

직전 보강



어수강 수학

[2024학년도 2학년 1학기 과천중앙고 수학 I 중간고사]

[문제1] 1이 아닌 양수 a, b 에 대하여 $\log_a a + \log_b \frac{1}{b}$ 의 값은?¹ [3.9점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

[문제2] $\sqrt{2^3} \div \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[4]{2}$ 의 값은?² [4.0점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[문제3] $\log_{(a+3)} (-a^2 - 5a + 6)$ 이 정의되기 위한 정수 a 의 개수는?³ [4.1]점

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[문제4] 정의역이 $\{x|a \leq x \leq a+5\}$ 일 때, 함수 $3^{2-x} + 1$ 의 최댓값은 82, 최솟값은 m 이다. $a+m$ 의 값은?⁴ [4.2점]

- ① -2 ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[문제5] $\tan \theta = \sqrt{\frac{1-a}{a}}$ ($0 < a < 1$)일 때, $\frac{1}{\sin \theta - 1} - \frac{1}{\sin \theta + 1}$ 의 값은?⁵ [4.3점]

- ① $-\frac{2}{a}$ ② $-\frac{a}{2}$ ③ $\frac{a}{2}$ ④ a ⑤ $2a$

[문제6] 좌표평면에서 직선 $y = x + 5$ 가 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 하고 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\sin \theta \times \cos \theta$ 의 값은? (단, $0 \leq \theta < 2\pi$ 이고 O는 원점이다.)⁶ [4.5점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{6}{13}$ ③ $\frac{6}{13}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[문제7] 어떤 치료용 주사액을 혈관에 주입하고 t 시간 후에 혈액 속에 남아 있는 양이 처음 주사한 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t$ 이다. 혈액 속에 남아 있는 양이 처음 주사한 양의 $\frac{1}{81}$ 보다 적으면 이 주사액의 약효가 없다고 판단할 때, 이 주사액의 약효의 최대 지속 시간은?⁷ [4.5점]

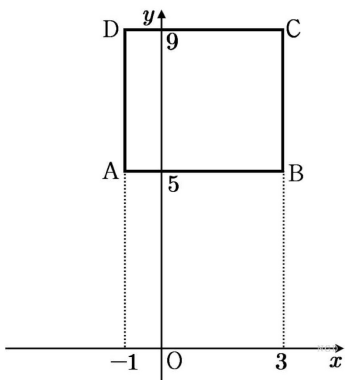
- ① 10시간 ② 11시간 ③ 12시간 ④ 13시간 ⑤ 14시간

[문제8] 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $n(n-5)$ 의 n 제곱근 중에서 서로 다른 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $2 \leq n \leq 7$ 일 때, $f(n) > f(n+1)$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은?⁸ [4.7점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

[문제9] 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 함수 $y = a^{x+3} + 1$ 의 그래프가 정사각형 ABCD와 만나는 위한 상수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\left(\frac{M}{m}\right)^6$ 의 값은? (단, a 는 1이 아닌 양수이다.)⁹ [4.8점]

- ① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256



[문제10] 조류 발전은 빠른 유속을 이용하여 전기를 생산하는 방식으로 어느 조류 발전기는 유속이 $\sqrt{3}\text{m/s}$ 이상일 때 발전이 가능하다고 한다. 이 조류 발전기가 설치된 어느 지역에서 시각이 x 시일 때, 유속을 $f(x)\text{m/s}$ 라고 하면

$$f(x) = 2 \sin \frac{\pi}{12} x \quad (0 \leq x < 24)$$

라고 한다. 조류 발전이 가능한 시간은 하루에 몇 시간 동안인가?¹⁰ [4.9점]

- ① 2시간 ② 4시간 ③ 6시간 ④ 8시간 ⑤ 10시간

[문제11] 어느 태블릿 컴퓨터의 가격은 전월 대비 매월 일정한 비율로 하락하여 현재 가격이 5개월 전보다 20% 하락하였다. 매월 이와 같은 비율로 태블릿 컴퓨터의 가격이 하락한다고 할 때, 현재 100만 원인 태블릿 컴퓨터의 가격이 50만 원 이하가 되려면 최소한 몇 개월이 지나야 하는가? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)¹¹ [4.9점]

- ① 11개월 ② 12개월 ③ 13개월 ④ 14개월 ⑤ 15개월

[문제12] $k > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 두 실수 k, θ 에 대하여 $\sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{4} + \frac{1}{4k^2}$ 이 성립할 때,

$\frac{k}{\tan \theta}$ 의 값은?¹² [5.0점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[문제13] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x) = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x - 1)$ 이다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$, $f(x + 8) = f(x)$ 이다.

$-10 < x < 10$ 일 때, 방정식 $|f(x) - f(x + 2)| = 4$ 의 모든 근의 합은?¹³ [5.2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[문제14] 방정식 $\log(x + y) + 2 \log y = \log(50 - x - y)$ 을 만족시키는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 모든 x 의 값의 합은?¹⁴ [5.3점]

- ① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

[문제15] 방정식 $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - k = 0$ 이 실근을 가지도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 $\alpha \leq k \leq \beta$ 라고 할 때, $\beta - \alpha$ 의 최댓값은? (단, α 와 β 는 실수이다.)¹⁵ [5.3점]

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

[문제16] 직선 $y = x - 2$ 가 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프와 만나는 점을 (x_1, y_1) , 직선 $y = x + 2$ 가 함수 $y = \log_5(-x)$ 의 그래프와 만나는 점을 (x_2, y_2) 라 하자. 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.¹⁶ [5.4점]

- ㉠ $|x_1| > |x_2|$ ㉡ $x_1y_1 < x_2y_2$ ㉢ $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -1$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[문제17] 점 $(3, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선 l 이 함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프와 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 점 $(3, 0)$ 은 선분 AB의 중점이다. 점 A의 x 좌표를 구하시오. (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이다.)¹⁷ [5.0점]

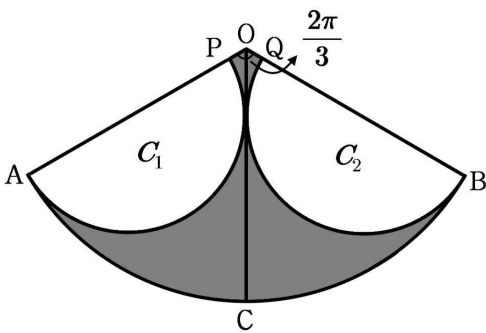
[문제18] 함수 $y = -x + k$ 의 그래프가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 A, 함수 $y = -x + k$ 의 그래프가 함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 B, 함수 $y = x - k$ 의 그래프가 함수 $y = -2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 점 A의 x 좌표를 n 이라 하자. 다음 조건이 모두 참일 때, $n + k$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)¹⁸ [6.0점]

(가) n 은 자연수이다.

(나) 삼각형 ABC의 넓이는 40이다.

[문제19] 자연수 n 에 대하여 $-n\pi \leq x \leq n\pi$ 일 때, 방정식 $n\pi \sin 8nx - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(1) + f(3) + f(5)$ 의 값을 구하시오.¹⁹ [7.0점]

[문제20] 반지름의 길이가 $2 + \sqrt{3}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 두 선분 OA, OB 위의 각각의 점 P, Q에 대하여 $\overline{PA} = \overline{QB}$ 이다. 호 AB의 중점 C에 대하여 선분 OC에 접하고, 두 선분 PA, QB를 각각 지름으로 하는 두 반원 C_1, C_2 가 있다. 이때 부채꼴 OAB의 넓이를 S , 반원 C_1, C_2 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $S - (S_1 + S_2) = \frac{p + q\sqrt{3}}{3}\pi$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 정수이다.)²⁰ [7.0점]



어수강 수학

- ① 홈페이지 : www.soogangmath.com
- ② 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath
- ③ 블로그 : blog.naver.com/math-fish
- ④ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr
- ⑤ 전자도서
 - 1. 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀
 - 2. 당신이 수학을 망치는 N가지 이유
- ⑥ 수업 및 교육상담 문의 : www.soogangmath.com/inquire

정답

¹ ①

² ④

³ ②

⁴ ③

⁵ ①

⁶ ②

⁷ ③

⁸ [문제8] ④

⁹ ④

¹⁰ ②

¹¹ ⑤

¹² [문제12] ③

¹³ [문제13] ③

¹⁴ [문제14] ①

¹⁵ [문제15] ⑤

¹⁶ [문제16] ②

¹⁷ $3 + 2\sqrt{2}$

¹⁸ [문제18] 19

¹⁹ [문제19] 557

²⁰ [문제20] 20