

수학 I 중간고사 기출



[과천여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 14번]

[문제1] 50 이하의 두 자연수 a, b 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\{\log_2(x^2 - 2ax + b)\}^2 - \log_2(x^2 - 2ax + b)^3 + 2 = 0$$

의 서로 다른 실근 개수가 2가 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.¹



[과천여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 18번]

[문제2] 세 함수 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_4(x + 2)$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ 이 있다. $f(a) = g(a)$, $g(b) = h(b)$, $h(c) = f(c)$ 를 만족시키는 세 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 항상 참인 것을 모두 고르시오.²

- ㉠ $a > c > b$
- ㉡ $f(a) > g(b) > h(c)$
- ㉢ $f(k) = g(b)$ 를 만족시키는 실수 k 에 대하여 $c < k < a$ 이다.



[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 12번]

[문제3] $k > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 두 실수 k, θ 에 대하여 $\sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{4} + \frac{1}{4k^2}$ 이 성립할 때, $\frac{k}{\tan \theta}$ 의 값을 구하시오.³



[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 13번]

[문제4] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x) = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x - 1)$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x), f(x + 8) = f(x)$ 이다.

$-10 < x < 10$ 일 때, 방정식 $|f(x) - f(x + 2)| = 4$ 의 모든 근의 합을 구하시오.⁴



[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 14번]

[문제5] 방정식 $\log(x+y) + 2\log y = \log(50-x-y)$ 을 만족시키는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 모든 x 의 값의 합을 구하시오.⁵



[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 16번]

[문제6] 직선 $y = x - 2$ 가 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프와 만나는 점을 (x_1, y_1) , 직선 $y = x + 2$ 가 함수 $y = \log_5(-x)$ 의 그래프와 만나는 점을 (x_2, y_2) 라 하자. 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.⁶

㉠ $|x_1| > |x_2|$

㉡ $x_1y_1 < x_2y_2$

㉢ $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -1$



[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 18번]

[문제7] 함수 $y = -x + k$ 의 그래프가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 A, 함수 $y = -x + k$ 의 그래프가 함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 B, 함수 $y = x - k$ 의 그래프가 함수 $y = -2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 점 A의 x 좌표를 n 이라 하자. 다음 조건이 모두 참일 때, $n + k$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)⁷

(가) n 은 자연수이다.

(나) 삼각형 ABC의 넓이는 40이다.

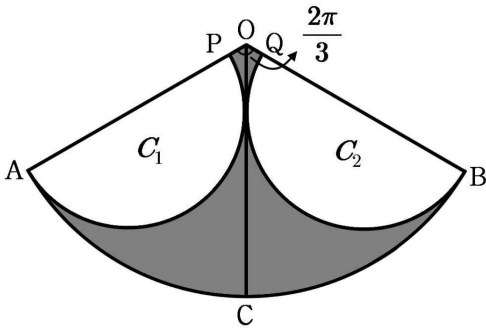


[과천중앙고 2024년 2학년 1학기 중간고사 19번]

[문제8] 자연수 n 에 대하여 $-n\pi \leq x \leq n\pi$ 일 때, 방정식 $n\pi \sin 8nx - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(1) + f(3) + f(5)$ 의 값을 구하시오.⁸



[문제9] 반지름의 길이가 $2 + \sqrt{3}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 두 선분 OA, OB 위의 각각의 점 P, Q에 대하여 $\overline{PA} = \overline{QB}$ 이다. 호 AB의 중점 C에 대하여 선분 OC에 접하고, 두 선분 PA, QB를 각각 지름으로 하는 두 반원 C_1, C_2 가 있다. 이때 부채꼴 OAB의 넓이를 S , 반원 C_1, C_2 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $S - (S_1 + S_2) = \frac{p + q\sqrt{3}}{3}\pi$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 정수이다.)⁹



[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 11번]

[문제10] 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 11$, $g(x) = 3^x$ 가 있다. 정수 k 에 대하여

$$(f \circ g)(n) \leq 3^{k+2}$$

를 만족시키는 자연수 n 의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, $h(0) + h(1) + h(2) + h(3)$ 의 값은?¹⁰ [5.1점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8



[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 12번]

[문제11] 1이 아닌 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = 2^{\frac{1}{\log_4 x}}$ 이라 하자. 함수 $f(x)$ 에서

$$f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x) \quad (n \text{은 자연수})$$

로 정의할 때, 방정식 $4f^{100}(x) - 3f(x) = 0$ 의 모든 근의 곱은?¹¹ [5.2점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$



[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 13번]

[문제12] 함수 $y = |2^{x+1} - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수를 $f(k)$ 라 할 때, 다음 중 참인 것을 있는 대로 고른 것은? (단, k 는 실수이다.)¹² [5.3점]

- ㉠ $f(3) = 1$
- ㉡ 집합 $A = \{y \mid y = f(k)\}$ 에 대하여 $n(A) = 4$ 이다.
- ㉢ 함수 $y = f(x)$ 와 함수 $y = x$ 의 교점의 개수는 0이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢



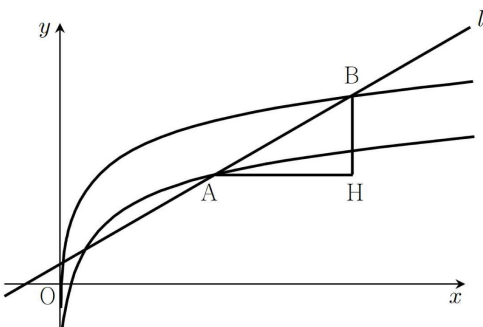
[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 15번]

[문제13] 직선 l 이 곡선 $y = \log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 점 중 x 좌표가 큰 점을 A, 곡선 $y = \log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 점 H에서 만날 때, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AH} = 2\overline{BH}$
- (나) 세 점 A, B, H를 지나는 원의 반지름은 $\sqrt{5}$ 이다.

원점과 직선 l 사이의 거리는?¹³ [5.5점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ 1



[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 16번]

[문제14] 두 자연수 a, b 에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $A(a, \log_9 b), B(-1, \log_{27} 2)$ 가 있다. 선분 AB 를 3 : 2로 외분하는 점이 곡선 $y = -\log_3(2 - x)$ 위에 있고, 집합

$$\{n \mid b < 3^n \times a \leq 81b, n \text{은 정수}\}$$

의 모든 원소의 합은 12이다. $a + b$ 의 값은?¹⁴ [5.6점]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20



[동안고 2024년 2학년 1학기 중간고사 19번]

[문제15] $a > 2$ 인 실수 a 에 대하여 기울기가 -1 인 직선 l 이 두 곡선 $y = a^x + m, y = \log_a x + m$ 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하자. 두 점 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = a^x + m$ 은 점 $(0, 3)$ 을 지난다.

(나) $\overline{AB} = 11\sqrt{2}$

(다) 선분 AB 의 중점의 y 좌표가 $\frac{19}{2}$ 이다.

곡선 $y = \log_a x + m$ 이 x 축과 만나는 점을 C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하시오. (단, m 은 상수이다.)¹⁵



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 7번]

[문제16] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $|\sin \theta \tan \theta + \cos \theta| = \frac{3}{2}$ 일 때, $\sin \theta \tan \theta - \cos \theta$ 의 값을 구하시오.¹⁶



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 9번]

[문제17] 두 실수 x, y 에 대하여 $\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ 이고 $81^x = 12^y$ 일 때, $8x \log_6 9 + 5y \log_6 12$ 의 값을 구하시오.¹⁷



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 11번]

[문제18] 인지심리학에서 앤더슨의 연구에 의하면 반응시간 T (초)와 연습 일수 P (일) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log T = K - \frac{1}{2} \log P \quad (\text{단, } K \text{는 상수이고 } T > 0, P > 0)$$

연습 일수가 P_1 일 때의 반응시간이 T_1 이고, 연습 일수가 P_2 일 때의 반응시간은 T_2 이다. P_2 가 P_1 의 $161^{\frac{3}{2}}$ 배 일 때, T_1 은 T_2 의 몇 배인지 구하시오. (단, $\log 1.61 = 0.2068$, $\log 4.52 = 0.6551$ 로 계산한다.)¹⁸



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 12번]

[문제19] 지수함수 $y = \left(\frac{n}{17} + \frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 직선 $y = -x + 3$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $n \leq 12$)¹⁹



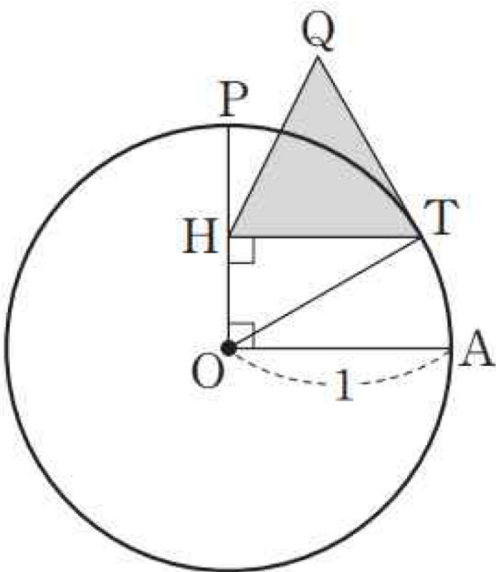
[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 15번]

[문제20] 방정식 $2\log_2(x+3) = \log_2(2x + 2\log_2 n)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 곱을 구하시오.²⁰



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 16번]

[문제21] 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원의 중심 O 와 원 위의 점 A 를 이은 중심 선분 OA 와 선분 OP 가 수직이 되도록 점 P 를 원 위에 정하고, 부채꼴 OTP 의 넓이가 $\frac{\pi}{8}$ 가 되도록 점 T 를 부채꼴 OAP 의 호 AP 위에 정한다. 부채꼴 OTP 의 호 TP 의 길이와 선분 TQ 의 길이가 같도록 점 T 에서의 접선 위의 점 Q 를 그림과 같이 정하고, 점 T 에서 선분 OP 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 삼각형 QHT 의 넓이를 구하시오.²¹



[양명여고 2024년 2학년 1학기 중간고사 17번]

[문제22] $-1 < m < 0$ 인 음수 m 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = mx$ 가 만나는 점 중 제4사분면 위의 점을 A, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = \frac{1}{m}x$ 가 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 B라 하고, 두 동경 OA, OB가 나타내는 각의 크기를 각각 α, β 라 하자. $\cos \alpha \times \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 일 때, $\tan \alpha \times \sin \beta$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x 축의 양의 방향이다.)²²



[인덕원고 2024년 2학년 1학기 중간고사 12번]

[문제23] 함수 $y = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x}) + 1$ 의 최솟값이 -2 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.²³



[인덕원고 2024년 2학년 1학기 중간고사 15번]

[문제24] 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼, 함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $y = \sqrt{2}$ 일 때, 5^{4k} 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)²⁴



[인덕원고 2024년 2학년 1학기 중간고사 19번]

[문제25] 함수 $y = k \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k^2 - 3k - 8$ 의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 상수 k 의 값의 범위를 구하시오.²⁵



어수강 수학

- ① 홈페이지 : www.soogangmath.com
- ② 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath
- ③ 블로그 : blog.naver.com/math-fish
- ④ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr
- ⑤ 전자도서
 - 1. 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀
 - 2. 당신이 수학을 망치는 N가지 이유
- ⑥ 수업 및 교육상담 문의 : www.soogangmath.com/inquire

정답

- ¹[문제1] 6
- ²[문제2] ㉠, ㉡, ㉢
- ³[문제3] 1
- ⁴[문제4] 5
- ⁵[문제5] 28
- ⁶[문제6] ㉡
- ⁷[문제7] 19
- ⁸[문제8] 557
- ⁹[문제9] 20
- ¹⁰[문제10] ㉢
- ¹¹[문제11] ㉠
- ¹²[문제12] ㉢
- ¹³[문제13] ㉣
- ¹⁴[문제14] ㉤
- ¹⁵[문제15] $\frac{1210}{13}$
- ¹⁶[문제16] $-\frac{1}{6}$
- ¹⁷[문제17] 27
- ¹⁸[문제18] 45.2
- ¹⁹[문제19] 9
- ²⁰[문제20] 42
- ²¹[문제21] $\frac{\pi}{16}$
- ²²[문제22] $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ²³[문제23] $\frac{5}{4}$
- ²⁴[문제24] 1280
- ²⁵[문제25] $2 - 2\sqrt{3} \leq k \leq 4$