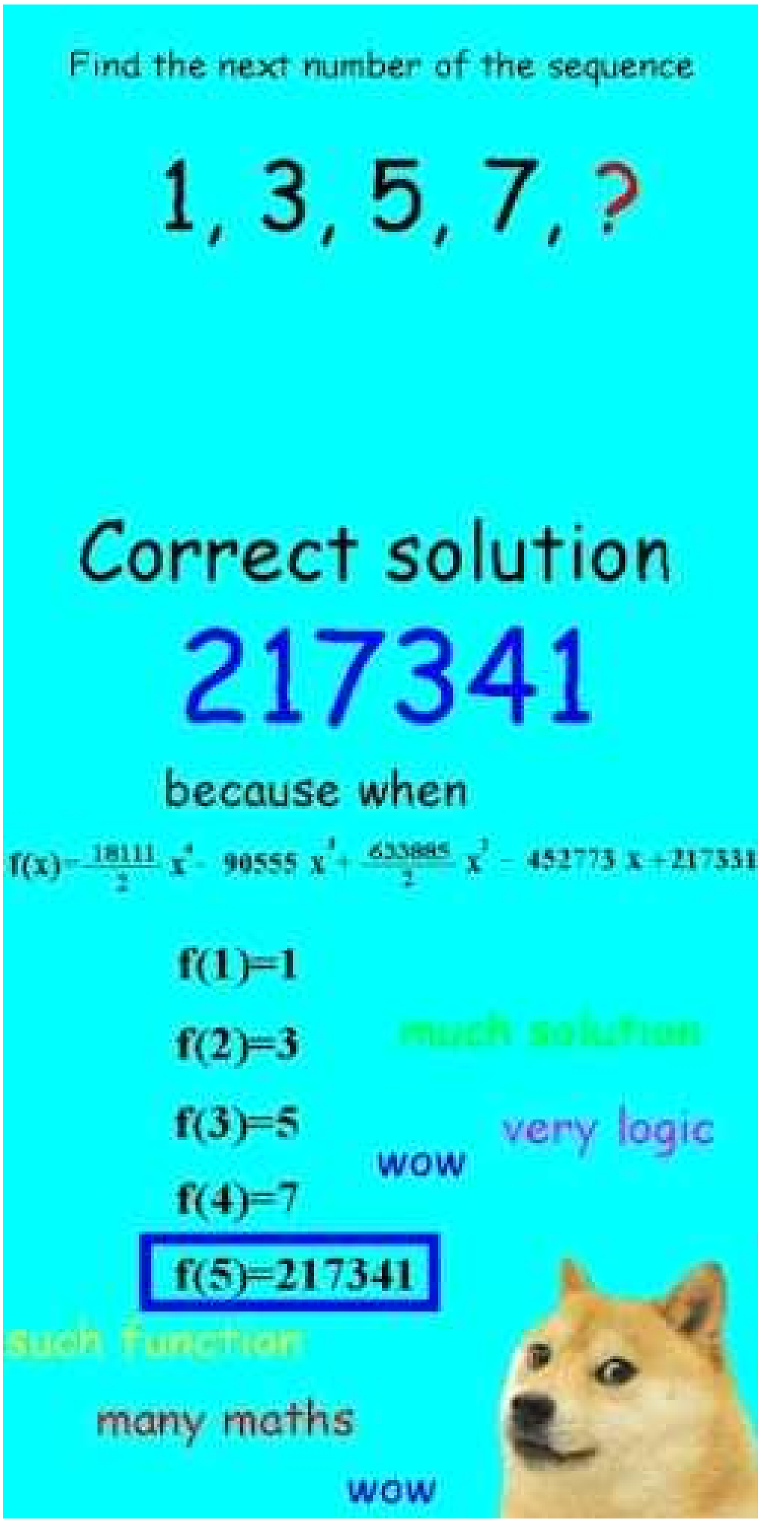
xyo’s Modulo 10



xyo[889268]

수능 수학 문제는 객관식 혹은 단답형입니다. 풀이 과정이 점수에 전혀 반영되지 않고, 답만 맞히면 되는 시험입니다. 풀이 시간을 조금이라도 줄이면서 정답을 낼 수 있는 풀이는 분명 좋은 풀이일 것입니다.

확률과 통계 과목의 **경우의 수** 문제들은 **자연수**를 물어봅니다.
"경우의 수는?", "순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?", "함수 f의 개수는?" 등등...

문제에서 물어보는 자연수(정답)는 자연수들의 사칙연산, 특히 덧셈(합의 법칙), 곱셈(곱의 법칙)으로 구해집니다. 자연수를 가지고 Modulo라는 연산을 할 수 있습니다(만 그걸 설명하려는 글은 아닙니다).

그래서 뭔 소리를 하고 싶은 건지 설명하겠습니다.
우선 다음 문제를 계산기 쓰지 말고 20초 안에 풀어보세요.

$217341 \times 73 - 15$의 값은?
①$15,865,875$ ②$15,865,876$ ③$15,865,877$ ④$15,865,878$ ⑤$15,865,879$

20초 안에 직접 다 계산해서 정답 ④를 얻었으면 나가주세요.
이 문제를 직접 다 계산하지 않아도 20초 안에 정답을 낼 수 있습니다.

선택지에 있는 자연수가 모두 일의 자리수가 다릅니다. 217341×73의 정확한 값은 모르지만, 일의 자리수가 3인 건 쉽게 알 수 있을 것입니다. 거기서 15를 뺀 숫자의 일의 자리수는 8이어야 할 것입니다. 그래서 정답이 ④입니다.

객관식 문제의 특성을 잘 이용해서 계산을 다 하지 않고도 답을 내자는 게 이 글의 주제가 되겠습니다.

경우의 수 객관식 문제의 선택지들의 일의 자리수가 모두 다르다면, 일의 자리수만 계산하여 답을 낼 수 있습니다. 앞서 봤던 문제처럼 숫자가 크다면 계산을 완벽하게 수행하는 것과 일의 자리수만 계산하여 푸는 것은 시간 차이가 많이 날 것입니다.

이 글에서는 그러한 기출 문제들을 같이 풀어보고자 합니다.

이런 의문이 생길 수도 있습니다.

Q. 수능에서 $217341 \times 73 - 15$만큼이나 더러운 계산을 시키는 것도 아닌데, 계산 뭐 얼마나 된다고 굳이 그렇게까지 계산을 줄이려고 해야 되나요?

A. 그냥 끝까지 봐주시기 바랍니다.
문제들을 이것저것 많이 볼 건데, 실제로 크게 유리한 경우도 있었습니다.

다음 페이지부터 같이 보시겠습니다.

[23학년도 6월 평가원 27번]

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

선택지 일의 자리수가 모두 다르고, 숫자들이 꽤나 큽니다.

왼쪽 끝에 X, Y 중 하나 넣는 경우의 수는 2이고,
마찬가지로 오른쪽 끝에 X, Y 중 하나 넣는 경우의 수는 2입니다. 곱해서 4를 챙깁시다.

남은 네 자리 중 a를 넣을 위치를 정하는 경우의 수는 4입니다.
여기까지 해서 4×4를 한 다음에 일의 자리수만을 취하면 6입니다.

남은 세 자리에 b, X, Y를 중복을 허락하여 나열해야 하니까 27입니다. 7만 가져갑니다.

$6 \times 7 = 42$이므로 일의 자리수가 2인 선택지를 고르면 ③이 정답입니다.

[23년 4월 교육청 24번]

24. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A \cup B)=5,\ A \cap B=\varnothing$$

을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 168 ② 174 ③ 180 ④ 186 ⑤ 192

그냥 쉬운 문젠데 뭘 일의 자리수만 계산하고 개짓거리 하냐 싶으실 수 있습니다.
그치만 좀만 참아주세요.

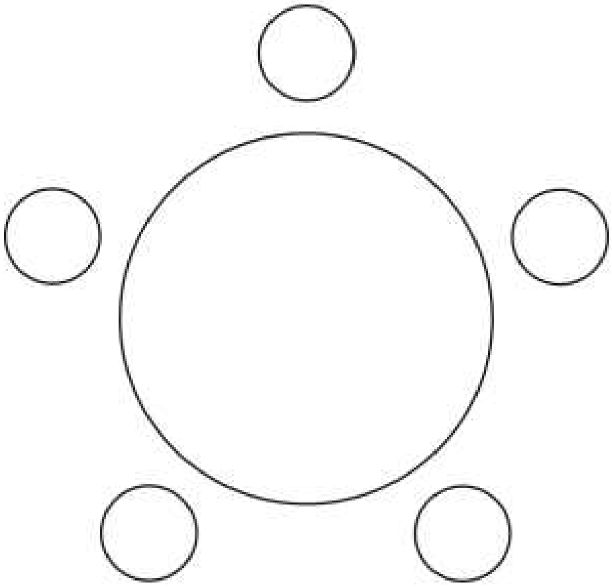
$(A \cup B)^C$에 들어갈 원소를 정하는 경우의 수는 6입니다.
나머지 5개 원소가 A에 들어갈지, B에 들어갈지 정하는 경우의 수는 $2^5 = 32$입니다. 일의 자리수 2만 가져갑니다.

6×2의 일의 자리수가 2이므로 정답은 ⑤입니다.

[23년 4월 교육청 25번]

25. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 있다. 이 7명의 학생 중에서 A, B, C를 포함하여 5명을 선택하고, 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 120 ② 132 ③ 144 ④ 156 ⑤ 168



4명 중 2명을 고르는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$입니다.

탁자에 앉힐 5명이 정해졌으니, 그냥 원순열하면 24입니다. 4만 가져갑니다.

$6 \times 4 = 24$의 일의 자리수가 4이므로 정답은 ③입니다.

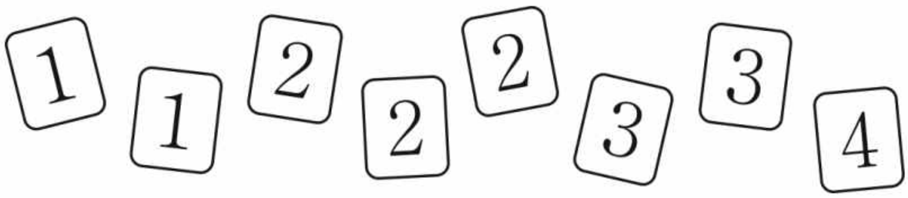
"$6 \times 24 = 144$는 암산도 되는데 왜 지랄하나요?"

알겠습니다. 다음 페이지 문제는 일의 자리수 날리는 게 조금 더 유용할 겁니다.

[23년 4월 교육청 28번]

28. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268 ③ 272 ④ 276 ⑤ 280



카드 1장 버리고 나머지 7장을 일렬로 나열하는데, 홀수끼리는 이웃하면 안 된다고 합니다.
어떤 카드를 버릴 것인지로 케이스 분류를 할 수 있겠습니다.

① 1을 버릴 때

$1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$를 홀수가 이웃하지 않게끔 나열해야 합니다.
짝수 4개만 먼저 나열합시다. 같은 것을 포함한 순열이고, 4가지입니다.
2224로 나열했다고 합시다.
$\mathrm{O2O2O2O4O}$
5개의 O 중에서 1, 3, 3을 집어넣어야 합니다.
1이 어디 들어갈지 정하는 경우의 수는 5입니다.

아직 안 끝났지만 중간 점검을 하면, $4 \times 5 = 20$입니다. 3을 집어넣는 경우의 수는 아직 얼만지 모르겠지만 자연수잖아요? 그럼 20의 배수가 최종적으로 나오겠네요. 그럼 일의 자리수가 0입니다. 그럼 이거 안 합니다.

한편, 3을 버리는 경우의 수는 1을 버리는 경우의 수와 같습니다. 안 해도 되겠네요.

② 2를 버릴 때

$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$를 홀수가 이웃하지 않게끔 나열해야 합니다.
$\mathrm{XOXOXOX}$
홀수가 X에, 짝수가 O에 들어가야만 합니다.
홀수를 어떻게 넣을까요? 같은 것이 있는 순열입니다. 6이네요.
짝수도 같은 것이 있는 순열입니다. 3입니다.
6×3 해서 일의 자리수 8만 챙깁니다.

③ 4를 버릴 때

$1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$를 홀수가 이웃하지 않게끔 나열해야 합니다.
$\mathrm{X2X2X2X}$
4개의 X에다가 홀수를 넣으면 됩니다. 같은 것이 있는 순열입니다. 6이네요.

그래서 정답의 일의 자리수는 $8 + 6 = 14$의 일의 자리수인 4입니다. ①이 정답입니다.
꽤 괜찮죠?

[22년 3월 교육청 28번]

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

“A가 사탕을 몇 개 받는지”를 기준으로 케이스를 나누겠습니다.

① A가 사탕을 5개 받을 때
경우의 수는 그냥 1입니다.

② A가 사탕을 4개 받을 때
A가 받을 사탕을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_4 = 5$입니다.
남은 사탕을 B, C 중에 누구한테 줄지 정하는 경우의 수는 2입니다.
곱하면 10입니다.

“곱하면 10의 배수인 것”이 매우 중요합니다. 일의 자리수가 0이면 다른 숫자랑 더했을 때 일의 자리수에 영향을 주지 않습니다.

③ A가 사탕을 3개 받을 때
A가 받을 사탕을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$입니다.
B, C 에게 사탕을 어떻게 나눠줄지 정하는 경우의 수는 관심이 없습니다. 어차피 10이랑 곱하면 일의 자리수가 0이니까요. **이거 안 합니다.**

④ A가 사탕을 2개 받을 때
A가 받을 사탕을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$입니다.
B, C에게 사탕을 어떻게 나눠줄지 정하는 경우의 수는 관심이 없습니다. 어차피 10이랑 곱하면 일의 자리수가 0이니까요. **이것도 안 합니다.**

⑤ A가 사탕을 1개 받을 때
A가 받을 사탕을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 5$입니다.
B, C에게 사탕을 어떻게 나눠줄지 정하는 경우의 수는 아직 모릅니다. 이 경우의 수를 n이라고 대충 해보겠습니다.

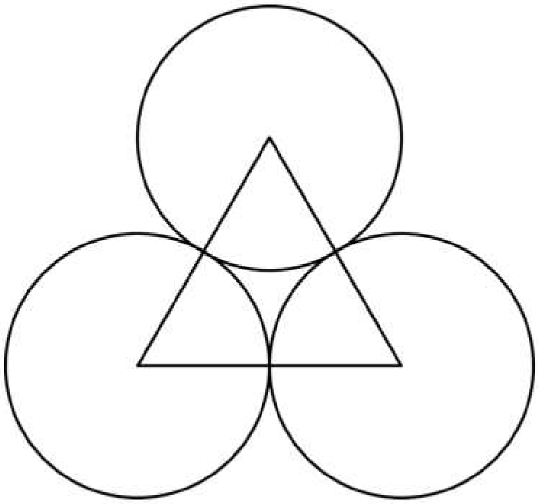
만약 n이 **짝수**면 ⑤의 경우의 수는 10의 배수입니다. 그러면 정답의 일의 자리수는 1이어야 합니다. 근데 선택지를 보시면 없습니다. n은 홀수일 거고, ⑤의 경우의 수는 일의 자리수가 5일 것입니다.

그럼 정답의 일의 자리수는 6이어야 하겠네요. ④가 정답입니다.

풀이 같지도 않다고 하실 수도 있겠지만, **수능은 어찌됐든 답만 내면 되는 시험**입니다.
평소에 연습할 때는 정석적인 풀이를 구사하셔야 하겠지만, 시험장에서는 시간을 꽤나 아낄 수 있지 않을까요?

[12학년도 6월 평가원 가형 15번]

15. 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

선택지 일의 자리수가 모두 0인데요?
맞습니다. 근데 문제를 자세히 보면 아시겠지만 이 문제에서는 케이스 분류를 하지 않아도 됩니다. 모두 일의 자리수가 0이라는 건 결국 10이 곱해질 거라는 뜻입니다.

그럼 그냥 10 나오면 없애버리죠. 선택지에 있는 0도 대충 지우고.
① 126 ② 168 ③ 252 ④ 376 ⑤ 504 중에 골라보자는 뜻입니다.
①④의 일의 자리수가 6인 게 좀 걸리긴 하는데, 6이 아니길 빌어보는 건 어떨까요(라고 하는 건 너무 좀 그런가요?)?

정가운데에 칠할 색을 고르는 경우의 수는 7입니다.
정삼각형 세 영역을 칠할 색을 고르는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$입니다. 2×10으로 바꾸고, 10을 날려버립시다.
칠할 색을 골랐으니 칠해줍시다. 이거는 원순열입니다. 2입니다.
남은 3개 색을 칠합시다. $3!=6$입니다.
$7\times4\times6$의 일의 자리수는 8×6의 일의 자리수인 8입니다. 다행히도 6이 아니네요.

정답은 ②입니다.

너무 사후적인가요?
음..

[22학년도 6월 평가원 28번]

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

주사위를 한 번 던져서 얻을 수 있는 점수는 $0, 1, 2, 3$입니다.
0점을 얻는 경우의 수는 3이고, $1, 2, 3$점을 얻는 경우의 수는 각각 1입니다.
4를 어떻게 4개의 음 아닌 정수의 합으로 표현할 것인지를 기준으로 케이스 분류를 하면 되겠습니다.

① $4 = 3 + 1 + 0 + 0$
$3, 1, 0, 0$을 일렬로 나열합니다. 같은 것이 있는 순열입니다. 12가지네요. 2만 챙깁니다.
0이 두 번 나오니까 $3^2 = 9$를 곱해줍니다.

결국 일의 자리수는 8입니다.

② $4 = 2 + 2 + 0 + 0$
$2, 2, 0, 0$을 일렬로 나열합니다. 같은 것이 있는 순열입니다. 6가지네요.
0이 두 번 나오니까 $3^2 = 9$를 곱해줍니다.

결국 일의 자리수는 4입니다.

③ $4 = 2 + 1 + 1 + 0$
$2, 1, 1, 0$을 일렬로 나열합니다. 같은 것이 있는 순열입니다. 12가지네요. 2만 챙깁니다.
0이 한 번 나오니까 3을 곱해줍니다.

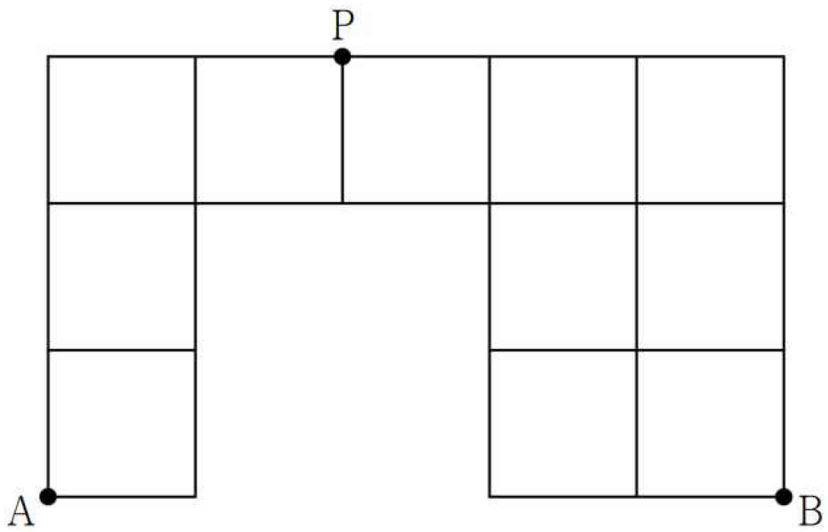
결국 일의 자리수는 6입니다.

④ $4 = 1 + 1 + 1 + 1$
주사위를 네 번 굴려서 1만 4번 나오는 경우의 수는 그냥 1입니다.

결국 정답의 일의 자리수는 $8 + 4 + 6 + 1$의 일의 자리수와 같습니다. 9네요. 정답은 ⑤입니다.

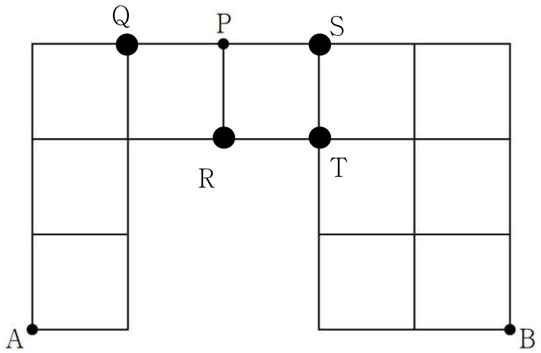
[21년 4월 교육청 28번]

28. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]



① 78　② 82　③ 86　④ 90　⑤ 94

점 몇 개만 찍겠습니다.



(대충 했는데 그냥 알아먹으세요.)

한 번 지난 도로는 다시 지나지 말랍니다.
A에서 R을 지나 P를 지났으면, P에서 B로 갈 때 반드시 S를 지나야 합니다.
근데 S에서 B로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!3!}=10$입니다. 10이네요? 이거는 안 하겠습니다.

A에서 Q를 지나 P를 지나는 경우를 고려해봅시다. P에서 R이나 S로 갈 수도 있습니다.
근데 S에서 B로 가는 건 10이니까 안 합니다.

결국 $\mathrm{A}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{P}\to\mathrm{R}\to\mathrm{T}\to\mathrm{B}$의 경우의 수만 구해서 일의 자리수만 계산하면 됩니다.
$\mathrm{A}\to\mathrm{Q}$는 $\frac{4!}{3!}=4$가지입니다.
$\mathrm{Q}\to\mathrm{P}\to\mathrm{R}\to\mathrm{T}$는 1가지밖에 없습니다.
$\mathrm{T}\to\mathrm{B}$는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$가지입니다.

다 곱하면 24니까 정답의 일의 자리수가 4이어야 하겠네요. 정답은 ⑤입니다.
10을 열심히 찾으면 이런 식으로 빨리 답을 낼 수 있습니다.

[22년 4월 교육청 28번]

28. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) $|a-b+c-d+e| \le 2$

① 359 ② 363 ③ 367 ④ 371 ⑤ 375

$a-b+c-d+e=k$라 하겠습니다. $|k|\leq 2$입니다.

$a+c+e=k+b+d$입니다. 양변에 $b+d$를 더해주면, $10=k+2(b+d)$가 됩니다.

k는 아무튼 정수입니다. $2(b+d)$는 짝수입니다. k도 짝수이어야 하겠네요.
$k=-2$, $k=0$, $k=2$가 가능합니다.

① $k=-2$
$b+d=6$, $a+c+e=4$입니다.
b,d를 결정하는 경우의 수는 7입니다.
a,c,e를 결정하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$입니다. 5만 챙깁니다.

그럼 $7\times 5=35$니까 일의 자리수는 5입니다.

② $k=0$
$b+d=a+c+e=5$입니다.
b,d를 결정하는 경우의 수는 6입니다.
a,c,e를 결정하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$입니다. 1만 챙깁니다.

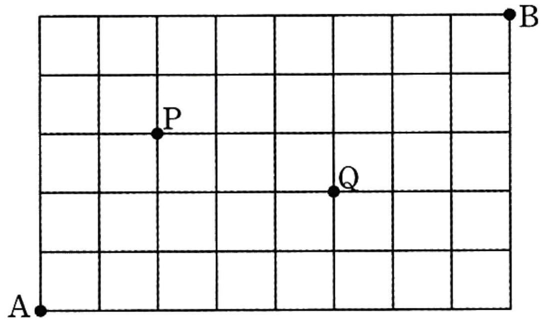
그럼 일의 자리수는 6입니다.

③ $k=2$
$b+d=4$, $a+c+e=6$입니다.
b,d를 결정하는 경우의 수는 5입니다.
5에다가 홀수가 곱해지면 일의 자리수가 5이고, 정답의 일의 자리수가 6이어야 합니다.
선택지에 없네요. 그럼 짝수가 곱해지는 것이고 일의 자리수가 0이며, 정답의 일의 자리수는 1입니다. 정답은 ④입니다.

참고
a,c,e를 결정하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$입니다.

[17학년도 경찰대 9번]

아래 그림은 어느 도시의 도로를 선으로 나타낸 것이다. 교차로 P에서는 좌회전을 할 수 없고, 교차로 Q는 공사 중이어서 지나갈 수 없다.



A를 출발하여 B에 도달하는 최단 경로의 개수는? [4점]

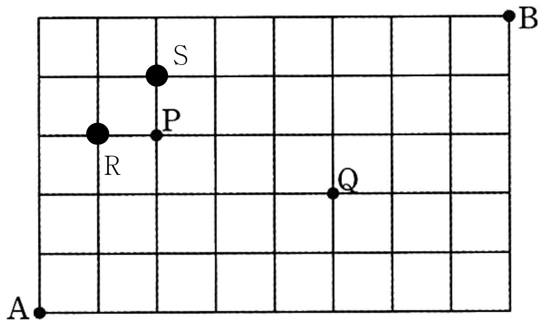
① 818 ② 825 ③ 832 ④ 839 ⑤ 846

전체에서 빼는 게 유리한 것 같습니다.

A에서 B로 가는 경우의 수는 $\frac{13!}{8!\times5!}=\frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1}=13\times11\times9$입니다.

일의 자리수는 3×9의 일의 자리수와 같네요. 7입니다.

점 몇 개 찍읍시다.



P에서 좌회전 금지라는 건 $R\to P\to S$로 가지 말라는 소립니다.

$A\to R\to P\to S\to B$의 경우의 수를 구합시다.

$A\to R$의 경우의 수는 4입니다.

$R\to P\to S$의 경우의 수는 1입니다.

$S\to B$의 경우의 수는 7입니다.

결국 $A\to R\to P\to S\to B$의 경우의 수는 일의 자리수가 8입니다.

$A\to Q\to B$의 경우의 수를 대충 구해봅시다.

왜 대충이냐 하면, $Q\to B$의 경우의 수가 $\frac{6!}{3!\times3!}=20$이라서 결국 10의 배수이거든요.

그냥 일의 자리수가 0입니다.

$7-8$의 일의 자리수는 9입니다. ④가 정답이네요.

제가 준비한 건 여기까지입니다.
선택지 일의 자리수가 모두 다른 경우의 수 문제는 아마 꽤 많을 겁니다.
선택지들이 등차수열을 이루는 경우가 꽤 많은데, 공차가 5의 배수가 아니면 일의 자리수가 다 다르거든요. 다른 문제들은 뭐 직접 연습해보세요.

평소에 연습하실 때 정석 풀이와 일의 자리수 풀이를 모두 준비하시는 걸 추천합니다.

제 글이 유용했다면 XDK와 기프티콘을 꽁짜로 주세요.