# LUNA

# 공통 모의고사 해설지

J.light

# 2026학년도 대학수학능력시험 대비 Luna 모의고사

# 수학 영역 정답표

| 공통 과목 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 문항번호 | 정답 | 배점 | 문항번호 | 정답 | 배점 |
| 1 | ④ | 2 | 12 | ① | 4 |
| 2 | ④ | 2 | 13 | ③ | 4 |
| 3 | ⑤ | 3 | 14 | ④ | 4 |
| 4 | ② | 3 | 15 | ⑤ | 4 |
| 5 | ③ | 3 | 16 | 3 | 3 |
| 6 | ③ | 3 | 17 | 17 | 3 |
| 7 | ① | 3 | 18 | 38 | 3 |
| 8 | ⑤ | 3 | 19 | 75 | 3 |
| 9 | ② | 4 | 20 | 21 | 4 |
| 10 | ② | 4 | 21 | 100 | 4 |
| 11 | ① | 4 | 22 | 196 | 4 |

제 2 교시

J.light 주관 Luna 모의고사

# 수학 영역

**홀수형**

| 성명 | |
|---|---|

| 수험 번호 | | | | | — | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

**삶이 곧 빛이 되고 노래가 될 거야**

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**

J.light

제 2 교시

# 수학 영역

홀수형

## 5지선다형

**1.** $2^{2-\sqrt{3}} \times 2^{2+\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$2^{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})} = 2^4 = 16$

**2.** 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+b$ 에 대하여

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)+f(1)}{h}=4$ 일 때, $a^2+b^2$ 의 값은? [2점]

$\Rightarrow 0 \quad 2f(1)=0$

$\Rightarrow 0$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)+f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h} = 2f'(1)=4$

$\therefore\ f(1)=0,\ f'(1)=2$

$\Downarrow$

$6+2a=2,\ a=-2$

$a+b+2=0,\ b=0$

$\Rightarrow a^2+b^2=4$

**3.** 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$ 이라 하자. $S_6=13S_2$ 일 때, $a_5$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$a_n = 2\times r^{n-1},\ S_n=\dfrac{2(r^n-1)}{r-1}$

$S_6=\dfrac{2(r^6-1)}{r-1}=2(r^3+1)(r^2+r+1),\ S_2=2(r+1)$

$\cancel{2(r+1)}(r^2-r+1)(r^2+r+1)=13\times\cancel{2(r+1)}\ (r\neq-1)$

$\Downarrow$

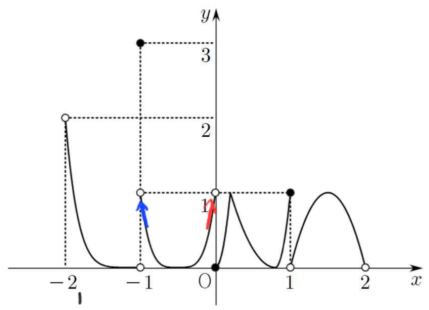
$(r^2+1)^2-r^2=13$

$r^2=t$ 라 두면,

$t^2+t-12=0,\ (t+4)(t-3)=0,\ r^2=3$

$a_5=2\times r^4=18$

**4.** 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.




$\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to-2+}f(x+1)$ 의 값은? [3점]

$-1+$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**5.** $0 \le x \le 2\pi$일 때, $x$에 대한 방정식

$$\left|a\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+2\right| = 2$$

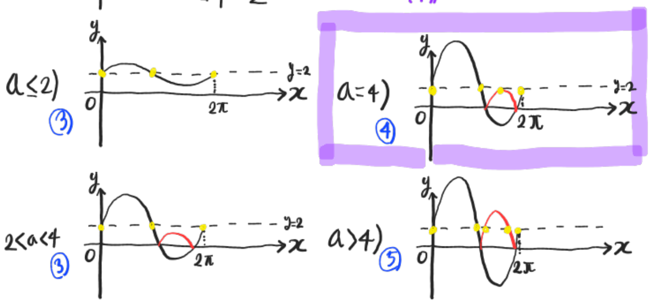
를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 짝수가 되도록 하는 양수 $a$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin x$,

$|a\sin x+2|=2$

짝수"




$\therefore a=4$

**6.** 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 12t$$

이다. 점 P가 출발한 시각부터 다시 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리는? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$V(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$ → $t=4$에서 극값

⇓

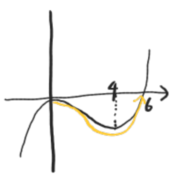
적분!

⇓

$S(t)=t^3-6t^2$ ($\because$ 원점출발 ⇒ $S(0)=0$)

⇓

$S(4)=-32$




$32\times2=64$

**7.** 공차가 2이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3} a_k a_{k+1} < -a_1 a_4$$

일 때, $a_3$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_1a_4<0$

$(a_1+a_3)(a_2+a_4)<0$

$(2a_1+4)(2a_1+8)<0$, ⟸ 공차 : 2

$(a_1+2)(a_1+4)<0$ ⟸ 양변$\div4$

모든 항이 정수,, $a_1=-3$

공차도 정수

$\therefore a_3=-3+2\times2=1$

**8.** 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x \ge 0) \\ ax & (x<0) \end{cases}$$

라 하자. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=1$일 때, 상수 $a$의 값은? [3점]

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-h)-f(0)\}}{h}=f'(0^+)+f'(0^-)=1$

우미계 좌미계

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$ //

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}(2x+2)=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}(a)=a$

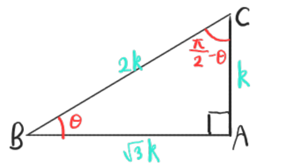
$a+2=1$

$\therefore a=-1$

**9.** $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=18+6\sqrt{3}$
(나) $\cos B : \cos C=\sqrt{3}:1$

① $21\sqrt{3}$ ② $18\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $11\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{3}$




$\angle B+\angle C=90°$,

$\angle B=\theta$라 두면, $\angle C=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\cos B=\sin C$, $\cos C=\sin B$

$\sin C:\sin B=\sqrt{3}:1=c:a$

$c=\sqrt{3}k$, $a=k$

$\overline{BC}^2=3k^2+k^2=4k^2$, $\therefore \overline{BC}=2k$ ($\because \overline{BC}>0$)

$3k+\sqrt{3}k=18+6\sqrt{3}$, $\therefore k=6$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$

**10.** 다음 조건을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=0$, $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3nx^3}{x^n}=n$이 되도록 하는 자연수 $n$의 개수는 2이다.

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$n=1$일 때, 다음 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3x^3}{x}=1$, $f(x)=-x^3+x+k$ 꼴, $f'(1)\neq 0$ 이므로 문제 조건과 모순,

$n\ge 4$일 때, 다음 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3nx^3}{x^n}=n$, $f(x)=nx^n+\cdots$아무항$\cdots+\text{"}0\text{"}x+1$

→ $n\ge 4$이므로 계수가 정해지지 않은 항의 개수 최소2개 (사실 안쓰임ㅋㅋ)

→ $n$의 값에 따라 다항식의 최고차수가 달라지므로 $n\ge 4$인 $n$끼리 동시에 조건을 성립시키도록 하는 것은 불가능함.

→ 엄밀히 따져보면, $n=3$일 때 최고차수가 3이므로, $n\ge 3$의 $n$끼리도 Same..

$\cancel{n=1}$ ⇒ 불가, $n\ge 3$끼리 ⇒ 불가

⇓

$n=2$ ⇒ 무조건 가능, 1개 필수

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+9x^3}{x^3}=3$, $f(x)=-6x^3+\cdots\cdots$

⇓

삼차항 SURVIVE

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+6x^3}{x^2}=2$, $f(x)=-6x^3+2x^2+ax+b$,

$f(0)=1 \Rightarrow b=1$, $f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=-18x^2+4x+a$

$f'(1)=a-14=0$, $a=14$

$\therefore f(x)=-6x^3+2x^2+14x+1$, $f(1)=11$

**11.** 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

> (가) $\log_4 a + 6\log_8 b = 13$
> (나) $\log_2(a+6b) = 8$

① 96 ② 88 ③ 80 ④ 72 ⑤ 64

(가) $\frac{1}{2}\log_2 a + 2\log_2 b = 13$, $\log_2 a + 4\log_2 b = 26$, $ab^4 = 2^{26}$

(나) $a+6b = 2^8$

$a = 2^m$, $b = 2^n$ 두자.
(단, $m, n$ 모두 0이상의 정수)

$(m, n)$

$m+4n=26$ → $(26, 0)$ X
$(22, 1)$ X
$(18, 2)$ X
$(14, 3)$ X
$(10, 4)$ X
$(6, 5)$ O
$(2, 6)$ X

$a = 2^m$
$b = 2^n < 4b = 2^{n+2}$
$\Rightarrow m \le 8, n \le 5$

$a = 2^6$, $b = 2^5$ 인 경우
$a+6b = 64+6\times32 = 256 = 2^8$

$a+b = 2^6+2^5 = 96$

**12.** 최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

기함수

$$kf(x) = \left\{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right\}x^3 + \left\{\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right\}x$$

를 만족시킨다. $f(k)$의 값이 정수가 되도록 하는 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 최솟값은? (단, $k$는 0이 아닌 상수이다.) [4점]

① 128 ② 120 ③ 112 ④ 104 ⑤ 96

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = m$ ($m$은 자연수)라 두자.

$\int_0^1 f(x)\,dx = -m$, $kf(x) = mx^3 - mx$, $f(x) = \frac{m}{k}x^3 - \frac{m}{k}x$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{m}{4k}x^4 - \frac{m}{2k}x^2\right]_0^1 = \frac{m}{4k} - \frac{m}{2k} = -m$, $-\frac{m}{4k} = -m$, $k = \frac{1}{4}$

$f(x) = 4mx^3 - 4mx = 4mx(x+1)(x-1)$,

$f(k) = f\left(\frac{1}{4}\right) = m \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} = $ (정수), $m$은 16의 배수.,

$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[mx^4 - 2mx^2\right]_0^2 = 8m$,

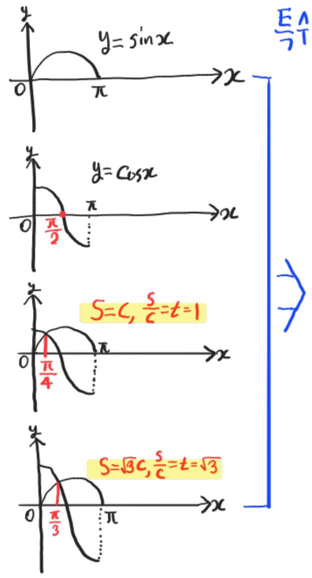
$8m$의 최솟값.... 128

**13.** $0 \le x \le \pi$ 인 $x$에 대하여 부등식

$$\sin x \cos x(\sin x - \cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) \le 0$$

을 만족시키는 모든 $x$의 범위가 $\frac{\pi}{a} \le x \le \frac{\pi}{b}$, $\frac{\pi}{c} \le x \le \frac{\pi}{d}$ 일 때, $a+b+c+d$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12




특수(?)지점 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | + | + |
| + | + | + | − |
| − | + | + | + |
| − | − | + | + |

+ − + −

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{1}$

$\therefore a+b+c+d = 10$

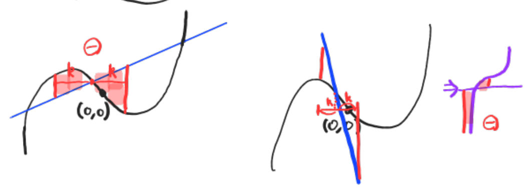
**14.** 삼차함수 $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 12x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(m, f(m))$을 지나는 직선 $y = g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(m) < 0$이 되도록 하는 모든 정수 $m$의 값의 합은? [4점]

기함수

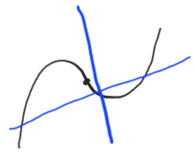
| |
|---|
| 모든 실수 $k$에 대하여 $k\int_{m-k}^{m+k}\{f(x)-g(x)\}dx \le 0$이다. |

① −15 ② −17 ③ −19 ④ −21 ⑤ −23

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 12$ $-\sqrt{48}$, $\sqrt{48}$




$-\sqrt{48} < m \le 0$ 이면 조건 만족, $-6.XX < m \le 0$, $m : -6 \sim -1$



같은 논리로 판단하면,

$k\int_{m-k}^{m+k}\{f(x)-g(x)\} \ge 0$ (X)

**15.** 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$이 250 이하인 자연수가 되도록 하는 모든 $a_2$의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 $n$에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n+1} & (a_n\text{이 자연수인 경우}) \\ na_n & (a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) 명제 '$\sqrt{a_5}$가 자연수이면 $\sum_{k=1}^{5} a_k$는 자연수가 아니다.'와 그 역은 모두 참이다.

① 775 ② 780 ③ 785 ④ 790 ⑤ 795

ㄱ $\sqrt{a_5}$가 자연수이면, ㄴ $\sum_{k=1}^{5} a_k$는 자연수가 아니다. (역도 성립)

* $a_5=1$이라 가정하고 역추적 start~! ("배수" 개념으로 접근)

$a_5$가 자연수인 경우

| 자연수 $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 120, ~~60~~ | 60, ~~10~~ | 20, $\frac{5}{3}$ | 5 | 1 |
| 10, ~~5~~ | 5, $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{3}$ | | |
| 1, 6, ~~3~~ | $\frac{1}{2}$, 3 | 1, ~~$\frac{1}{12}$~~ | $\frac{1}{4}$ | |

X 이전 항이 자연수가 아님

X $a_1$이 자연수가 될 수 없음 (계산 생략)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 6 | 10 | 120 |
| $a_2$ | $\frac{1}{2}$ | 3 | 5 | 60 |
| $a_3$ | 1 | 1 | $\frac{5}{3}$ | 20 |
| $a_4$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 5 | 5 |
| $a_5$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

$a_n\times\square$: 2배수X 4배수X 3배수X 5로 OK

① ㄱ 자연수 가정: $1\times(\text{홀수})^2$, $6\times(\text{홀수})^2$, $1\times(\text{홀수})^2$ …

② ㄱ 자연수X 가정: $1\times(\text{홀수})$, $1\times(\text{홀수})$, 제곱수제외, 이거제외 + 3배수X, 이거 제외

② ㄴ 자연수 가정: 모순 / 가능

① ㄴ 자연수X 가정: 4배수X / 3배수X / 모순

① ㄱ ㄴX 경우 (250 이하 수 찾기)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1\times1^2$, $3^2$, $5^2$, …, $15^2$ | $6\times1^2$, $3^2$, $5^2$ | $10\times1^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$ | 모순 |

② ㄱX ㄴ 경우 (250 이하 수 찾기)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 모순 | 모순 | 모순 | $120\times2$ |

$a_5$가 자연수가 아닌 경우

| 자연수 $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 24, ~~12~~ | 12, ~~2~~ | 4 | 1 | $\frac{1}{5}$ |
| 2, ~~1~~ | 1, ~~$\frac{1}{6}$~~ | $\frac{1}{3}$ | ~~$\frac{1}{20}$~~ | |

X 이전 항이 자연수가 아님

X $a_1$이 자연수가 될 수 없음 (계산 생략)

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | 2 | 24 |
| $a_2$ | 1 | 12 |
| $a_3$ | $\frac{1}{3}$ | 4 |
| $a_4$ | 1 | 1 |
| $a_5$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$a_n\times\square$: 3과 5배수X, 5배수X

ㄱ 무조건 자연수 X

ㄴ 모순!!!!

→ 만족하는 케이스 존재 X

1 9 25 49 81 121
169 225
6 54 150
10 40 160 250
240

$a_1$ 싹다 더하면 1590

* 위의 케이스 참고 $a_1=2a_2$, 고로 답은 795

## 단답형

**16.** $\int_0^1 (x^3+3x^2+x)\,dx+\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2-x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$$\int_0^1(x^3+3x^2+x)dx+\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+x)dx-\int_{-1}^{0}(2x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(\cancel{x^3}+3x^2+\cancel{x})dx-\int_{-1}^{0}(2x)dx$$

기함수 컷!

$$=\left[x^3\right]_{-1}^{1}-\left[x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=\{(1)-(-1)\}-\{(0)-(1)\}$$

$$=3$$

답 : 3

**17.** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2$$

을 만족시킬 때, $a_9$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$라 두자.

$S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1=a_n \quad (n\ge2)$

$a_9=2\times9-1=17$

답 : 17

$a$, $b$는 편의상 중복으로 썼다는 점 미리 고지드립니다.



**18.** 최고차항의 계수가 1이고 모든 항의 계수가 자연수인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} - \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 2$$

$f'(0) = 0$, $f(2) = 32$이 되도록 하는 모든 $f(1)$의 값의 합을 구하시오. [3점]

$f(2) = 2^5$ + 모든 항의 계수가 자연수 ⇒ 함수 $f(x)$ 5차 이하

(X) $f(x) = x^5$ 이면? $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 5$, ∴ $\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 5 \neq 3$ 모순

$f(x)$가 사차다항식이라면? $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 4$, $\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 2$를 만족해야하므로 (분자)→0, $f(0)=0$

$f'(0)=0$ 이라 문제에서 주어졌으므로, $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$, $f(2) = 16 + 8a + 4b = 32$ → 0이상 정수 → 자연수 No!

$b \neq 0$ ⇒ $2a + b = 4$

$(1, 2) \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2$

$(0, 4) \Rightarrow f(x) = x^4 + 4x^2$

(X) $f(x)$가 삼차다항식이라면? $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 3$,

$\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 1$ 를 만족해야하므로, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $b \neq 0$, $f'(0)=0$ 이므로 $b=0$. 모순

$f(x)$가 이차다항식이라면? $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 2$, $\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 0$, $f'(0)=0$ 이므로 $f(x) = x^2 + a$라 두자.

$f(2) = 4 + a = 32$, $a = 28$, $\Rightarrow f(x) = x^2 + 28$

∴ $4 + 5 + 29 = 38$

답: 38

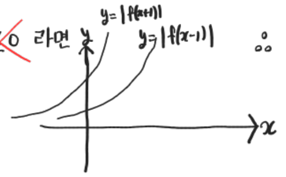
**19.** 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x) = 2^x - a$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60a$의 값을 구하시오. [3점]

> 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $x|f(x-1)| \leq x|f(x+1)|$ 이 성립한다.

$x > 0$ $|f(x-1)| \leq |f(x+1)|$

$x < 0$ $|f(x-1)| \geq |f(x+1)|$

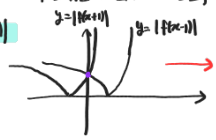
$\cancel{a < 0}$ 라면 ∴ $|f(x-1)| \leq |f(x+1)|$




따라서 $a > 0$ 여야 두 그래프의 교점(교차지점)이 생긴다.

이 때, $x=0$ 에서 두 그래프가 교차해야 하므로,

$|f(-1)| = |f(1)|$




→ $f(1) > 0$, $f(-1) < 0$ → $2 - a = -(\frac{1}{2} - a)$

$a = \frac{5}{4}$

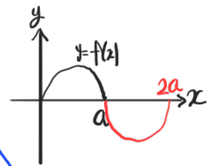
$60a = 75$

답: 75

**20.** 자연수 $a$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq x < a$일 때, $f(x) = -x^2 + ax$이다.
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) = f(x+10)$이다.

모든 실수 $k$에 대하여 $\int_k^{k+2a} f(x)\,dx = 0$이 되도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx$의 값의 합을 구하시오. [4점]




주기: $2a$

이 때, $2a$가 10의 약수여야 하므로, $a=1$ or $a=5$

$a=1$인 경우) $f(x) = -x^2 + x$, $\int_0^1 (-x^2 + x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

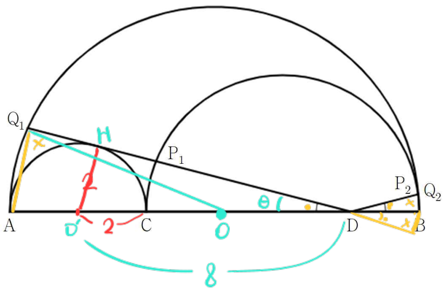
$a=5$인 경우) $f(x) = -x^2 + 5x$, $\int_0^5 (-x^2 + 5x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$

답: 21

**21.** 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 AB 위의 두 점 $Q_1$, $Q_2$와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 $Q_1D$는 선분 AC를 지름으로 하는 반원에 접한다. 선분 AB 위의 C가 아닌 점 D에 대하여 두 선분 $Q_1D$, $Q_2D$와 선분 BC를 지름으로 하는 반원의 교점이 각각 $P_1$, $P_2$이다. 삼각형 $P_1DP_2$의 넓이를 $S_1$, 삼각형 $Q_1DQ_2$의 넓이를 $S_2$라 할 때,

$$\overline{BC}=2\overline{AC},\quad \angle Q_1DA=\angle Q_2DB,\quad 3S_2=5S_1$$

이다. $\overline{Q_1D}^2+\overline{Q_2D}^2$의 값을 구하시오. [4점]




$\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=2\overline{AC}$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$

$\triangle ADQ_1 \backsim \triangle BDQ_2$ (AA닮음)

마찬가지로 $\triangle CDP_1 \backsim \triangle BDP_2$ (AA닮음)

$\therefore$ $\overline{AD}\times\overline{DB}=\overline{Q_1D}\times\overline{Q_2D}$, $\overline{CD}\times\overline{DB}=\overline{P_1D}\times\overline{P_2D}$

$S_1 : S_2 = 3 : 5$

이 때, $\angle P_1DP_2=\angle Q_1DQ_2$ 이므로,

$S_1 : S_2 = \overline{P_1D}\times\overline{P_2D} : \overline{Q_1D}\times\overline{Q_2D} = 3:5$

$\overline{CD}\times\overline{DB} : \overline{AD}\times\overline{DB}$

$\overline{CD}:\overline{AD}=3:5$, $\overline{CD}=3k$, $\overline{AD}=5k$라 두면, $\overline{AC}=2k=4$, $k=2$

$\overline{CD}=6$, $\therefore \overline{BD}=2$

$\angle ADQ=\theta$라 하고, $\overline{AB}$ 중점을 O라 하자.

$\overline{OQ_1}=6$, $\overline{OD}=4$

$\overline{AC}$ 중점을 O'라 하고, 점 O'에서 선분 $\overline{Q_1D}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\sin\theta=\frac{\overline{O'H}}{\overline{O'D}}=\frac{1}{4}$, $\cos\theta=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

코사인 법칙을 활용하여 $\overline{Q_1D}$의 길이를 구하면,

$\overline{OQ_1}^2=\overline{OD}^2+\overline{Q_1D}^2-2\overline{OD}\,\overline{Q_1D}\cos\theta$,

$36=16+(\ )^2-2\sqrt{15}(\ )$, $(\ )^2-2\sqrt{15}(\ )-20=0$

$(\ )=\sqrt{15}\pm\sqrt{35}$, $\overline{Q_1D}=\sqrt{35}+\sqrt{15}$

$\overline{Q_1D}\times\overline{Q_2D}=\overline{AD}\times\overline{DB}=20$,

$\overline{Q_2D}=\frac{20}{\sqrt{35}+\sqrt{15}}=\sqrt{35}-\sqrt{15}$,

$\overline{Q_1D}^2+\overline{Q_2D}^2=100$

답: 100

**22.** 두 정수 $a$, $b$에 대하여 자연수 $k$와 함수 $f(x)=(x-1)(3x^2+3ax+b)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 열린구간 $(1, \infty)$에서 $x$에 대한 방정식
> $$\log_2(f' \circ f)(x)=\log_2\{f(x)+1\}+m$$
> 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이도록 하는 정수 $m$의 개수는 $k$이다.

$f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(k)$의 값을 구하시오. (단, $k$는 상수이다.) [4점]

$f'(x)=3x^2+3ax+b+(x-1)(6x+3a)$, $f'(1)=1$ 이므로 $3a+b=-2$, $b=-3a-2$

$y=f'(f(x)) = 2^m\{f(x)+1\}=y$

기울기

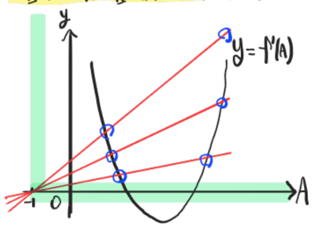
방정식 관계

$f(x)=A$로 치환

+ 로그 진수 조건에 따라 $f'(A)>0$, $A+1>0$이다.

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=A$의 해의 개수는 1 이상이다.

방정식




방정식 $f'(A)=0$이 { 중근을 가질 때, / 서로 다른 두 실근을 가질 때,

→ 양의 정수 m은 위치가 미정이라 단언하기 어려움

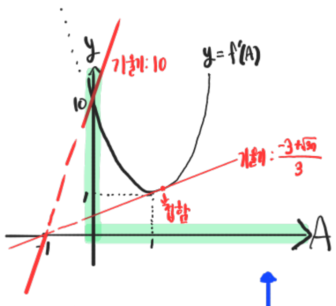
모든 음의 정수 $m$의 값에 대하여 서로 다른 A값 2개를 갖는다.

⇓

$x$의 값은 2개 이상이다. Always!

$\therefore$ 이 케이스는 정수 $m$의 개수가 $\infty$이라 성립X

⇒ 방정식 $f'(A)=0$의 해는 존재하지 않는다.




$f'(x)=3x^2+3ax-3a-2+(x-1)(6x+3a)$

$=9x^2+(6a-6)x-6a-2$

$(3a-3)^2-9(-6a-2)<0$,

$(a-1)^2+6a+2=a^2+4a+3<0$,

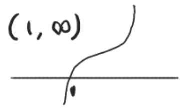
$(a+3)(a+1)<0$, $a=-2$, $b=4$

$f'(x)=9x^2-18x+10=9(x-1)^2+1$

$m$: $-1, 0, 1, 2, 3$

$\therefore$ $k=5$

$(1,\infty)$



⇒ $A>0$

$f(x)=(x-1)(3x^2-6x+4)$,

$f(k)=f(5)=4\times49=196$

답: 196

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.