수학 22번 집중공략서

T A R G E T 2 2

모노모노 지음

들어가며

2022학년도 수능부터 수학 영역에 공통(22) + 선택(8) 체제가 도입됨에 따라, 기존에 있던 가/나형 분리 체제는 역사 속으로 사라졌습니다. 이와 함께 두드러진 현상이 '최고난도 문제의 출제 배제'입니다.

기존 가/나형 체제에서는 문제 번호만 대도 N수생들의 트라우마를 유발할 만한 고난도 문제들이 빈출되었습니다. 이과생들이 응시했던 '가'형의 171130, 181121, 181130, 190621 등이 악명높았고, 문과생들이 응시했던 '나'형의 181130 역시 이들 못지않게 어려웠습니다.

그러나 통합수능 체제가 시행되며 최고난도 문제 번호인 22번, 30번에 출제되는 문제들의 난이도가 급락하였고, 수능 수험시장에서도 최고난도 문제를 대비하기 위한 컨텐츠는 난이도 너프를 먹거나 자취를 감추었습니다.

하지만 고1~고2 학력평가에는 최고난도 문제 배제가 적용되지 않아, 아직도 엄청난 난도의 문제가 출제되기도 합니다. 당장 2024년 9월 시행 학력평가 고1/고2 30번은 각 학년에서 30번 문제가 어디까지 갈 수 있는지 보여주는 사례라고 할 수 있습니다.

여러분을 위해 준비한 『TARGET 22』는, 2024년 시행 고2 학력평가 22번 문제(고1 범위인 3월 제외)들을 해설하는 기출분석서입니다. 대략 높은 2등급 정도의 학생의 눈높이에 맞추어 작성되었습니다.

페이지를 넘기면 문제와 넓은 여백이 있고, 그 다음 페이지에 해설이 있는 구조입니다. Intuition에서는 문제의 '꼬라지'를 보자마자 갖춰야 할 직관적 태도를, Breakdown에서는 문제의 조건 해석을, Grind에서는 답을 찾기 위한 계산을 제시합니다. Review에서는 문제에 대한 총평을 실었습니다. 마지막으로 부록에는 학습한 문제들을 다시 한번 담고, 함께 학습하기 좋은, 비슷한 난이도의 자작 문제들을 담았습니다.

이 얇은 교재가 여러분이 2025년이라는 인외마경을 헤쳐나가는 데 좋은 길잡이가 되기를 더없이 바랍니다.

2025. 04. 01.
모노모노 드림.

2024년 9월 고2 학력평가 22번

1. 방정식 $3^{2x-1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. 〔3점〕

2024년 9월 고2 학력평가 22번 - 해설

1. 방정식 $3^{2x-1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

Intuition

지수방정식이고, 주관식이니 답은 깔끔하게 나오겠네요. 일단 정석적으로 접근해보고, 잘 안되면 적당한 자연수를 대입해보는 경우도 감안해야겠습니다.

Breakdown

x가 실수라고 했으니 좌변은 양수네요. 로그를 씌울 수 있겠습니다. 마침 좌변은 아예 지수의 밑이 3이고, 우변도 3의 거듭제곱 꼴의 수가 나왔습니다. 밑이 3인 로그를 씌워야겠네요.

Grind

양변에 밑이 3인 로그를 씌워주면, $\log_3(3^{2x-1})=\log_3 27$이고, 27은 3의 세제곱이므로 로그의 성질에 의해 $2x-1=3$입니다. 고로 정답은 $x=2$가 되겠네요.

Review

첫 문제인 만큼 22번 중에서는 쉬운 문제로 준비했습니다. 시험 자체는 고2 역사상 최고난도로 출제되었지만, 22번은 난이도에 비해 쉬운, 그저 ‘겉보기 등급’으로 겁주는 문제라고 할 수 있겠습니다.

과거 기출에는 $2^x=x+2$의 해를 묻는 문제가 출제된 적 있습니다. $x=2$가 한 해임을 ‘직관적으로’ 알 수는 있지만 그것이 양수 범위에서 유일한 해임을 논증이 불가능하고, 값을 구하는 과정도 그저 ‘찍기’에 가까워서 이런 ‘지수 = 다항’ 꼴의 문제는 다시 출제되지 않을 가능성이 큽니다. 다만, 위 문제에서 좌변이 단조 증가함수 개형임을 기억하며, 적당히 자연수를 밀어넣어 답을 추측해볼 수 있겠다는 자세는 반드시 챙겨가야 합니다.

2024년 고2 10월 학력평가 22번

2. 방정식 $(\sqrt{3})^{x-2}=27$을 만족하는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

2024년 고2 10월 학력평가 22번 - 해설

2. 방정식 $(\sqrt{3})^{x-2}=27$을 만족하는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

Intuition

좌변이 좀 짜증나긴 하지만 어쨌든 지수방정식이고, 주관식이니 답은 깔끔하게 나오겠습니다. 여차하면 수치대입으로 뚫어내겠다는 자세, 잊지 말도록 합시다.

Breakdown

x가 실수라고 했으니 좌변은 양수네요. 로그를 씌울 수 있겠습니다. 마침 좌변은 아예 지수의 밑이 3의 거듭제곱근이고, 우변도 3의 거듭제곱 꼴의 수가 나왔습니다. 밑이 3인 로그를 씌워야겠네요.

Grind

양변에 밑이 3인 로그를 씌워주면, $\log_3\{(\sqrt{3})^{x-2}\}=\log_3 27$이고, 27은 3의 세제곱이고 $\sqrt{3}$은 3의 제곱근임을 상기하면 $\frac{x-2}{2}=3$입니다. 정답이 $x=8$임을 알 수 있습니다.

Review

지난 문제에서 한 번 정도 더 꼬아놓은 문제라고 할 수 있겠습니다. 좌변에 $\sqrt{3}$을 줘서 압박을 좀 빡빡하게 걸었네요. 그래도 22번 문제치곤 평이했습니다.

2024년 고2 6월 학력평가 22번

3. $(5^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}$의 값을 구하시오. [3점]

2024년 고2 6월 학력평가 22번 - 해설

3. $(5^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}$의 값을 구하시오. [3점]

Intuition

앞까지와 달리 지수방정식이 아닌, 순수 지수법칙 문제입니다. 고등학교 범위에서 '확장된 지수법칙의 범위'를 잊지 맙시다. 밑은 양의 실수, 지수는 실수네요.

$2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이란 값은 어디서 많이 봤습니다. 이차방정식의 켤레근 형태네요. 이를 상기하며 $\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$으로 놓고, 문제에서 구하라고 한 값인 $(5^{\alpha})^{\beta}$을 X라고 놓아 봅시다.

Breakdown

조건을 아무것도 안 줘서 달리 해석할 게 없습니다.

Grind

α와 β를 두 실근으로 가지고, 최고차항의 계수가 1인 이차방정식을 구해 봅시다. $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 즉, $\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$입니다. 전개하면 $x^2-4x+1=0$ 이네요. 즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하면 $\alpha\beta=1$임을 알 수 있어요. 따라서 $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$으로 놓을 수 있습니다.

$(5^{\alpha})^{\beta}=X$라고 놓고, 양변을 $\dfrac{1}{\beta}$제곱 하면 $5^{\alpha}=X^{\frac{1}{\beta}}$입니다. $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$이므로 $5^{\alpha}=X^{\alpha}$입니다. 만약 지수의 조건을 제한하지 않았다면 여기서 답이 두 개가 나옵니다. 다행히 우리는 에서 이미 밑을 양의 실수로 제한하였습니다. 따라서 $X=5$입니다.

Review

시험 자체는 평이했지만, 이 문제는 고2 학력평가 22번 중 역사상 최고난도로 평가받는 유명한 문제입니다. 학생들이 아무 생각 없이,

$$(5^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}=5^{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})}=5^4=625$$

라는 잘못된 계산을 시행했기 때문입니다. 지수법칙은 우리의 일반적인 상식과 다르게 작동하는 체계이므로 관성에 젖어 원숭이처럼 계산하지 말고, 극도의 주의를 기울이는 태도를 갖추도록 합시다.

1. 방정식 $3^{2x-1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. 〔3점〕

1-1. 방정식 $3^{x}(9^{x-1}+1)=6$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

2. 방정식 $(\sqrt{3})^{x-2}=27$을 만족하는 실수 x의 값을 구하시오. 〔3점〕

2-1. $z\bar{z}=1$을 만족하는 복소수 z에 대해, $z^n+(\bar{z})^n=-2$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 3이다. $|i(z-\bar{z})|=k$라 할 때, $k^m<9$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

3. $(5^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}$의 값을 구하시오. [3점]

3-1. 두 자연수 a와 b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt[a]{\dfrac{b}{a}} < \sqrt[b]{\dfrac{a}{b}}$
(나) 집합 $\{a^b, a^{2b}, 64\}$의 모든 원소는 등비수열을 이룬다.

가능한 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

빠른 정답

1	2	2	8	3	5
1-1	1	2-1	3	3-1	2