우일신 又日新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 3월호

공통/수학1

수열 30제

정답 및 해설지

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

우일신又日新

파본형 월간 N제

25년 3월호

공통/수학1

수열 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌
넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ 7회 정답

01 (9번)	02 (10번)	03 (11번)	04 (12번)	05 (13번)	06 (14번)	07 (15번)	08 (20번)	09 (21번)	10 (22번)
⑤	⑤	④	①	⑤	⑤	②	64	10	49

▶ 8회 정답

11 (9번)	12 (10번)	13 (11번)	14 (12번)	15 (13번)	16 (14번)	17 (15번)	18 (20번)	19 (21번)	20 (22번)
③	④	④	⑤	③	①	②	8	11	119

▶ 9회 정답

21 (9번)	22 (10번)	23 (11번)	24 (12번)	25 (13번)	26 (14번)	27 (15번)	28 (20번)	29 (21번)	30 (22번)
③	④	④	①	③	⑤	④	168	189	365

01

정답 ⑤

$$|a_2+a_4| = |a_3\times a_4| \quad \rightarrow \quad |2a_3| = |a_3\times a_4|$$

이므로 $a_3=0$ 또는 $a_4=\pm 2$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 0이 아니므로 $a_3\neq 0$이어야 한다.

(1) $a_4=2$ 인 경우

$a_6=4$이므로 공차는 $d=1$임을 알 수 있다.

이때 $a_2=0$이므로 모든 항이 0이 아니라는 조건에 모순!

(2) $a_4=-2$ 인 경우 (정답상황!)

$a_6=4$이므로 공차는 $d=3$임을 알 수 있다.

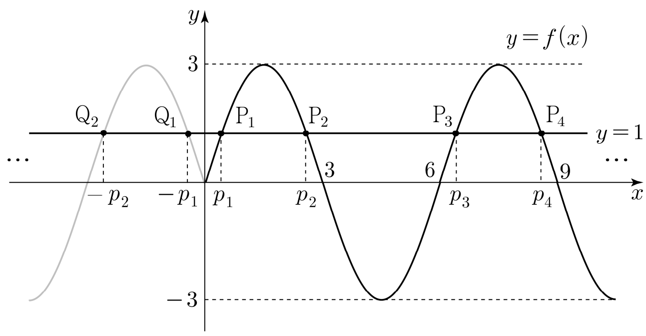
이때 0이 되는 항이 없으므로 조건을 만족시킨다.

(1), (2)에 의해 공차는 $d=3$이므로 $a_8=10\ (=a_6+2d)$이다.

$\therefore\ 10$

02

정답 ⑤



함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 좌표를

$$\mathrm{P}_1(p_1,\ 1),\quad \mathrm{P}_2(p_2,\ 1),\quad \mathrm{P}_3(p_3,\ 1),\quad \cdots$$

삼각함수의 대칭성에 의해 $p_1+p_2=3,\ p_2+p_3=9,\ p_3+p_4=15,\ \cdots$

으로 두면 점 Q_n의 좌표는

$$\mathrm{Q}_1(-p_1,\ 1),\quad \mathrm{Q}_2(-p_2,\ 1),\quad \mathrm{Q}_3(-p_3,\ 1),\quad \cdots$$

이므로 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이의 합을 구해보면

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{(p_1 + p_2) + (p_2 + p_3) + \cdots + (p_{10} + p_{11})\}$$

⤸ $p_n + p_{n+1} = 6n - 3$: 등차수열!

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}(6k-3)$$

$$= 150$$

이다.

$\therefore\ 150$

03

정답 ④

계산의 편의성을 위해 $r = \sqrt[4]{2}$ 로 두면

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 r인 등비수열이고,

수열 $\left\{\frac{1}{{a_n}^2}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{{a_1}^2}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$ 인 등비수열이다.

등비수열의 합 공식을 활용하면

$$S_8 = \frac{a_1 \times (r^8 - 1)}{r-1}, \qquad S_4 = \frac{a_1 \times (r^4 - 1)}{r-1}$$

$$T_8 = \frac{\left(\frac{1}{{a_1}^2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{r^2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{r^2}}, \qquad T_4 = \frac{\left(\frac{1}{{a_1}^2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{r^2}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{r^2}}$$

이므로

$$\frac{S_8}{T_8} = \frac{S_4}{T_4} \times a_9$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a_1 \times (r^8-1)}{r-1}}{\frac{\left(\frac{1}{{a_1}^2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{r^2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{r^2}}} = \frac{\frac{a_1 \times (r^4-1)}{r-1}}{\frac{\left(\frac{1}{{a_1}^2}\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{r^2}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{r^2}}} \times a_9$$

⤸ 양변에 똑같은 인수가 많다! 계산하지 말고 다 지워버리자.

$$\Leftrightarrow \frac{r^4 + 1}{1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)^4} = a_9$$

이므로 $a_9 = \frac{12}{5}$ ← ($r = \sqrt[4]{2}$ 이므로 계산하면 됨!)

따라서 $a_1 = \frac{3}{5} \left(= a_9 \times \frac{1}{r^8}\right)$ 이다.

$\therefore\ \frac{3}{5}$

* Remark

등비수열의 합을 처리하는 과정은 겉으로는 많이 복잡해보이지만,
자세히 관찰해보면 **"약분"**되거나 **"공통 인수"**를 갖고 있어
계산하지 않고 쉽게 처리할 수 있는 경우가 있다.
$\frac{S_8}{T_8} = \frac{S_4}{T_4} \times a_9$의 값을 처리하기 위해 S_4, S_8, T_4, T_8의 값을
모두 하나하나 계산하려 시도했다면, **"이게 정말 출제자의 의도일까? 아닐 것 같은데.."**라는 생각이 들었어야 함!

04

정답 ①

$$a_{n+1} = \begin{cases} na_n - 4 & (a_n \geq 0) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$

에 대하여

$$a_5 = \begin{cases} 4a_4 - 4 & (a_4 \geq 0) \\ \frac{1}{2}a_4 & (a_4 < 0) \end{cases}$$

이므로

$$a_4 \times a_5 = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_4 \times (4a_4 - 4) = 8 \ \rightarrow\ a_4 = 2 \ (\because\ a_4 \geq 0) \\ a_4 \times \frac{1}{2}a_4 = 8 \ \rightarrow\ a_4 = -4 \ (\because\ a_4 < 0) \end{cases}$$

즉, a_4의 값에 따라 케이스를 분류하여 역추적해보자.

(1) $a_4=2$ 인 경우

a_4		a_3		a_2		a_1
2	—	2	—	3	—	7
		$(a_3\geq 0)$		$(a_2\geq 0)$		$(a_1\geq 0)$

(2) $a_4=-4$ 인 경우

a_4		a_3		a_2		a_1
-4	┌	0	—	2	—	6
		$(a_3\geq 0)$		$(a_2\geq 0)$		$(a_1\geq 0)$
	└	-8	—	-16	—	-32
		$(a_3<0)$		$(a_2<0)$		$(a_1<0)$

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

$$a_1=7,\ \ 6,\ \ -32$$

이므로 그 합은 -19 이다.

$$\therefore\ -19$$

05

정답 ⑤

Step 1 조건 (가)와 (나)를 해석

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_A, d_B라 하자.

$d_Ad_B\neq 0$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 공차 d_A, d_B도 모두 자연수여야 한다. 조건 (가)와 (나)에서

$$a_2+b_1=m$$
$$a_{m+1}+b_m=11 \leftarrow a_{m+1}=11-b_m$$

이때 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 은 모두 등차수열이므로

$$a_{m+1}=a_2+(m-1)d_A \qquad \cdots ㉠$$
$$b_m=b_1+(m-1)d_B \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 양변을 모두 더하면

$$a_{m+1}+b_m=(a_2+b_1)+(m-1)(d_A+d_B)$$
$$\Leftrightarrow\ 11=m+(m-1)(d_A+d_B) \qquad \cdots ㉢$$

Step 2 ㉢을 만족시키는 자연수 m 의 값 추론

$$11=m+(m-1)(d_A+d_B) \qquad \cdots ㉢$$

부정방정식! m, d_A, d_B이 모두 자연수임을 활용하자.

을 만족시키는 자연수 m 의 값을 구해보자.

(1) $m=1$ 인 경우

$$㉢:\ 11=1+0\times(d_A+d_B)$$

이므로 모순!

(2) $m=2$ 인 경우

$$㉢:\ 11=2+(d_A+d_B)$$

이므로 $d_A+d_B=9$ 이다. 하지만 $m=2$ 이면 $a_2+b_1=2\ (=m)$ 에서 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수일 수 없으므로 모순! ($a_2+b_1=2$ 이면 $a_2=b_1=1$ 이어야 하는데, a_1의 값이 자연수일 수 없음!)

(3) $m=3$ 인 경우 (정답상황!)

$$㉢:\ 11=3+2(d_A+d_B)$$

이므로 $d_A+d_B=4$ 이다.

(4) $m=4$ 인 경우

$$㉢:\ 11=4+3(d_A+d_B)$$

이므로 $d_A+d_B=\dfrac{7}{3}$ 에서 모순!

(d_A, d_B가 모두 자연수여야 함!)

(5) $m=5$ 인 경우

$$㉢:\ 11=5+4(d_A+d_B)$$

이므로 $d_A+d_B=\dfrac{3}{2}$ 에서 모순!

($m=6$, 7, $\cdots$, 그 이후로도 조건을 만족시키는 상황 발생 X)

(1) ~ (5)에 의해 $m=3$ 이므로

$$d_A+d_B=4,$$
$$a_2+b_1=3 \quad \rightarrow \quad a_2=2,\ b_1=1 \ \ (a_1=1\text{도 추론 가능!})$$

이다. 즉, 수열 $\{a_n+b_n\}$은

첫째항 : $a_1+b_1=2$
공차 : $d_A+d_B=4$

인 등차수열 $a_n+b_n=4n-2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5m}(a_k+b_k) &= \sum_{k=1}^{15}(a_k+b_k)\\ &= \sum_{k=1}^{15}(4k-2)\\ &= 450\end{aligned}$$

이다.

$\therefore\ 450$

06

정답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

Step 1 공비 r의 범위 구하기

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_1>0$, $r>0$ 이어야 한다. 주어진 형태는

$$\frac{a_n}{a_5}=r^{n-5},\quad \frac{a_5}{a_n}=r^{5-n}$$

이므로 $\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}$의 값의 부호는 $n=5$를 기준으로 바뀐다는 사실을 알 수 있다. 이때 $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}\geq 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수를 관찰하기 위해 r의 값의 범위에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $0<r<1$ 인 경우 (정답상황!)

$0<r<1$ 이면

$$n<5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}>0$$
$$n=5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}=0$$
$$n>5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}<0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}$의 값은 (양수)→(음수)로 변한다.

즉, $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}\geq 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수가 유한하다.

(2) $r=1$ 인 경우

$r=1$ 이면 n의 값에 관계없이

$$\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}=0$$

이므로 모든 자연수 m에 대하여 $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}=0$ 이다.

즉, $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}\geq 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수가 무수히 많으므로 모순!

(3) $r>1$ 인 경우

$r>1$ 이면

$$n<5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}<0$$
$$n=5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}=0$$
$$n>5\text{일 때 : }\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}>0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}$의 값은 (음수)→(양수)로 변한다.

즉, $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}\geq 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수가 무수히 많으므로 모순!

(1), (2), (3)에 의해 해당 부등식을 만족시키는 자연수 m의 개수가 k (유한개!)이려면 $0<r<1$ 이어야 한다.

Step 2 **k의 값 구하기**

주어진 식을 정리해보면

$$\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}=\sum_{n=1}^{m}\left\{r^{n-5}-r^{5-n}\right\}$$
$$=\frac{\frac{1}{r^4}\times(1-r^m)}{1-r}-\frac{r^4\times\left(1-\left(\frac{1}{r}\right)^m\right)}{1-\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{1}{r^4}\times\frac{1-r^m}{1-r}-\frac{r^5}{r^m}\times\frac{1-r^m}{1-r}$$
$$=\left(\frac{1}{r^4}-\frac{r^5}{r^m}\right)\times\left(\frac{1-r^m}{1-r}\right)$$

이므로

$$\left(\frac{1}{r^4}-\frac{r^5}{r^m}\right)\times\underline{\left(\frac{1-r^m}{1-r}\right)}\geq 0 \;\rightarrow\; m\leq 9$$

$0<r<1$ 이므로 $\left(\frac{1-r^m}{1-r}\right)>0$

즉, 부등식 $\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{a_n}{a_5}-\frac{a_5}{a_n}\right\}\geq 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 9이므로 $k=9$이다.

$$7a_4-3a_5=2a_3 \;\rightarrow\; 7r-3r^2=2 \quad (\text{양변을 } a_3 \text{로 나누기!})$$
$$\rightarrow\; r=\frac{1}{3} \quad \text{또는} \quad \underline{r=2}$$

$0<r<1$ 이므로 모순!

따라서 $(a_k=)\ a_9=90$에서 $a_{11}=10\ (=a_9\times r^2)$이다.

$\therefore\ 10$

07

정답 ②

Step 1 **조건 (가), (나), (다)를 연립하기**

조건 (가), (나), (다)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=2a_n \quad \cdots ㉠$$
$$a_{2n+1}=-4a_n+1 \quad \cdots ㉡$$
$$b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+2b_n \quad \cdots ㉢$$

㉠, ㉡을 더하면

$$a_{2n}+a_{2n+1}=-2a_n+1 \quad \cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 더하면

$$(a_{2n}+b_{2n})+(a_{2n+1}+b_{2n+1})=2b_n+1 \quad \cdots ㉤$$

Step 2 **$\sum_{n=1}^{127}b_n=360$ 임을 활용하여 a_1의 값 구하기**

㉢, ㉤을 활용해 $\sum_{n=1}^{127}b_n=360$의 식을 간단히 해보면

$$\sum_{n=1}^{127}b_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{126}+b_{127})$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{63}+b_{63})\}$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(2b_1+1)+\cdots+(2b_{31}+1)\}$$
$$=2a_1+62+4\sum_{n=1}^{31}b_n$$

이다. 다시 $\sum_{n=1}^{31}b_n$의 식을 간단히 해보면

$$\sum_{n=1}^{31}b_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{30}+b_{31})$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})\}$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(2b_1+1)+\cdots+(2b_7+1)\}$$
$$=2a_1+14+4\sum_{n=1}^{7}b_n$$

이고, 한 번 더 $\sum_{n=1}^{7}b_n$의 식을 간단히 해보면

$$\sum_{n=1}^{7}b_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+(b_6+b_7)$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)\}$$
$$=2\{(a_1+b_1)+(2b_1+1)\}$$
$$=2a_1+2$$

이다. 각각의 식에 다시 대입해보면

$$\sum_{n=1}^{31}b_n=10a_1+22\left(=2a_1+14+4\sum_{n=1}^{7}b_n\right),$$
$$\sum_{n=1}^{127}b_n=42a_1+150\left(=2a_1+62+4\sum_{n=1}^{31}b_n\right)$$

이므로 $42a_1+150=360 \;\rightarrow\; a_1=5$

Step 3 a_1 **의 값을 통해** a_7 **의 값 도출하기**

ⓛ에서

$n=3$ 대입 : $a_7=-4a_3+1$

$n=1$ 대입 : $a_3=-4a_1+1$

이때 $a_1=5$ 이므로 대입해서 계산하면 $a_3=-19$, $a_7=77$

따라서 $a_7=77$ 이다.

$\therefore\ 77$

08

정답 64

모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1}-a_{n+2} \quad \cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$a_1=a_2-a_3 \ \rightarrow\ a_1=0 \quad (\because\ a_2=a_3)$$

㉠에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하면

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = (a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+1}-a_{n+2})$$

$$\Leftrightarrow\ a_{n+1}=-a_{n+1}+2a_{n+2}-a_{n+3}$$

$$\Leftrightarrow\ a_{n+3}=2(a_{n+2}-a_{n+1})$$

: 점화식을 구했으므로 나열할 수 있다!

$a_2=a_3=k$로 두고 수열 $\{a_n\}$의 항을 나열해보면

$$\underbrace{\overset{a_1}{0},\ \overset{a_2}{k},\ \overset{a_3}{k}}_{(\text{양수})\times k},$$

$$\underbrace{\overset{a_4}{0},\ \overset{a_5}{-2k},\ \overset{a_6}{-4k},\ \overset{a_7}{-4k}}_{(\text{음수})\times k},$$

$\times(-4)$

$$\underbrace{\overset{a_8}{0},\ \overset{a_9}{8k},\ \overset{a_{10}}{16k},\ \overset{a_{11}}{16k}}_{(\text{양수})\times k},$$

$\times(-4)$

$$\underbrace{\overset{a_{12}}{0},\ \overset{a_{13}}{-32k},\ \overset{a_{14}}{-64k},\ \overset{a_{15}}{-64k}}_{(\text{음수})\times k},$$

$$\vdots$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{23} a_k &= (0+k+k)+\{0+(-2k)+(-4k)+(-4k)\}+\\ &\quad \cdots +(0+8k+16k+16k)+\cdots\\ &=2k+\{(-10k)+40k+(-160k)+640k+(-2560k)\}\\ &=-2048k\end{aligned}$$

: $\sum_{k=1}^{23} a_k=a_{24}-a_{25}$를 활용해 구할 수도 있다!

이므로 $-2048k=-32$에서 $k=\dfrac{1}{64}$ $(=a_2)$ 이다.

$$\therefore\ \frac{1}{a_2}=64$$

09

정답 10

Step 1 수열 $\{b_n\}$ 의 특징 파악

수열

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \{|a_{k+2}| - |a_k|\}$$

의 항을 차례로 나열해보면

$$\begin{aligned} b_1 &= \{|a_3| - |a_1|\}, \\ b_2 &= \{|a_3| - |a_1|\} + \{|a_4| - |a_2|\}, \\ b_3 &= \{|a_3| - |a_1|\} + \{|a_4| - |a_2|\} + \{|a_5| - |a_3|\}, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

이때 어떤 자연수 m 에 대하여 a_m 과 a_{m+2} 의 부호가 같다면
(등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 로 두자.)

$$\begin{aligned} a_m < 0,\ a_{m+2} < 0 &: |a_{m+2}| - |a_m| = -2d \quad (d\text{는 공차!}) \\ a_m > 0,\ a_{m+2} > 0 &: |a_{m+2}| - |a_m| = 2d \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이고 첫째항은 음수이므로
공차 d 는 자연수이어야 한다.
정확히 말하면 여기선 d 가 정수인 것만 알 수 있지만,
b_n 이 최솟값을 가지려면 d 가 양수이어야 한다. 즉, d 는 자연수!

수열 $\{c_n\}$ 을

$$c_n = |a_{n+2}| - |a_n|$$

으로 두면 수열 $\{c_n\}$ 의 항은

$$\underset{=c_1}{-2d},\ \cdots,\ -2d,\ -2d,\ \boxed{},\ 2d,\ 2d,\ \cdots$$

a_n 의 부호가 바뀌는 지점에서
c_n 의 값을 관찰하는 게 핵심!

로 나아가는 수열이다.

Step 2 수열 $\{b_n\}$ 은 $n=5$ 에서 최솟값 -28 을 갖는다.

수열 $\{b_n\}$ 은 $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ 이고, $n=5$ 에서 최솟값 -28 을 가지므로
수열 $\{c_n\}$ 의 항을 관찰해보자.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$-2d,$	$-2d,$	$-2d,$	$-2d,$	$\boxed{k}$

에서 $-8d+k=-28$ $(=b_5)$ 가 되어야 한다. d 가 자연수이므로
케이스를 분류하여 생각해보자.

(1) $d=1$ 또는 $d=2$ 인 경우

$d=1$ 또는 $d=2$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 의 각 항은

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$-2,$	$-2,$	$-2,$	$-2,$	$\boxed{-20}$

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$-4,$	$-4,$	$-4,$	$-4,$	$\boxed{-12}$

과 같다. 이때 수열 $\{c_n\}$ 은 $c_n = |a_{n+2}| - |a_n|$ 이므로 공차가
1 또는 2 인 등차수열의 두 칸 건너뛰는 항의 차이에서 -20,
-12 와 같은 숫자는 나올 수 없다.

(2) $d=3$ 인 경우

$d=3$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 의 각 항은

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$-6,$	$-6,$	$-6,$	$-6,$	$\boxed{-4}$

와 같다. 이때 $c_5=-4$ 이므로

$$\begin{aligned} |a_7| - |a_5| = -4 \quad &\rightarrow \quad a_7 + a_5 = -4 \\ (\because\ a_7 \geq 0,\ a_5 \leq 0) \quad &\rightarrow \quad a_5 = -5,\ a_7 = 1 \end{aligned}$$

이며 이 경우 조건을 모두 만족시킨다.

(3) $d=4$ 인 경우

$d=4$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 의 각 항은

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ -8, & -8, & -8, & -8, & \boxed{4} \end{array}$$

와 같다. 이때 $c_5=4$ 이므로

$$|a_7|-|a_5|=4 \quad \rightarrow \quad a_7+a_5=4$$
$$(\because\ a_7\ge 0,\ a_5\le 0) \quad \rightarrow \quad a_5=-2,\ a_7=6$$

이다. 하지만 실제로 수열 $\{c_n\}$ 의 각 항은 나열해보면

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ -8, & -8, & -8, & \boxed{-4} & \boxed{4} \end{array}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 $n=4$ 에서 최솟값 -28 을 가져 모순이다.
(마찬가지 논리로 d가 5 이상의 자연수인 경우도 모순임을 도출할 수 있다.)

따라서 (1), (2), (3)에 의해 조건을 만족시키는 상황은
$d=3,\ a_5=-5$ 이므로 $a_{10}=10$ $(=a_5+5d)$ 이다.

$\therefore\ 10$

10

정답 49

Step 1 $a_m+a_{m+2}=362$ **를 만족시키는 경우**

모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} (a_n)^2-a_n & (a_n\text{ 이 홀수인 경우}) \\ a_n+(-1)^n & (a_n\text{ 이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

: a_n 의 홀/짝 여부도 중요하지만, n의 홀/짝 여부도 중요!

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_m+a_{m+2}=362$ 를 만족시키는 경우를 찾기 위해서 m, a_m 의 홀/짝 여부에 따라 케이스를 분류하자.

(1) m 이 홀수이고, a_m 이 홀수인 경우

$a_{m+1}=(a_m)^2-a_m$ $(\because\ a_m$ 이 홀수$)$
$a_{m+1}=a_m(a_m-1)$ 이므로 a_{m+1} 은 짝수!

$a_{m+2}=a_{m+1}+(-1)^{m+1}$ $(\because\ a_{m+1}$ 이 짝수$)$
$=(a_m)^2-a_m+1$ $(\because\ m$ 이 홀수$)$

이므로 $a_m+a_{m+2}=362 \rightarrow a_m=19$

(2) m 이 홀수이고, a_m 이 짝수인 경우

$a_{m+1}=a_m+(-1)^m$ $(\because\ a_m$ 이 짝수$)$
$=a_m-1$ $(\because\ m$ 이 홀수$)$
a_m 이 짝수이므로 $a_{m+1}=a_m-1$ 은 홀수!

$a_{m+2}=(a_{m+1})^2-a_{m+1}$ $(\because\ a_{m+1}$ 이 홀수$)$
$=(a_m)^2-3a_m+2$

이므로 $a_m+a_{m+2}=362 \rightarrow a_m=20$
(모든 항이 자연수이므로 $a_m=-18$ 은 불가능!)

(3) m 이 짝수이고, a_m 이 홀수인 경우

$a_{m+1}=(a_m)^2-a_m$ $(\because\ a_m$ 이 홀수$)$
$a_{m+1}=a_m(a_m-1)$ 이므로 a_{m+1} 은 짝수!

$a_{m+2}=a_{m+1}+(-1)^{m+1}$ $(\because\ a_{m+1}$ 이 짝수$)$
$=(a_m)^2-a_m-1$ $(\because\ m$ 이 짝수$)$

이므로 $a_m+a_{m+2}=362 \rightarrow$ 자연수 a_m 은 존재 X

(4) m 이 짝수이고, a_m 이 짝수인 경우

$a_{m+1}=a_m+(-1)^m$ $(\because\ a_m$ 이 짝수$)$
$=a_m+1$ $(\because\ m$ 이 짝수$)$
a_m 이 짝수이므로 $a_{m+1}=a_m+1$ 은 홀수!

$a_{m+2}=(a_{m+1})^2-a_{m+1}$ $(\because\ a_{m+1}$ 이 홀수$)$
$=(a_m)^2+a_m$

이므로 $a_m+a_{m+2}=362 \rightarrow$ 자연수 a_m 은 존재 X

(1) ~ (4)에 의해 $a_m+a_{m+2}=362$ 를 만족시키는 경우는

(1) $a_m=19$: m 이 홀수
(2) $a_m=20$: m 이 홀수

Step 2 역추적을 통해 (1), (2)를 만족시키는 a_1 의 값 추론!

[Step 1]의 (1), (2)를 만족시키는 a_m 을 기준으로 항의 값을 역추적해보자.

$$a_{n+1}=\begin{cases}(a_n)^2-a_n & (a_n\text{ 이 홀수인 경우})\\ a_n+(-1)^n & (a_n\text{ 이 짝수인 경우})\end{cases}$$

: a_n 의 항은 홀/짝이 번갈아서 등장하는게 포인트!

(1) $a_m=19$ 이고, m 이 홀수인 경우

$$\begin{array}{ccccc}\text{홀} & & \text{짝} & & \\ a_m & & a_{m-1} & & \\ 19 & — & 18 & — & \text{자연수 X}\end{array}$$

이므로 a_1 (1이 홀수!)의 값은 $a_1=19$ 만 가능하다.

(2) $a_m=20$ 이고, m 이 홀수인 경우

$$\begin{array}{ccccccccccc}\text{짝} & & \text{홀} & & \text{짝} & & \text{홀} & & \text{짝} & & \\ a_m & & a_{m-1} & & a_{m-2} & & a_{m-3} & & a_{m-4} & & \\ 20 & — & 5 & — & 6 & — & 3 & — & 4 & — & \text{자연수 X}\end{array}$$

이므로 a_1 (1이 홀수!)의 값은 $a_1=20,\ 6,\ 4$ 가 가능하다.

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

$$19+20+6+4=49$$

이다.

$\therefore\ 49$

11

정답 ③

11. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(a_n)^2 & (a_n\text{ 이 자연수이고, } a_n\text{ 이 } n\text{ 의 약수인 경우})\\ -a_n+10 & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

를 만족시키므로 $a_7=9$ 에서 역추적해보면

$$a_7=9\ \begin{cases} a_6=3 — a_5=7 — a_4=3 — \cdots — a_1=7 \\ a_6=1 \leftarrow \text{1이 6의 약수이므로 모순!}\end{cases}$$

따라서 a_1 의 값은 $a_1=7$ 이다.

$\therefore\ 7$

12

정답 ④

공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6=0$ 이므로

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$: 모두 양수!

즉,

$$\sum_{k=1}^{5}|a_k|=10+\sum_{k=1}^{10}a_k\ \rightarrow\ \sum_{k=6}^{10}a_k=-10$$

$$\rightarrow\ a_8=-2\quad \left(\because \sum_{k=6}^{10}a_k=5a_8\right)$$

이다.

$a_6=0$, $a_8=-2$에서 공차가 -1임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}|a_k| &= \sum_{k=1}^{5}|a_k|+\sum_{k=6}^{10}|a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=6}^{10}a_k \leftarrow \sum_{k=1}^{5}a_k=15,\ \sum_{k=6}^{10}a_k=-10 \\ &= 25\end{aligned}$$

이다.

$\therefore\ 25$

13

정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a로 두면

$$|a_2+1| \le |a_4| \quad \rightarrow \quad |-2a+1| \le |-8a| \quad \cdots ㉠$$
$$|a_5+1| \le |5a_2| \quad \rightarrow \quad |16a+1| \le |-10a| \quad \cdots ㉡$$

이므로 a의 값의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $a>0$인 경우

㉠에서 $|-2a+1|$의 부호를 판단하기 위해 $\frac{1}{2}$을 기준으로 a의 값의 범위를 다시 케이스 분류하면

① $0<a<\frac{1}{2}$인 경우

㉠ : $-2a+1 \le 8a \rightarrow a \ge \frac{1}{10}$

㉡ : $16a+1 \le 10a \rightarrow a \le -\frac{1}{6}$

$0<a<\frac{1}{2}$라는 전제 조건에 모순!

② $a>\frac{1}{2}$인 경우

㉠ : $2a-1 \le 8a \rightarrow a \ge -\frac{1}{6}$

㉡ : $16a+1 \le 10a \rightarrow a \le -\frac{1}{6}$

$a>\frac{1}{2}$라는 전제 조건에 모순!

(2) $a<0$인 경우

㉡에서 $|16a+1|$의 부호를 판단하기 위해 $-\frac{1}{16}$을 기준으로 a의 값의 범위를 다시 케이스 분류하면

① $-\frac{1}{16}<a<0$인 경우

㉠ : $-2a+1 \le -8a \rightarrow a \le -\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{16}<a<0$라는 전제 조건에 모순!

㉡ : $16a+1 \le -10a \rightarrow a \le -\frac{1}{26}$

② $a<-\frac{1}{16}$인 경우 (정답상황!)

㉠ : $-2a+1 \le -8a \rightarrow a \le -\frac{1}{6}$

㉡ : $-16a-1 \le -10a \rightarrow a \ge -\frac{1}{6}$

(1), (2)에 의해 가능한 경우는 $a \le -\frac{1}{6}$, $a \ge -\frac{1}{6}$을 동시에 만족시키는 상황이므로 $(a_1=)\ a=-\frac{1}{6}$이다.

따라서 $a_4=\frac{4}{3}\ (=a_1\times(-2)^3)$이다.

$\therefore\ \frac{4}{3}$

14

정답 ⑤

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{3}a_n+1 & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) & \cdots ㉠ \\ 3a_n & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) & \cdots ㉡\end{cases}$$

를 만족시키므로 $a_3+a_4+a_5=24$를 만족시키는 경우를 케이스를 분류하여 찾아보자.

(1) a_3가 3의 배수인 경우

a_3가 3의 배수이면

$$a_4=\frac{1}{3}a_3+1 \quad \begin{cases} a_5=\dfrac{1}{9}a_3+\dfrac{4}{3}\left(=\dfrac{1}{3}a_4+1\right) & : a_4\text{가 3의 배수인 경우} \\[2ex] a_5=a_3+3\,(=3a_4) & : a_4\text{가 3의 배수가 아닌 경우} \end{cases}$$

이므로

① a_4**가 3의 배수인 경우 (정답상황!)**

: $a_3+a_4+a_5=24 \rightarrow a_3=15$

② a_4**가 3의 배수가 아닌 경우**

: $a_3+a_4+a_5=24 \rightarrow \underline{a_3=\dfrac{60}{7}}$

a_3의 값이 자연수가 아니므로 모순!

(2) a_3가 3의 배수가 아닌 경우

a_3가 3의 배수가 아니면

$$a_4=3a_3\,(3\text{의 배수}) \rightarrow a_5=a_3+1\left(=\frac{1}{3}a_4+1\right)$$

이므로

$$a_3+a_4+a_5=24 \rightarrow \underline{a_3=\frac{23}{5}}$$

a_3의 값이 자연수가 아니므로 모순!

(1), (2)에 의해 $a_3=15$이다. 이를 활용하여 a_1의 값을 역추적해보면

a_3: 15
- ㉠ a_2: 42
  - ㉠ a_1: 123
  - ㉡ a_1: 14
- ㉡ a_2: 5
  - ㉠ a_1: 12

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $149\,(=123+14+12)$이다.

$\therefore\ 149$

15

정답 ③

$$-S_3=S_6=\sum_{n=1}^{6}\frac{a_m}{a_n}$$

에서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r로 두면

$$-S_3=S_6 \Leftrightarrow -\frac{a_1\times(r^3-1)}{r-1}=\frac{a_1\times(r^6-1)}{r-1}$$
$$\Leftrightarrow r^3=-2$$

$$S_6=\sum_{n=1}^{6}\frac{a_m}{a_n}$$
$$\Leftrightarrow a_1(1+r+\cdots+r^5)=r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+r^{m-6}$$
$$\Leftrightarrow a_1(1+r+\cdots+r^5)=r^{m-6}(1+r+\cdots+r^5)$$
$$\Leftrightarrow a_1=r^{m-6}$$

이때 $a_{12}=16$이므로

$$a_{12}=16 \rightarrow a_1\times r^{11}=16\,(=r^{12})$$
$$\rightarrow a_1=r$$

에서 $r=r^{m-6}\,(=a_1) \rightarrow m=7$

따라서 $m=7$이다.

$\therefore\ 7$

16

정답 ①

Step 1 수열 $\{a_n\}$ 의 특징 파악하기

수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1}-1)(a_n-6)=0 \rightarrow \underline{a_{n+1}=1 \text{ 또는 } a_n=6}$$

$a_n=1$ 또는 $a_n=6$ 이 아님에 주의!

어떤 자연수 m 에 대하여

$$a_m=k \text{ (단, } k\text{는 } 1\text{과 } 6\text{이 아닌 실수!)}$$

으로 가정하고, a_m 의 뒷 항을 추적해보면

$$\begin{array}{ccccccc} a_m & & a_{m+1} & & a_{m+1} & & \\ k & — & 1 & — & 1 & — & \cdots \\ & & (\because a_m \neq 6) & & (\because a_{m+1}\neq 6) & & \end{array}$$

임을 알 수 있다. 또한, a_m 의 앞 항을 역추적해보면

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_{m-2} & & a_{m-1} & & a_m \\ \cdots & — & 6 & — & 6 & — & k \\ & & (\because a_{m-1}\neq 6) & & (\because a_m \neq 6) & & \end{array}$$

임을 알 수 있다.

Step 2 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 을 만족시키는 상황

[Step 1]으로부터 수열 $\{a_n\}$ 의 항은

$$\underline{(6,\ 6,\ \cdots,\ 6)},\ p,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1,\ \cdots$$

6이 몇 개 있을지는 자유! 심지어는 하나도 없어도 됨!

처럼 진행된다는 사실을 알 수 있으므로 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 을 만족시키는 상황에서 a_{13} 의 값을 추론해보자.

(1) $a_{13}=1$ 인 경우 (정답상황!)

$a_{13}=1$일 때 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 을 만족시키는 상황이 존재하는지 확인하면 된다.

$$a_1=a,\quad a_2=a_3=\cdots=a_{25}=1$$

로 두면 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 에서 $a=64\ (>0)$이므로 조건을 만족시킨다는 사실을 알 수 있다.

(2) $a_{13}=6$ 인 경우

$a_{13}=6$일 때 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 을 만족시키는 상황이 존재하는지 확인하면 된다.

$$a_1=a_2=\cdots=a_{13}=6,$$
$$a_{14}=p,$$
$$a_{15}=a_{16}=\cdots=a_{25}=1$$

로 두면 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$에서 $p=-1\ (<0)$이다. 이때 $a_{14}=-1$이면 모든 항이 양수라는 조건에 모순이므로 $a_{13}=6$일 수 없다.

(3) $a_{13}=p$ 인 경우 (단, $(p-1)(p-6)\neq 0$) (정답상황!)

1과 6이 아닌 실수 p에 대하여 $a_{13}=p$일 때 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$ 을 만족시키는 상황을 찾아주면 된다.

$$a_1=a_2=\cdots=a_{12}=6,$$
$$a_{13}=p,$$
$$a_{14}=a_{16}=\cdots=a_{25}=1$$

이므로 $\sum_{k=1}^{25} a_k=88$에서 $p=4\ (>0)$이다. 즉, $a_{13}=4$도 조건을 만족시킨다.

(1), (2), (3)에 의해 조건을 만족시키는 모든 a_{13}의 값의 합은

$$1+4=5$$

이다.

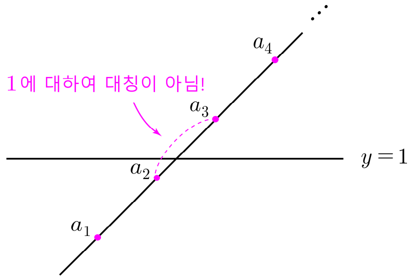
$\therefore\ 5$

17

정답 ②

Step 1 조건 (가) 해석

$a_p + a_q = 2$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 8 임을 해석하기 위해 다음과 같은 상황을 상상해보자.

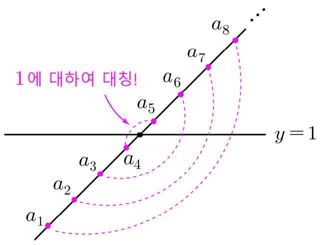


위와 같이 등차수열 $\{a_n\}$ 이 1 에 대하여 비대칭이라면

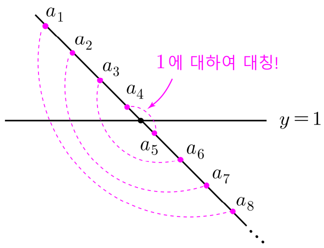
(두 항을 더했을 때 2가 나오는 상황이 발생하지 않는다면)

$a_p + a_q = 2$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$ 는 존재하지 않는다.

즉, $a_p + a_q = 2$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 8 이려면 다음과 같은 상황이 가능하다.



(공차가 양수인 경우)



(공차가 음수인 경우)

순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 8 이므로 두 자연수 p, q의 자리가 서로 바뀌는 것까지 고려하면

$$(p,\ q) = (1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$$
$$(8,\ 1),\ (7,\ 2),\ (6,\ 3),\ (5,\ 4)$$

Step 2 조건 (나) 해석

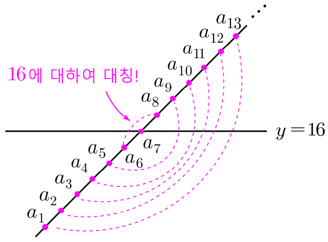
$a_p + a_q = 32$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 13 이라는 조건에서 조건 (가)와 뭔가 다르다는 것이 느껴져야 한다.

$a_p + a_q = 2 \ \rightarrow$ 순서쌍의 개수가 짝수$(=8)$

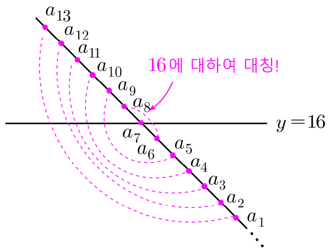
$a_p + a_q = 32 \ \rightarrow$ 순서쌍의 개수가 홀수$(=13)$

대칭이 되는 값을 항으로 가져야 함!

이므로 $a_p + a_q = 32$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 13 이려면 다음과 같은 상황이 가능하다.



(공차가 양수인 경우)



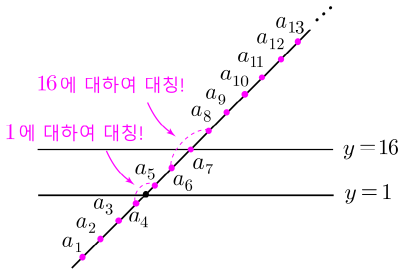
(공차가 음수인 경우)

순서쌍 $(p,\ q)$ 의 개수가 13 이므로 두 자연수 p, q의 자리가 서로 바뀌는 것까지 고려하면

$$(p,\ q) = (1,\ 13),\ (2,\ 12),\ \cdots,\ (6,\ 8),\ (7,\ 7)$$
$$(13,\ 1),\ (12,\ 2),\ \cdots,\ (8,\ 6)$$

Step 3 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 상황

[Step 1], [Step 2]에서 다뤘듯이 조건을 모두 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.



즉,

$$a_4 + a_5 = 2,\ \ a_7 = 16 \ \rightarrow \ d = 6$$

이므로 $a_{20} = 94\,(= a_7 + 13d)$ 이다.

$\therefore\ 94$

18

정답 8

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하고, $a_2 = k$라 하자.
조건 (가)에서

$$(a_2+1)\times(a_4+1)\times(a_6+1) = 30$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(kr^2+1)(kr^4+1) = 30 \qquad \cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\left(\frac{1}{a_2}+1\right)\times\left(\frac{1}{a_4}+1\right)\times\left(\frac{1}{a_6}+1\right) = \frac{15}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{kr^2}+1\right)\left(\frac{1}{kr^4}+1\right) = \frac{15}{4} \qquad \cdots ㉡$$

이때 ㉡의 형태를 바꿔주기 위해 통분하면

$$\left(\frac{1+k}{k}\right)\times\left(\frac{1+kr^2}{kr^2}\right)\times\left(\frac{1+kr^4}{kr^4}\right) = \frac{15}{4}$$

⤵ 분자를 모두 곱하면 ㉠의 형태가 나타난다!

$$\Leftrightarrow \ k^3r^6 = 8 \ (\because ㉠)$$

이므로 $a_4 = 2\ (=kr^2)$이다. 이를 다시 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\left(\frac{2}{r^2}+1\right)\times(2+1)\times(2r^2+1) = 30 \ \rightarrow \ 2r^4-5r^2+2=0$$
$$\rightarrow \ r^2 = 2,\ \frac{1}{2}$$

이때 등비수열 $\{a_n\}$ 공비가 1보다 크므로 $r=\sqrt{2}$이다.
따라서 $a_8 = 8\ (=a_4\times r^4)$이다.

$\therefore\ 8$

19

정답 11

Step 1 약수의 개수가 4인 자연수

어떤 자연수 n의 약수의 개수는 n을 소인수분해하여 판단할 수 있다. 서로 다른 소수 p, q에 대하여 자연수 n이

$$n = p\times q \quad \text{또는} \quad n=p^3$$

꼴로 표현되어야 자연수 n의 약수의 개수는 4가 될 수 있다.

즉,

$$n = 6\ (=2\times3),\ 8\ (=2^3),\ 10\ (=2\times5),\ 14\ (=2\times7),\ 15\ (=3\times5),$$
$$21\ (=3\times7),\ 22\ (=2\times11),\ 26\ (=2\times13),\ \cdots$$

의 약수의 개수가 4이다.

Step 2 $a_1\times a_2\times\ \cdots\ \times a_n = 384$가 되는 상황

2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n\text{의 약수의 개수가 } 4\text{가 아닐 때}) \\ 2 & (n\text{의 약수의 개수가 } 4\text{일 때}) \end{cases}$$

이므로

$$a_1\times a_2\times\ \cdots\ \times a_n = 384 \ \rightarrow \ \underline{k\times 2^p = 3\times 2^7}$$

(단, p는 약수의 개수가 4인 n의 개수)

즉, k가 3의 배수인 $k=3,\ 6,\ 9,\ 12$가 되는 상황이 중요하므로 케이스를 분류하여 관찰해보자.

(문제에서 $\sum_{k=1}^{12} f(k)$를 물었으므로 $k=12$까지만 생각해도 충분!)

(1) k가 3의 배수가 아닌 경우

k가 3의 배수가 아니면

$$k\times 2^p = 3\times 2^7$$

: k가 3을 소인수로 갖지 않으면 성립할 수가 없음!

를 만족시키는 상황이 발생하지 않으므로 $f(k)=0$

(2) $k=3$인 경우

$k=3$이면

$$k\times 2^p = 3\times 2^7 \ \rightarrow \ 2^p = 2^7$$

이므로 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 약수의 개수가 4인 자연수가 7개 있어야 한다. 즉, 가능한 n의 값은 $22\le n\le 25$이므로 $f(3)=4$

(3) $k=6$인 경우

$k=6$이면

$$k\times 2^p = 3\times 2^7 \ \rightarrow \ 2^p = 2^6$$

이므로 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 약수의 개수가 4인 자연수가 6개 있어야 한다. 즉, 가능한 n의 값은 21이므로 $f(6)=1$

(4) $k=9$ 인 경우

$k=9$ 이면

$$k\times 2^p = 3\times 2^7$$

: k가 3을 소인수로 2개 갖고 있으면 성립할 수 없음!

를 만족시키는 상황이 발생하지 않으므로 $f(9)=0$

(5) $k=12$ 인 경우

$k=12$ 이면

$$k\times 2^p = 3\times 2^7 \quad \rightarrow \quad 2^p = 2^5$$

이므로 $2, 3, \cdots, n$ 중에서 약수의 개수가 4인 자연수가 5개 있어야 한다. 즉, 가능한 n의 값은 $15 \le n \le 20$ 이므로 $f(12)=6$

(1)~(5)에 의해 $\sum_{k=1}^{12} f(k) = 11$ $(=4+1+6)$ 이다.

$\therefore$ 11

20

정답 119

Step 1 점화식 구조 관찰

주어진 점화식의 구조를 관찰해보자.

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 4 & (a_n > 0) \\ -a_1 \times a_n \text{ : 양수} & (a_n \le 0) \end{cases}$$

이때 첫째항은 양수이고, $a_n \le 0$ 일 때 $a_{n+1} = -a_1 \times a_n$ 이므로 a_{n+1} 의 값은 양수가 된다. 즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 항은

양수일 때 : 4씩 감소! (그러다가 결국 음수가 됨!)
음수일 때 : $-a_1$을 곱해 양수가 됨!
(그 후, 다시 4씩 감소해서 결국 음수가 됨!)

의 과정이 계속해서 반복되는 구조이다.

Step 2 -1 이 되는 상황에 대한 판단 ($\because$ $a_{16}=-1$)

수열 $\{a_n\}$ 의 항이 양수로 시작했다면, 4씩 계속 감소하므로 처음으로 **양이 아닌 정수**가 되는 순간은 $0, -1, -2, -3$ 만 가능하므로 케이스를 분류해보자.

(1) $a_1 = 4p$ 인 경우 (단, p는 자연수)

a_1	a_2	$\cdots$	a_{p+1}	a_{p+2}	$\cdots$
$4p$	$4p-4$	$\cdots$	0	0	$\cdots$

이므로 -1 이 되는 항이 등장하지 않는다.

(2) $a_1 = 4p-1$ 인 경우 (단, p는 자연수)

a_1	a_2	$\cdots$	a_{p+1}	a_{p+2}	$\cdots$
$4p-1$	$4p-5$	$\cdots$	-1	$4p-1$	$\cdots$

주기가 $p+1$ 인 구조가 계속해서 반복!

이므로 -1 이 되는 항이 등장한다. 이때 $a_{16}=-1$ 이려면 $p+1$ 이 16의 약수이면 되므로

$$p+1 = 16, 8, 4, 2, 1 \quad \rightarrow \quad \underbrace{p = 15, 7, 3, 1}_{p\text{는 자연수}}$$

(3) $a_1 = 4p-2$ 인 경우 (단, p는 자연수)

a_1	a_2	$\cdots$	a_{p+1}	a_{p+2}	$\cdots$
$4p-2$	$4p-6$	$\cdots$	-2	$8p-4$	$\cdots$

이므로 -1 이 되는 항이 등장하지 않는다.

(4) $a_1 = 4p-3$ 인 경우 (단, p는 자연수)

a_1	$\cdots$	a_{p+1}	a_{p+2}	$\cdots$	a_{4p}	a_{4p+1}
$4p-3$	$\cdots$	-3	$12p-9$	$\cdots$	-1	$4p-3$

주기가 $4p$ 인 구조가 계속해서 반복!

이므로 -1 이 되는 항이 등장한다. 이때 $a_{16}=-1$ 이려면 $4p$ 가 16의 약수이면 되므로

$$4p = 16, 8, 4, 2, 1 \quad \rightarrow \quad \underbrace{p = 4, 2, 1}_{p\text{는 자연수}}$$

따라서 (1), (2), (3), (4)에 의해

$a_1 = 4p-1$ 인 경우 : $p = 15,\ 7,\ 3,\ 1$

$a_1 = 4p-3$ 인 경우 : $p = 4,\ 2,\ 1$

이 가능하므로 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

119 $(=4\times(15+7+3+1+4+2+1)-4-9)$ 이다.

$\therefore\ 119$

21

정답 ③

세 수 $a_4,\ a_6,\ a_9$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a_6)^2 = a_4 \times a_9 \qquad \cdots\ ㉠$$

이때 $a_5 = 15$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때,

$a_6 = 15+d,$

$a_4 = 15-d,$

$a_9 = 15+4d$

로 나타낼 수 있다. 이를 ㉠에 대입하면

$$(15+d)^2 = (15-d)(15+4d) \ \rightarrow\ d(d-3) = 0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0 이 아니므로 $d=3$ 이다.

따라서 $a_8 = 24$ $(=a_5+3d)$ 이다.

$\therefore\ 24$

22

정답 ④

$$S_{n+4} - S_n = 2n \qquad \cdots\ ㉠$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면

$$S_5 - S_1 = 2 \ \rightarrow\ a_2+a_3+a_4+a_5 = 2 \quad \cdots\ ㉡$$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$S_6 - S_2 = 4 \ \rightarrow\ a_3+a_4+a_5+a_6 = 4 \quad \cdots\ ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하면 $d = \frac{1}{2}$ 이다. $(\because$ ㉢$=$㉡$+4d)$

이를 ㉡(또는 ㉢)에 다시 대입하여 계산하면 $a_1 = -\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \frac{n}{2} - \frac{5}{4}$ 이므로

$S_{10} = 15$ $\left(=\frac{10}{2}\times(a_1+a_{10})\right)$ 이다.

$\therefore\ 15$

23

정답 ④

23. 정답 ④

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$$

을 만족시키므로

$a_1 + 1 = a_1 + a_2 + a_3$

$a_2 + 2 = a_4 + a_5 + a_6$

$a_3 + 3 = a_7 + a_8 + a_9$

$\vdots$

$a_{27} + 27 = a_{79} + a_{80} + a_{81}$ $\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{81} a_n$ 을 구해야 하므로!

위의 식의 양변을 모두 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{81} a_n &= \sum_{n=1}^{27}(a_n+n) && \leftarrow \sum_{n=1}^{27} a_n = \sum_{n=1}^{9}(a_n+n)\\ &= \sum_{n=1}^{9}(a_n+n) + \frac{27\times 28}{2} && \leftarrow \sum_{n=1}^{9} a_n = \sum_{n=1}^{3}(a_n+n)\\ &= \sum_{n=1}^{3}(a_n+n) + \frac{9\times 10}{2} + \frac{27\times 28}{2} && \leftarrow \sum_{n=1}^{3} a_n = a_1+1\\ &= (a_1+1) + \frac{3\times 4}{2} + \frac{9\times 10}{2} + \frac{27\times 28}{2} && \leftarrow a_1 = 5\\ &= 435\end{aligned}$$

이다.

$\therefore\ 435$

24

정답 ①

$b_3 = b_8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$ 임을 활용하기 위해 주어진 식

$$b_{n+1} = b_n \times a_n$$

에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$을 대입해보면

$$\begin{aligned} &b_2 = b_1 \times a_1 && \cdots ①\\ &b_3 = b_2 \times a_2 && \cdots ②\\ &\vdots\\ &b_8 = b_7 \times a_7 && \cdots ⑦\end{aligned}$$

①, ②의 양변을 모두 곱하면

$$b_3 = b_1 \times (a_1 \times a_2) \qquad \cdots ㉠$$

①, ②, $\cdots$, ⑦의 양변을 모두 곱하면

$$b_8 = b_1 \times (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_7) \qquad \cdots ㉡$$

이때 $b_3 = b_8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$ 을 이용해 ㉠, ㉡을 정리하면

㉠ : $a_1 \times a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$ $(\because\ b_1 = 3)$

㉡ ÷ ㉠ : $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 \times a_7 = 1 \ \rightarrow\ a_5 = 1$

$a_1 \times a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$, $a_5 = 1$이므로 $r = 3^2$

(r : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비)

따라서

$$a_7 = 3^4 \ (= a_5 \times r^2)$$

$$b_{10} = 3 \ \underline{(= b_1 \times (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_9))}$$

$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_9 = (a_5)^9$

이므로 $\dfrac{a^7}{b_{10}} = 3^3$ 이다.

$\therefore\ 3^3$

25

정답 ③

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} n^2 \times \sqrt{a_n} & (\sqrt{a_n}\text{ 이 자연수인 경우}) \quad \cdots ㉠\\ 2a_n & (\sqrt{a_n}\text{ 이 자연수가 아닌 경우}) \quad \cdots ㉡\end{cases}$$

: $a_6 = 2^{10}$ (2의 거듭제곱)이므로 역추적해나갈때

$a_{n+1} = n^2 \times \sqrt{a_n}$ 인 경우는 n이 2의 거듭제곱일 때만 가능하다.

를 만족시키므로 $a_6 = 2^{10}$으로 부터 a_1의 값을 역추적해보면

$$\underset{2^{10}}{a_6} \xleftarrow{㉡} \underset{2^{9}}{a_5} \xleftarrow{㉠} \underset{2^{10}}{a_4} \xleftarrow{㉡} \underset{2^{9}}{a_3} \xleftarrow{㉠} \underset{2^{14}}{a_2} \ \begin{cases} \xleftarrow{㉠} \underset{2^{28}}{a_1}\\ \xleftarrow{㉡} \underset{2^{13}}{a_1}\end{cases}$$

이다. 따라서 모든 a_1의 값의 곱은 2^{41} $(= 2^{28+13})$ 이다.

$\therefore\ 2^{41}$

26

정답 ⑤

주어진 식을 정리하면

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{4}a_{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{5}a_na_k$$
$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)a_{n+1}-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)a_n$$

이므로

$$(a_1+a_2+a_3+a_4-1)a_{n+1}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)a_n$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1+a_2+a_3+a_4-1}\ (=r)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가

$$r=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1+a_2+a_3+a_4-1}$$

인 등비수열이다. $a_2=-4$이므로 이를 활용해 정리하면

$$r=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1+a_2+a_3+a_4-1}\ \leftarrow a_2=-4$$
$$=\frac{\left(-\frac{4}{r}\right)+(-4)+(-4r)+(-4r^2)+(-4r^3)}{\left(-\frac{4}{r}\right)+(-4)+(-4r)+(-4r^2)-1}$$

에서 $-r=-\frac{4}{r}\ \rightarrow\ r=-2$ ($\because\ a_1>0$이므로 공비는 음수!)

따라서 $a_7=128\ (=a_2\times r^5)$이다.

$\therefore\ 128$

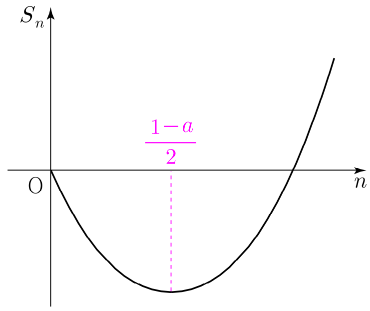
27

정답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n으로 두면, $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 S_n을

$$S_n=n^2+(a-1)n\ \leftarrow a_1=a$$

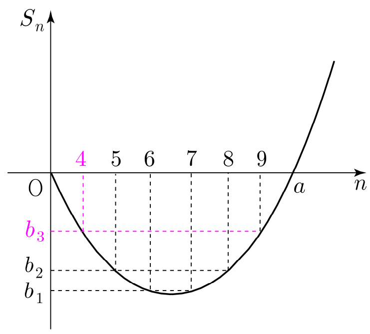
으로 두자.



이때 $S_4=b_3$(S_n의 항 중 세 번째로 작은 값이 S_4)인 상황에서 $a_8\ (=a+14)$의 최댓값과 최솟값을 구해주면 되므로 a의 최댓값과 최솟값을 관찰해주면 된다. 즉, S_n의 대칭축인 $n=\frac{1-a}{2}$가 최대/최소가 되는 순간을 관찰해주자.

(1) $n=\frac{1-a}{2}$가 최대가 되는 순간

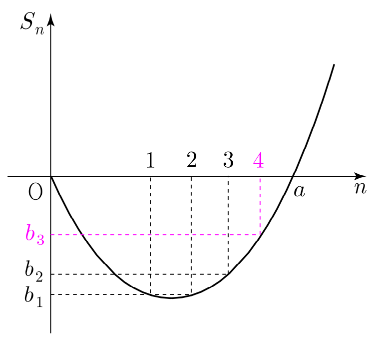
$S_4=b_3$를 만족시키면서 대칭축이 가장 커지는 순간은 $\frac{1-a}{2}=\frac{13}{2}$가 되는 순간이다.



즉, a의 최솟값은 -12이다.

(2) $n=\frac{1-a}{2}$가 최소가 되는 순간

$S_4=b_3$를 만족시키면서 대칭축이 가장 작아지는 순간은 $\frac{1-a}{2}=\frac{3}{2}$가 되는 순간이다.



즉, a의 최댓값은 -2이다.

(1), (2)에 의해 a의 최댓값과 최솟값은 각각 -2, -12이므로 $a_8\ (=a+14)$의 최댓값과 최솟값의 합은 14이다.

$\therefore\ 14$

28

정답 168

Step 1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차에 대한 정보

조건 (가)에 의해 $a_4=9$이고, 첫째항이 자연수이므로
만약 d가 양수라면

$a_1=(9$보다 작은 자연수), $d=$(양수)

이므로 $\{a_n\}$의 모든 항은 양수가 된다. 이때 조건 (나)에서

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_k+a_{k+1}=a_k+a_{k+1}+2 \quad \text{(모순!)}$$

가 성립할 수 없으므로 d는 **음수**임을 알 수 있다. 또한 첫째항이 자연수이므로 $9-3d=$(자연수)가 성립해야 한다!

Step 2 조건 (나)를 바탕으로 케이스 분류

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$

를 만족시키는 자연수 k가 존재하므로 a_k, a_{k+1}의 값에 부호에 따라 케이스를 분류해보자.

(1) $a_k>0$, $a_{k+1}>0$인 경우

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_k+a_{k+1}=a_k+a_{k+1}+2 \quad \text{(모순!)}$$

(2) $a_k<0$, $a_{k+1}<0$인 경우

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow\ -(a_k+a_{k+1})=-(a_k+a_{k+1})+2 \quad \text{(모순!)}$$

(3) $a_k<0<a_{k+1}$인 경우

[Step 1]에서 공차 d가 음수임을 확인했으므로
$a_k<0<a_{k+1}$(증가)를 만족시키는 상황은 발생하지 않는다.

(4) $a_{k+1}<0<a_k$인 경우

① $|a_k|>|a_{k+1}|$인 경우

$a_k+a_{k+1}>0$이므로

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_k-a_{k+1}=a_k+a_{k+1}+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_{k+1}=-1$$

이때 $|a_k|>|a_{k+1}|$이므로 $a_k>1$
즉, $d<-2$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서 $a_4=9$이므로

$$a_4+(k-3)d=\underbrace{-1}_{(=a_{k+1})} \rightarrow (k-3)d=-10 \ \cdots \text{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡과 $9-3d=$(자연수)를 동시에 만족시키는 d의 값은 (k가 자연수임을 활용!)

$k=4$인 경우 : $d=-10$
$k=5$인 경우 : $d=-5$
$k=6$인 경우 : $d=-\frac{10}{3}$

이 가능하다.

② $|a_k|<|a_{k+1}|$인 경우

$a_k+a_{k+1}<0$이므로

$$|a_k|+|a_{k+1}|=|a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_k-a_{k+1}=-a_k-a_{k+1}+2$$
$$\Leftrightarrow\ a_k=1$$

이때 $|a_k|<|a_{k+1}|$이므로 $a_{k+1}<-1$
즉, $d<-2$ ⋯ ㉢

조건 (가)에서 $a_4=9$이므로

$$a_4+(k-4)d=\underbrace{1}_{(=a_k)} \rightarrow (k-4)d=-8 \ \cdots \text{㉣}$$

따라서 ㉢, ㉣과 $9-3d=$(자연수)를 동시에 만족시키는 d의 값은 (k가 자연수임을 활용!)

$k=5$ 인 경우 : $d=-8$
$k=6$ 인 경우 : $d=-4$
$k=7$ 인 경우 : $d=-\frac{8}{3}$

이 가능하다.

③ $|a_k| = |a_{k+1}|$ **인 경우**
$a_k+a_{k+1}=0$ 이므로

$$|a_k|+|a_{k+1}| = |a_k+a_{k+1}|+2$$
$$\Leftrightarrow \quad a_k-a_{k+1}=2$$
$$\Leftrightarrow \quad d=-2$$

이때 $d=-2$ 이면 $9-3d=$(자연수)를 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 공차 d의 값은

$d=-10,\ -5,\ -\frac{10}{3},\ -8,\ -4,\ -\frac{8}{3},\ -2$: 7개!

이므로 모든 a_1 $(=9-3d)$ 의 값의 합은

$9\times7-3\times$(모든 d의 값의 합)$=168$

이다.

$\therefore\ 168$

29

정답 189

Step 1 수열 $\{a_n\}$에 대한 정보 파악

모든 자연수 n에 대하여

$S_n=2|a_n|-3^m$ $\cdots$ ㉠

이 성립하므로 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$(a_1=)\ S_1=2|a_1|-3^m \ \rightarrow\ |a_1|=3^m$ $(\because\ a_1>0)$

㉠에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n=)\ S_n-S_{n-1}=\left(2|a_n|-3^m\right)-\left(2|a_{n-1}|-3^m\right)$$
$$\Leftrightarrow\ 2|a_n|-a_n=2|a_{n-1}|$$

이때 이를 모든 자연수 n에 대하여 성립한다고 확장시키기 위해 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$2|a_{n+1}|-a_{n+1}=2|a_n|$$
$$\Leftrightarrow\ a_{n+1}=\begin{cases} 2|a_n| & (a_{n+1}\geq 0) \\ -\frac{2}{3}|a_n| & (a_{n+1}<0) \end{cases}$$

즉, 수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 $|a_1|=3^m$이고, 그 이후로는 2 또는 $\frac{2}{3}$이 곱해지는 형태의 수열이다.

Step 2 a_{m+5}을 통해 m의 값 결정

$|a_{m+5}|$는 $|a_1|$에 2 또는 $\frac{2}{3}$만 곱해져서 만들어진 값이므로

$$|a_{m+5}| = |a_1|\times 2^a\times\left(\frac{2}{3}\right)^b \quad (\text{단, } a+b=m+4)$$

이때 $a_{m+5}=128\ (=2^7)$, $a_1=3^m$ 이므로
(각각 오직 2, 3만 소인수로 갖는다!)

$$2^7=3^m\times2^a\times\left(\frac{2}{3}\right)^b \ \rightarrow\ a=4,\ \ b=3,\ \ m=3$$

$a+b=7,\ b=m,\ a+b=m+4$을 연립해서 얻은 결과!

즉, $a_1=3^3$ 이므로 S_3의 최댓값은

$$a_1=3^3,\ \ a_2=2\times3^3,\ \ a_3=2^2\times3^3$$

: 모두 2만 곱해졌을 때가 최대!

가 되는 순간에 발생한다. 따라서 S_3의 최댓값은 189 이다.

$\therefore\ 189$

30

정답 365

Step 1 주어진 부등식 해석

모든 자연수 n에 대하여 성립하는 두 부등식

$$a_n \geq n^2 - n \quad \cdots ㉠$$
$$a_n \times a_{n+1} > 90 \quad \cdots ㉡$$

을 활용하기 위해 식을 변형하면

$$a_n \geq n(n-1) \ \rightarrow \ a_{n+1} \geq n(n+1)$$

이므로 $a_n \times a_{n+1} \geq n^2(n^2-1) \quad \cdots ㉢$

이때 ㉢에 $n=4$를 대입하면 $a_4 \times a_5 \geq 240$이므로 $n \geq 4$인 자연수 n에 대해선 ㉠만 만족시키면 ㉡도 필연적으로 만족시킨다는 사실을 알 수 있다.

Step 2 $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최솟값 구하기

$\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최솟값을 구하기 위해 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 최소가 되는 순간을 관찰해보자.

(1) $n \geq 5$인 경우

$n \geq 5$이면 ㉠만 만족시키면 되므로 각 항이 최소가 되는 순간은 $a_n = n(n-1)$일 때이다.

(2) $n \leq 4$인 경우

$n \leq 4$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 상황을 고려해야 한다. 예를 들어, a_3, a_4를 관찰하면

$$a_3 \geq 6, \quad a_4 \geq 12, \quad a_3 \times a_4 > 90$$

을 모두 만족시켜야 하므로

$$a_3 = 6, \quad a_4 = 12 \ : a_3 \times a_4 > 90\text{을 만족시키지 않음!}$$

로 결정할 수 없다. a_3의 값을 6부터 키우면서 $a_4 \geq 12$, $a_3 \times a_4 > 90$를 만족시키는 상황을 찾아보면

a_1 (≥ 0)	a_2 (≥ 2)	a_3 (≥ 6)	a_4 (≥ 12)	
6	16	6	16	$\rightarrow \sum_{k=1}^{4} a_k = 44$
7	13	7	13	$\rightarrow \sum_{k=1}^{4} a_k = 40$
8	12	8	12	$\rightarrow \sum_{k=1}^{4} a_k = 40$
9	11	9	11	$\rightarrow$ 모순!

(1), (2)에 의해 $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최솟값은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=5}^{10} a_k$$
$$= 40 + \sum_{k=5}^{10} k(k-1)$$
$$= 350 \ (=m)$$

이고, 이때 a_1의 값은 $7\,(=p)$ 또는 $8\,(=q)$이다.

따라서 $m+p+q=365$이다.

$\therefore$ 365