[25010-0023]

1 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 의자가 있다. 이 7개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 모두 6 이상이 되도록 배열하는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 72 ② 84 ③ 96
④ 108 ⑤ 120

원순열에 이웃조건이 있고 그 조건이 다양할 때

↓

특이 Case에 주목

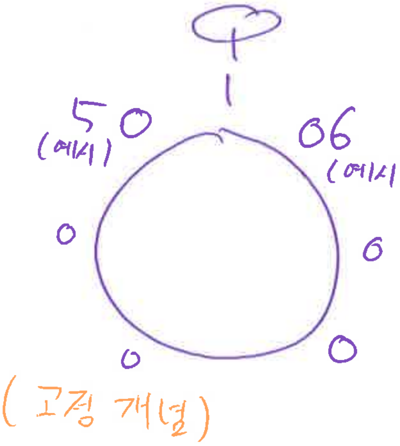
일반적으로 원순열은 $(n-1)!$으로 구하지만 특정 수 1개를 고정하면 마치 순열처럼 구할 수 있다. ex) (나열) $= 3! = 1$(고정) $\times 3!$

(기본이니 설명 짧음)

특이 Case : 1, 2

1은 5·6·7 中 2개와 이웃해야한다. (V) → 가장 까다로우니

2는 4·5·6·7 中 2개와 이웃해야 한다.



우리는 1 양 옆 숫자 경우의수 구해야 하고

구하면 $_3C_2$(5·6·7 中 2개) $\times$ 2!(자리 change) = 6

그 다음 남은 숫자 2·3·7·4 中

(예시)

2-3 이웃 경우의 수 빼야하니

$4! - 3! \times 2! = 12$

(2·3·4·7 나열) (2·3 이웃)

∴ $6 \times 12 = 72$

[25010-0024]

2 숫자 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는?

> 2부터 6까지의 자연수 n에 대하여
> (가) n이 홀수일 때, n은 선택하지 않거나 n번 이상 선택한다.
> (나) n이 짝수일 때, n은 선택하지 않거나 $\frac{n}{2}$번 이하 선택한다.

① 60　② 62　③ 64　④ 66　⑤ 68

n이 3일때 3번 이상 선택, n이 5일때 5번 이상 선택

n이 2일때 1번이하, n이 4일때 2번이하, n이 6일때 3번이하

5자리 자연수 中 홀수 구하는 것이니 마지막 자리는 3 or 5 고정
이때 마지막에 5 들어가려면 (5, 5, 5, 5, 5) 1개 밖에 안됨
그럼 3으로 케이스 분류

i) 3이 3번　XX333, 이때 XX는 (2, 4/6) (4, 6) (4, 4) (6, 6)
고로 마지막 자리 3으로 고정 후 같.포.순 쓰면

$\left(2\ \begin{matrix}4\\6\end{matrix}\ 33\right)3$　$\underset{(4\text{or}6)}{{}_2C_1} \times \frac{4!}{2!} = 24$ | $(4\ 6\ 33)3 = \frac{4!}{2!} = 12$

$\left(\begin{matrix}44\\66\end{matrix}\ 33\right)^3 = \underset{(4\text{or}6)}{{}_2C_1} \times \frac{4!}{2!2!} = 12$　총 48개

ii) 3이 4번　X3333, X자리엔 2. 4. 6 가능

$\left(\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}\ 333\right)3$　$\underset{(2\text{or}4\text{or}6)}{{}_3C_1} \times \frac{4!}{3!} = 12$　∴ 48+12+1+1=62

iii) 3이 5번　33333　1번

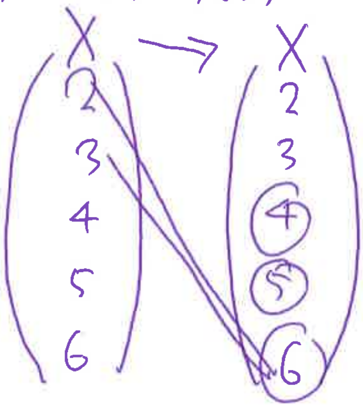
[25010-0025]

3 집합 $X=\{2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \longrightarrow X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(2)\times f(3)$은 6의 배수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

Case 분류 $f(2)=f(3)$ (둘다 6) $f(2)\neq f(3)$

i) $f(2)=f(3)$

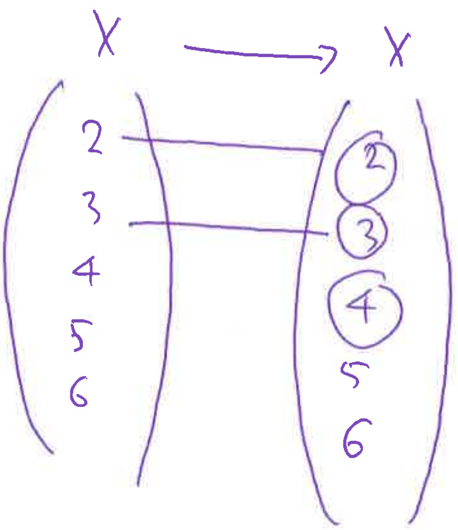


(6 안감)

${}_4C_2 \times (3^3 - 2\cdot 2^3 + 1^3) = 72$

(2·3·4·5 中 치역 2개) (4·5 中 1개 안감) (예시)

ii) $f(2)\neq f(3)$



$(f(2), f(3))$은 $(2,3)\,(6,2)\,(6,3)\,(6,4)\,(6,5)\,(4,6$

$6\times 2!$ (자리 change) $=12$

${}_3C_1 \times (3^3 - 2^3) = 57$

(4·5·6 中 1개) (2·3에 다감)

$57\times 12 = 684$

$\therefore 684 + 72 = 756$

[25010-0050]

1 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=9$ $\longrightarrow$ $a+b+c+d=n$ $\longrightarrow$ ${}_4H_n$

(나) $abc \neq 0$

(다) $a+b$는 3의 배수이다.

① 54 ② 60 ③ 66 ④ 72 ⑤ 78

(나) $a \neq 0$, $b \neq$, $c \neq 0$

Case 분류 $\longrightarrow$ $a+b$가 각각 3, 6, 9 일때

i) $a+b=3$, $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ 이므로

$(a'+1)+(b'+1)=3$ ${}_2H_1=2$ // 그럼 $c+d+e$는 자동적으로 6이 되므로 $(c \neq 0)$

$(c'+1)+d+e=6$, ${}_3H_5=21$, $2 \times 21=42$

특정 수가 n개 이상이라는 조건이 걸린 경우 $(a'+n)$ 이라 치환해 계산(기본)

ii) $a+b=6$, 〃

$(a'+1)+(b'+1)=6$, ${}_2H_4=5$ // 자동으로 $c+d+e$는 3

$(c'+1)+d+e=3$, ${}_3H_2=6$, $5 \times 6=30$

iii) $a+b=9$, c가 0이되어 성립 X

$\therefore$ $42+30=72$

[25010-0051]

2 자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수가 28일 때, 다항식 $(a+b)(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

$(a+b+c)^n = a^n \cdots + c^n$ 모든 항의 차수의 합이 n개

$a^x \cdot b^y \cdot c^z$, $x+y+z=n$ 즉 ${}_3H_n$이 바로 항 개수

(기본이니 상세히X)

${}_3H_n = 28$, ${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = 28$ // $n=6$

$(a+b)(a+b+c)^6$ 전개하면 $a^{x+1}b^y c^z$ or $a^x b^{y+1} c^z$

가 되므로 차수의 합이 7이 됨 // $x+y+z=7$, ${}_3H_7 = 36$

이때 z가 6이상 들어 가야 할 경우 빼야하니

$\therefore {}_3H_7 - {}_3H_0 = 35$

(중요개념!)

연습문제+실전개념 첨부

중복조합 중요개념 1. 여사건

예제) 1. 서로다른 주사위 4개 던졌을 때, 네눈의 수 합이 12인 경우의 수

$a+b+c+d=12 \quad (1 \le abcd \le 6)$

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=12$

$a'+b'+c'+d'=8 \quad (0 \le abcd \le 5)$

이때 우리는 전체경우의 수에서 한 숫자가 6이상 일때를 빼야한다.

${}_4H_8 - \bigcirc =$ 답, $\bigcirc$ 구하기 위해 우리는 처음부터 abcd 中 1개가 6이상이라고 설정하고 경우 구해보겠다.

$(a'+6)+b'+c'+d'=8, \quad a'+b'+c'+d'=2 \,//\, {}_4H_2=10$

그러므로 abcd 中 1개 택할 경우의수 ${}_4C_1 \times {}_4H_2 = 40$

(abcd 中 1개가 6이상 설정)

$\therefore {}_4H_8 - 40 = 125$

그럼 좀더 심화 문제를 보자

중복조합 중요개념 1. 여사건

예제 2) 서로 다른 주사위 4개 던졌을 때, 네 눈 수 합이 16인 경우의수는?

예제1과 같이 정리하면

$a'+b'+c'+d'=12 \quad (0\le abcd \le 5)$

이때 abcd 中 2개가 6이상이여도 식이 성립한다.
고로 우리는 1번 더 치환을 통해 경우를 나눌께다

$(5-a'')+(5-b'')+(5-c'')+(5-d)''=12 \quad (0\le a''b''c''d''\le 5)$

$a''+b''+c''+d''=8$ // 이처럼 치환한다면 예제 1과 같은 식이 나오ㅏ 답이 구해진다. 우린 이걸 속칭 재치환. 대칭성이라 한다.

대칭성 $(1\le abc\le 6)$

$a+b+c=3$
$a+b+c=4$
$a+b+c=5$ 합이 같으면 값도 같다.
⋮
$a+b+c=16$
$a+b+c=17$
$a+b+c=18$

[25010-0052]

3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수는?

> (가) $f(1)+f(3)+f(5)+f(7) \le f(8)$
> (나) $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)=10$

① 120 ② 140 ③ 160 ④ 180 ⑤ 200

$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 최소가 4니 $f(8)$은 $4 \sim 8$ 中 1개이다.

우리는 중복조합 문제에서 $a+b+c+d \le k$ 꼴이 나올 경우 부등호를 치환해 $a+b+c+d+e=k$ 식으로 나타내어 구한다 (기본!!)

$f(8)$이 k라 가정 한다면 $4 \le k \le 8$

(가) $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+e=k$, $f(1)$, $f(3)$ $f(5)$ $f(7)$이 1 이상이므로

$${}_5H_{k-4} = {}_kC_{k-4} = {}_kC_4$$ 가 (가) 조건 경우의 수다

(나) $f(2)+f(4)+f(6)+k=10$ 이고 $4 \le k \le 8$ 인데 $k=8$이면 성립X

$f(2)+f(4)+f(6)=10-k$ 로 나타내면 더 쉽다. 어차피 우리는 k값은 완전 지울 수 없으니까, $f(2)$ $f(4)$ $f(6)$ ≥ 1 이므로

$${}_3H_{7-k} = {}_{9-k}C_{7-k} = {}_{9-k}C_2$$ 이다

7 (k가 8이면 (나)조건X)

$$\sum_{k=4}^{7} \left({}_kC_4 \cdot {}_{9-k}C_2\right) = {}_4C_4 \cdot {}_5C_2 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_2 + {}_6C_4 \cdot {}_3C_2 + {}_7C_4 \times {}_2C_2$$

$\therefore$ 120

중요개념 2. 중복조합 경로의 활용 (수형도)

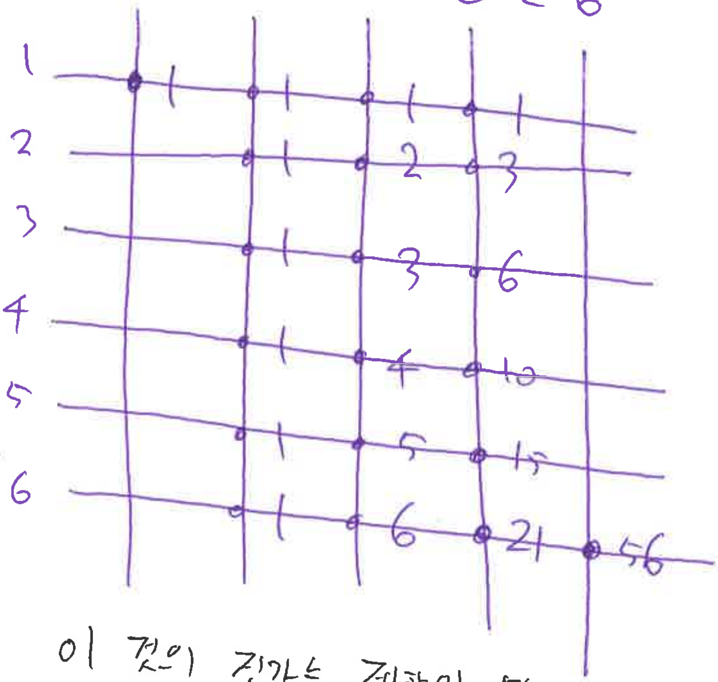
약간 거부감이 들 수 있지만 현우진T. 정병호T 등 다수의 강사들이 가르치는 스킬이기에 충분히 배울 가치가 있다.

필요성

일단 일반적으로 경로의 활용은 $1 \le a \le b \le c \le 6$ 와 같은 꼴에서 쓰인다. 기존에는 다음과 같은 꼴에 제한사항이 들어오면 경우의 수를 나누어 풀었지만 점점 더 제한사항이 복잡해지자 제한사항을 쉽게 처리하기 위해 다음과 같은 스킬이 나왔다.

설명

$1 \le a \le b \le c \le 6$



이것의 진가는 제한이 많을때 드러남

얼핏보면 이게 뭐지? 싶지만 실은 간단하다.
a, b, c가 각각 1~6인 경우의 모든 경우의 수를 더한 것이니 말이다.
실제로 a는 각각 1인 경우의 수 2인 경우의 수 … 6인 경우를 모두 합하면 6개가 나오게 되고 b는 자신의 수 이하 모든 a의 경우의 수를 합한 만큼 경우의 수를 가지고 있다.
직관적으로 이해가 안가면 꼭 강의를 들어라
(글의 한계ㅠㅠ)

이 스킬로 24.06.30과 23.11.30 등 문제가 간단히 풀리지만 그건 자이해설에서 하고 오늘은 타 예제를 풀어보겠다.

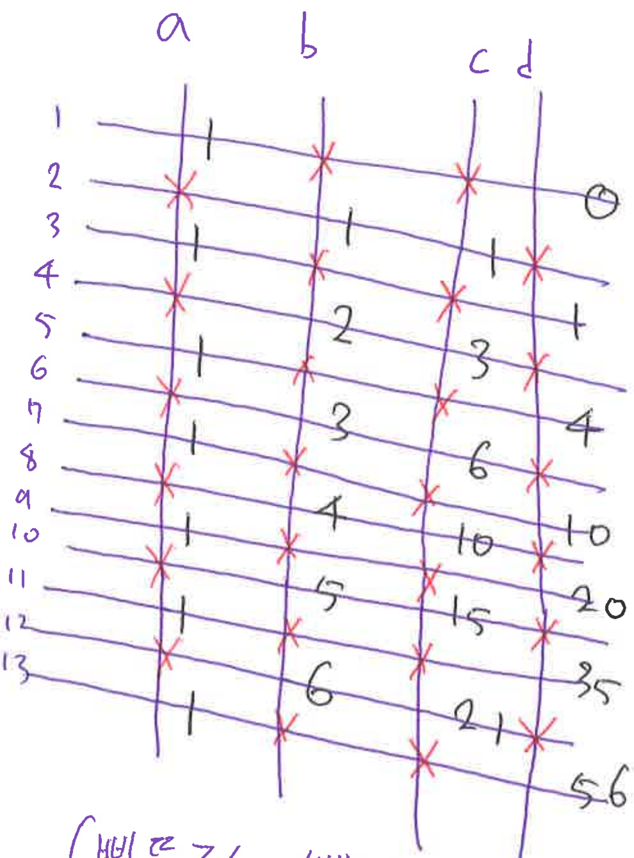
중복조합 경로의 활용 예시문제/ 2024 학년도 9평 30번

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le d$
(나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

30번이면 킬러가 아니냐 할 수 있지만 경로를 쓰면 매우 평이하게 풀린다.

일단 a와 d는 모두 홀수여야하고 b와 c는 모두 짝수 or 홀수여야한다.
그냥 구해도 구해지지만 경로로 더 쉽게 구해보겠다.



(삐뚤 주의, 새벽 3시라)

i) b c가 모두 짝수인 경우엔

$1+4+10+20+35+56=126$

이처럼 제한 상황 설정이 용이하다

ii) 또한 b c가 모두 홀수인 경우는 홀수 7개 중 4개 (중복허락)를 고르는 것으로

$1 \le a \le b \le c \le d \le 7$

이게 $_7H_4$ 인건 찐 기본이라 다루지 않겠다.

$_7H_4 = 210$ 이 나온다.

$\therefore\ 126+210=336$

더 유용한 경우는 다음에서 이어가겠다.

[25010-0077]

1 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) 다섯 자리의 자연수 13333처럼 같은 수가 연속하여 3개 이상 이어진다.
(나) 다섯 자리의 자연수 13333처럼 이웃한 두 수의 합은 모두 짝수이다.

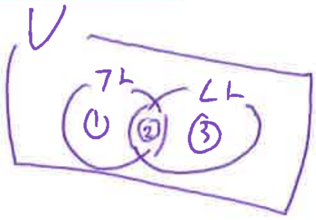
① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{9}{32}$

필수기억) $n(가 \cup 나) = n(가) + n(나) - n(가 \cap 나)$

$\qquad ①+② \quad ③+② \quad ②$

$= n(가) + n(가^c \cap 나)$

$\qquad ①+② \quad ③$



$n(가 \cap 나) = n(가) - n(가 \cap 나^c)$

$\qquad ①+② \quad ①$

위의 (가), (나) 조건에서 더 활용 어려운건 (나) 조건

고로 $n(나) - n(나 \cap 가^c)$으로 $n(가 \cap 나)$ 구해보자.

$n(나)$는 모두 짝수나 홀수만 나열하는거다. 고로 $2 \times (2^5$ (2,4 아 1,3 중복순열)$)$

$= 64$

$n(나 \cap 가^c)$은 전체 홀수나 짝수 나열한 것 中 3개 이상 이어진게 없도록 하는거다.

i) 11 333 (1·3 경우 변경 가능)

$2\left(\frac{5!}{2!3!} - \frac{3!}{2!}\left(\frac{3!}{3!}\right)\right) = 2(10-3) = 14$

ii) 11113 (11)

이 경우 11311 1개

1×2 (1−3 바꿈 = 2)

i) + ii) = 16, 짝수인 경우도 고려해야하니 2 곱하면 32

$\therefore \frac{64-32}{4^5 (n(S))} = \frac{32}{1024} = \frac{1}{32}$

[25010-0078]

2 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$
(나) $f(2)f(3)\neq 4$

① $\frac{93}{5^5}$ ② $\frac{98}{5^5}$ ③ $\frac{103}{5^5}$ ④ $\frac{108}{5^5}$ ⑤ $\frac{113}{5^5}$

☆ $n(가\cap 나) = n(가) - n(가\cap 나^c)$

i) $n(가)$일때에는 $1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 5$

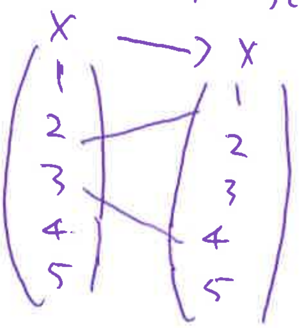
이므로 ${}_5H_5 = 126$

ii) $n(가\cap 나^c)$은 일단 $f(2) \times f(3)$이 4 이여야하고

이들의 순서가 (가) 조건에 의해 결정되었으니

$(f(2), f(3))$이 $(1,4)$일때와 $(2,2)$일때로 나뉘어질

ㄱ) $f(2)=1$ $f(3)=4$

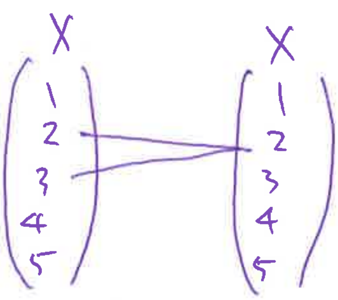


이때 1은 자연스레 1에 고정이되고

4,5는 4,5 중 1개 가능하니 ${}_2H_2=3$

즉 총 3개 가능

ㄴ) $f(2)=f(3)=2$



1은 1,2 中 1개 가능 ${}_2H_1 = 2$

4,5는 2,3,4,5 中에 가능 ${}_4H_2=10$

$2 \leq f(4) \leq f(5) \leq 5$

총 20개 가능

$\therefore \dfrac{126 - \underset{(ㄴ)}{20} - \underset{(ㄱ)}{3}}{5^5(n(S))} = \dfrac{103}{5^5}$

[25010-0079]

3 흰 공 6개, 검은 공 4개를 임의로 일렬로 모두 나열할 때, 각각의 흰 공이 적어도 한 개의 다른 흰 공과 이웃하는 사건을 A라 하자. 예를 들어

○○○○●○○●●●

과 같이 나열된 경우는 사건 A에 속하고

○○●○○●●○●○

과 같이 나열된 경우는 사건 A에 속하지 않는다. 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

사건 A = 흰 공은 모두 이웃

흰공이 나뉘어질 경우의 수 각각 구해 사건 A의 수 구해보자

w

i) ○ ww ○ ww ○ ww ○

이때 흰공의 묶음은 따로 구분안하니 그냥 저 4개의 자리에 검은공을 사의 적절하게 넣으면 된다.

이때 흰 공 사이에 있는 공간은 검은공이 1개 이상 들어감으로

$A+(B+1)+(C+1)+D=4$ // ${}_4H_2=10$

ii) ○ ww ○ wwww ○

이때 2개 묶음과 4개묶음 순서 바뀔 경우의수 2, 가운데 공간에 공 1개 이상, $2\times{}_3H_3=20$

iii) ○ www ○ www ○ 순서구분 X, 가운데 공간에 공 1개 이상

${}_3H_3=10$

iv) ○ wwwwww ○ ${}_2H_4=5$ // 사건 A는 45개, ∴ $\frac{45}{\frac{10!}{6!4!}}=\frac{45}{{}_{10}C_4}=\frac{45}{210}$

⇒ 17

[25010-0103]

1 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 동전 1개와 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> α 1개의 동전을 4번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 3 미만이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합을 점수로 하고,
> β 앞면이 나온 횟수가 3 이상이면
> 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 모든 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 6점 이상일 때, 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 미만일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

α

원래 A 시행 한 후 B 시행 즉 P(B|A)인데 문제가 B시행하고 A시행 즉 시간 역순으로 제시하면 우린 다음과 같이 푼다

$$P(A \overrightarrow{|\,B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P(A^c)\cdot P(B|A^c)}$$ (기본!!)

1개의 동전 4번 던져 앞면 3 미만 나온 경우 $\alpha = 1-\beta = \frac{11}{16}$

‖

앞면 3개 이상 나온 경우 $\beta = \frac{{}_4C_3(\text{앞}3)+{}_4C_4(\text{앞}4)}{2^4} = \frac{5}{16}$

$$P(\alpha|6\text{점}\uparrow) = \frac{P(\alpha)\cdot P(6\uparrow|\alpha)}{P(\alpha)\cdot P(6\uparrow|\alpha)+P(\beta)\cdot P(6\uparrow|\beta)}$$

$$= \frac{\frac{11}{16}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{11}{16}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{16}\cdot\frac{5}{10}} = \frac{44}{44+25} = \frac{44}{69} \Rightarrow 113$$

계수 맞추기

$P(6\uparrow|\alpha)$

A: $1\ 2\ 3_a\ 3_b\ 4$

6이상 뽑을 경우의 수로 $3_a 3_b 4$ 中 2개 뽑거나 2, 4 뽑아

${}_3C_2+1=4$

즉 $\frac{4}{{}_5C_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

→ 실전개념 확률에서는 같은 수로 다르게 판단 이유, 이리 n(S) 설정시 다르게 판단하여 뽑기 때문 (기본)

$P(6\uparrow|\beta)$

B: $1_a\ 1_b\ 2_a\ 2_b\ 3$

6 이상 뽑을 경우 $(1_a, 2_b, 3)$ $(1_b, 2, 3)$ $(2_a, 2_b, 3)$ → 5개

2_a도 가능하므로 ×2

$\frac{5}{{}_5C_3\ (n(S))}$

[25010-0104]

2 주머니 A에는 숫자 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 3의 배수일 확률은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{8}{21}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{10}{21}$

주머니 A에서 꺼내고 → B 경우 시작

즉 P(B)는 A 결과에 따라 좌우됨

A_1 = 2 뽑았을때 // A_2 = 3 뽑았을때로 분류

배반사건

$$P(B\ 3배수) = P(A_1)\cdot P(3배수|A_1) + P(A_2)P(3배수|A_2)$$

(1)3개 (2)3개 각각 1개

$$P(A_1) = \frac{{}_2C_1}{{}_3C_1} = \frac{2}{3},\quad P(A_1)\cdot P(3배수|A_1) = \frac{2}{3} \times \frac{{}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_7C_3} = \frac{22}{105}$$

111 222 3中 3개 꺼낸게 3의 배수

3n	3n+1	3n+2
1_a	2_a	3
1_b	2_b	
1_c	2_c	

$$P(A_2) = \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{1}{3},\quad P(A_2)\cdot P(3배수|A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_3} = \frac{13}{105}$$

111 2233 中 3개 꺼낸게 3배수

3n	3n+1	3n+2
1_a	2_a	3_a
1_b	2_b	3_b
1_c		

$$P(B\ 3배수) = \frac{22}{105} + \frac{13}{105} = \frac{35}{105} = \frac{1}{3}$$