14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1 \le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
>
> $$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
>
> 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a \le -1$ 또는 $a \ge 3$이다.

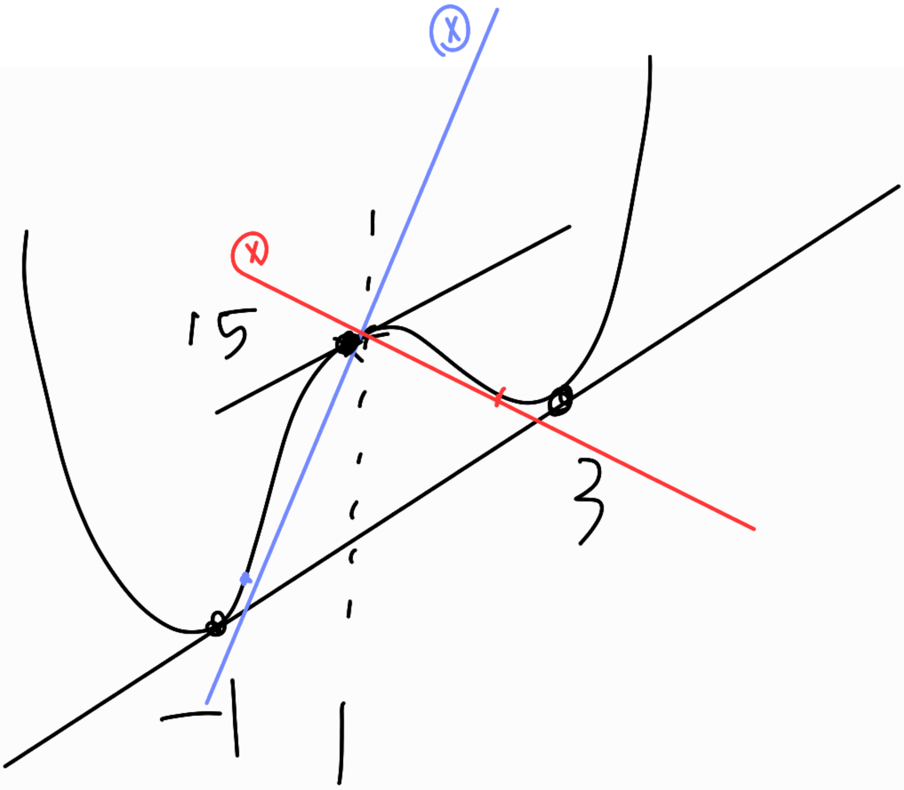
$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - (f'(a)(x-a)+f(a))\} \ge 0.$$

$f(t) \to$ 원함수.

$f'(a)(x-a)+f(a) \to$ 접선의 방정식



$$f(x) - (x+k) = (x+1)^2(x-3)^2$$

$f(1)=15 \quad \therefore k=-2.$

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)^2 + x-2$$

$f(4)=27$

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t \quad = f(x)-\{(x-t)-f(t)\}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \to -1} \{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t \to 1} \{h(t)-h(1)\}=2$
(나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} \|f(x)\|dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다.
(다) 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x \{f(u)-ku\}du \geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

Q!

$t \to 1$

$\boxed{가}$

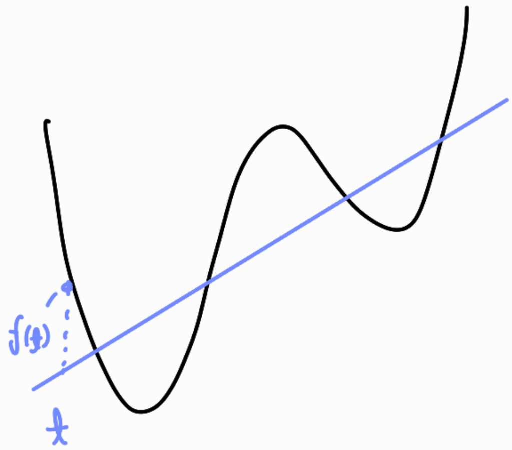
$\lim_{t \to -1} \{h(t) - h(-1)\} = \lim_{t \to 1} \{h(t) - h(1)\} = 2.$ 의 해석.

$h(t)$는 $g(t)$의 근의개수.

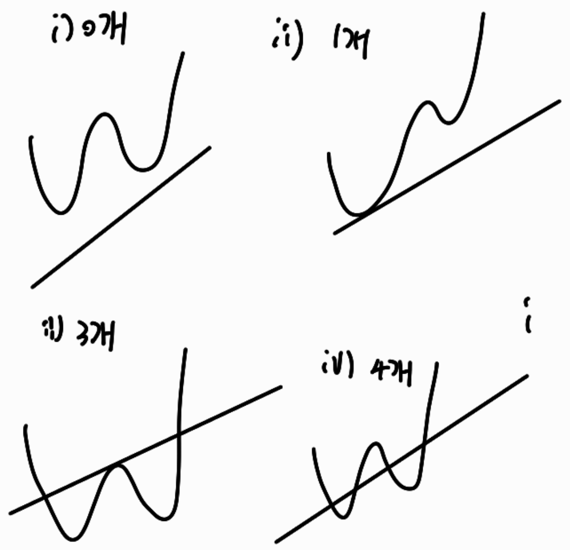
$g(x) = f(x) - x - f(x) + t.$

$= f(x) - \{(x-t) - f(t)\}.$

∴ $h(x)$는 차의 함수의 관점에서 교점개수.



4차함수의 교점개수.



$f(1\pm) - f(1) = 2.$

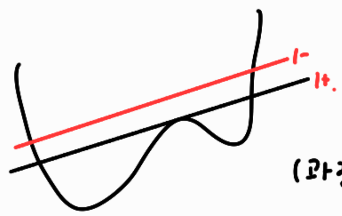
∴ $f(1\pm)$의교점개수 3 or 4.

$f(1)$의교점개수 1 or 2

짝꿍.

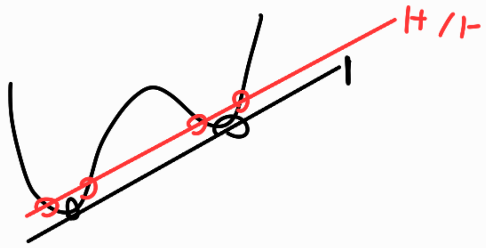
i) $f(1\pm) = 3$개, $f(1)$ 1개.

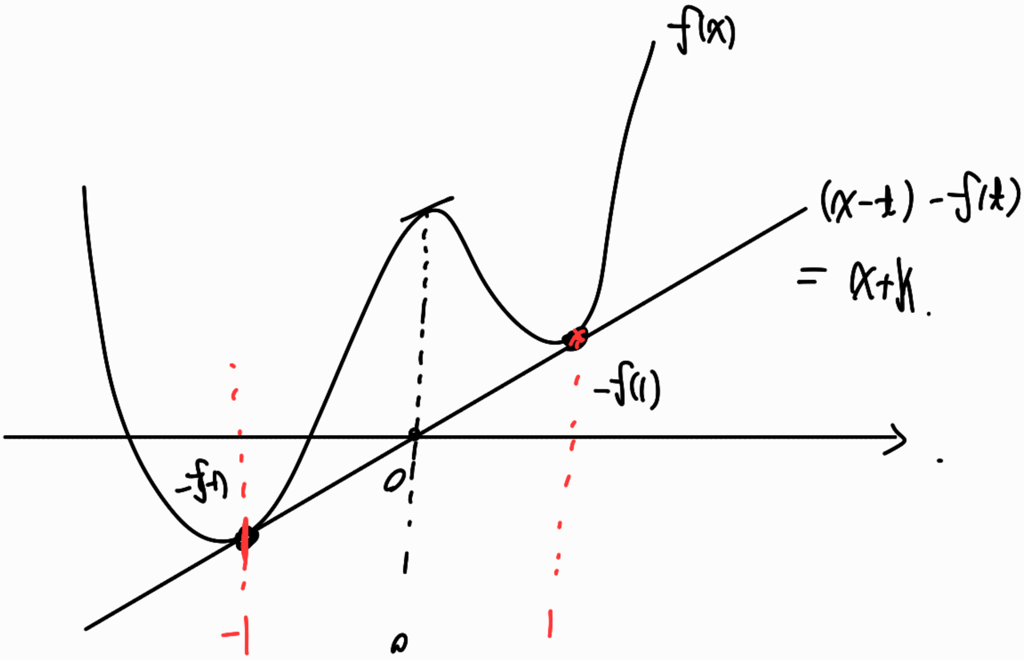
$f(1+) = f(1-) \Rightarrow 3$개 불가능.



(과감히 들어갔습니다) (X)

ii) $f(1+) = f(1-) \Rightarrow 4$개, $f(1)$ 2개.

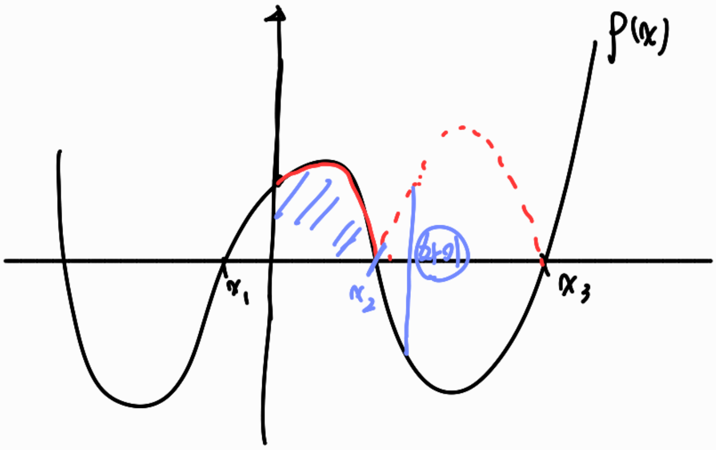




$f(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 + x + k$

나

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a |f(x)|\,dx$ 의 최소 $= \boxed{a}$



$\int_0^{x_1} p(x)\,dx = \int_0^{x_1} |p(x)|\,dx$ 성립

$\int_0^{x_2}$ // $= \int_0^{x_2}$ // 성립.

단, $\int_0^{x_3}$ // $= \int_0^{x_3}$ // 성립X

$\therefore a = -1,\ f(-1) = 0.$

$\therefore b = 1$

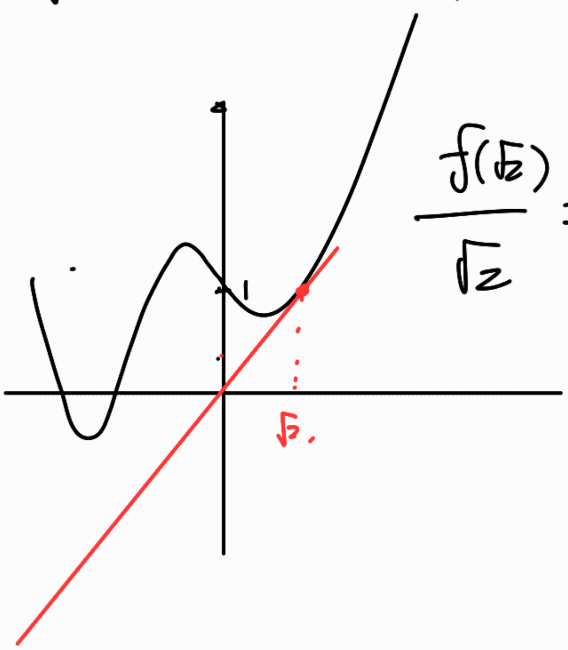
$f(x) = a(x+1)^2(x-1)^2 + x + 1$

$\boxed{\text{다}}$

$$\cancel{\frac{d}{dx}}\int_0^x \{f(u)-ku\}\,\cancel{d}u \geq 0$$

$f(x)-kx \geq 0$ 의해 $k=f'(\sqrt{2})$

$f(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 + x+1.$



$$\frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = f'(\sqrt{2}).$$

$\therefore a = \frac{1}{7}$

$f(x) = \frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2 + x+1.$

$f(6) = \frac{1}{7} \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 + 6+1 = 182.$