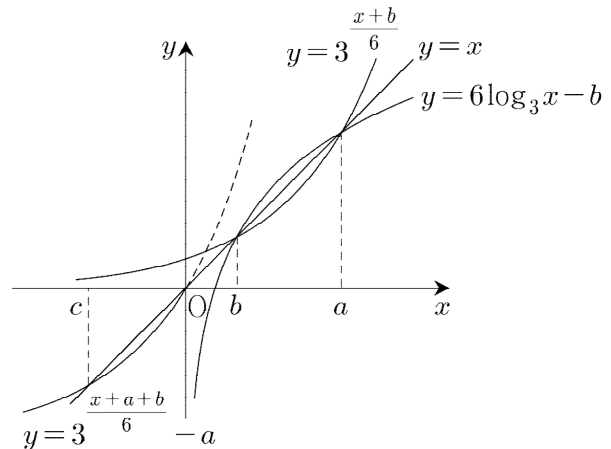
곡선 $y=6\log_3 x-b$ 를 직선 $y=x$ 에 대칭이동시키

면 곡선 $y=3^{\frac{x+b}{6}}$ 과 일치한다.

그리고 곡선 $y=3^{\frac{x+b}{6}}$ 을 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동시키면

곡선 $y=3^{\frac{x+a+b}{6}}-a$ 와 일치한다.

이 세 곡선을 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.



(가)+(나): 위의 그림처럼 곡선 $y=3^{\frac{x+a+b}{6}}-a$ 은 원점을 지나야 한다.

$$\text{이때, } 0=3^{\frac{a+b}{6}}-a, \text{ 즉 } a=3^{\frac{a+b}{6}} \quad \dots \textcircled{7}$$

곡선 $y=6\log_3 x-b$ 와 직선 $y=x$ 의 두 교점 중에서 'x좌표가 더 큰 점'의 x좌표는 a이다.

(그렇지 않으면 $x \leq 0$ 일 때, 교점의 개수가 2일 수 없다.)

곡선 $y=6\log_3 x-b$ 와 직선 $y=x$ 의 두 교점의 x좌표를

$$c, a(c < a)$$

라고 가정하자.

곡선 $y=3^{\frac{x+a+b}{6}}-a$ 와 직선 $y=x$ 의 두 교점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표는 b이다.

$$a-c=-b(=0-b), \quad c=-2b$$

연립하면

$$a=-3b$$

곡선 $y=6\log_3 x-b$ 는 두 점

$$(-2b, -2b), (-3b, -3b)$$

를 지나므로

$$-2b=6\log_3(-2b)-b,$$

$$-3b=6\log_3(-3b)-b$$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$$b=6\log_3 \frac{2}{3}(<0),$$

$$\textcircled{7}: a=-3b=18\log_3 \frac{3}{2}(\text{무리수})$$

2026 이동훈 기출 <https://atom.ac/books/12829>

오르비 <https://orbi.kr/>

$$3^{\frac{a+b}{6}} = 3^{2\log_3 \frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \text{ (유리수)}$$

유리수와 무리수를 같을 수 없으므로

$$a \neq 3^{\frac{a+b}{6}}$$

이는 가정의 모순이다.

따라서 제1사분면 위의 두 교점의 x 좌표는 b, a
($b < a$)이다.

곡선 $y = 3^{\frac{x+a+b}{6}} - a$ 와 직선 $y = x$ 의 한 교점의 x
좌표는 c 이고,

$$a - b = -c (= 0 - c), \quad c = -2b$$

연립하면

$$a = 3b$$

곡선 $y = 6\log_3 x - b$ 는 두 점

$$(b, b), (3b, 3b)$$

를 지나므로

$$b = 6\log_3 b - b,$$

$$3b = 6\log_3 3b - b$$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$$2b = 6\log_3 \frac{3b}{b} = 6\log_3 3 = 6,$$

$$b = 3, \quad a = 3b = 9$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 81 + 9 = 90$$

답 90