제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+x$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2-8x+1$

$f'(3)=4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4=2a_3+3a_2$$

를 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는? [3점]

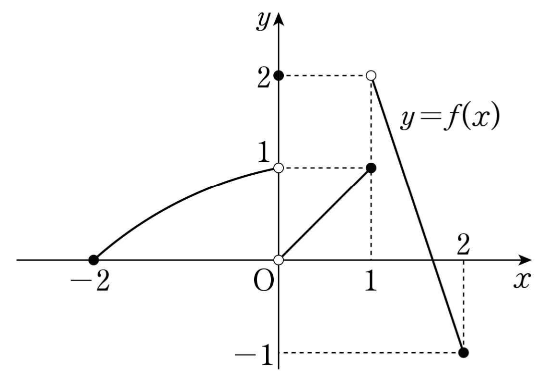
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\div ar^2$ $r^2=2r+3$

$(r-3)(r+1)=0$

$r=3,-1$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)-\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$1-2$

5. 함수 $f(x)=(x^2+x)(2x^2-x)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x)=(2x+1)(2x^2-x)+(x^2+x)(4x-1)$

$f'(1)=3+6=9$

6. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{3}$ 일 때, $\sin\theta\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

$-\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$st=\frac{s^2}{c}=\frac{1-c^2}{c}=\frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}}=-\frac{8}{3}$

7. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=x^3+x$ 이고 $f(0)=-1$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-1$

$f(2)=4+2-1=5$

8. 두 실수 $a=(\log 3)^2-(\log 2)^2$, $b=\log_6 10$에 대하여 10^{ab}의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$a=(\log 3+\log 2)(\log 3-\log 2)=(\log 6)(\log \frac{3}{2})$

$ab=(\log_6 10)(\log_{10} 6)(\log \frac{3}{2})=\log \frac{3}{2}$

$\therefore\ 10^{ab}=10^{\log \frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

9. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

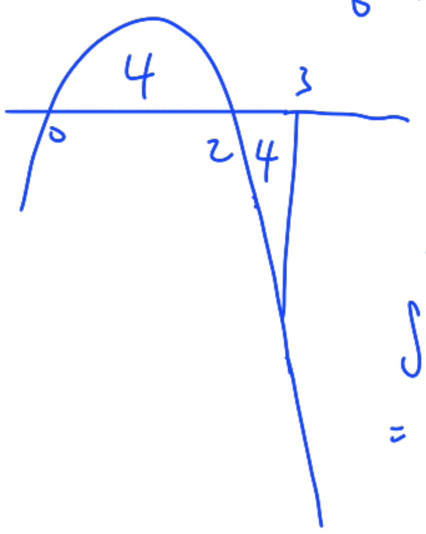
$$v(t)=-3t^2+6t$$

이다. 양수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

$-3t(t-2)$

$\frac{3}{6}(2)^3=4$



$a=3$

$x(t)=-t^3+3t^2$

$x(6)=-216+108=-108$

$\int_0^6 |v(t)|dt$

$=4+4+108=116$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases}10 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ -19 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{3n} a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$\underbrace{10\ \ 10\ \ -19}_{1}\ \ \underbrace{10\ \ 10\ \ -19}_{1}\ \ \cdots$

$S_{3n}=n$

$S_{3n-2}=n+9$

$S_{3n-1}=n+19$

$n=3p-2 \rightarrow p+9=3p-2,\ p=\frac{11}{2}\ (\times)$

$n=3p-1 \rightarrow p+19=3p-1,\ p=10$

$n=29$

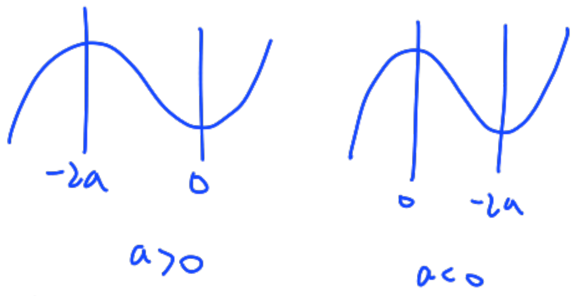
11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -40일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① -24　② -20　③ -16　④ -12　⑤ -8

$f'=3x^2+6ax=3x(x+2a)$



$f(0)=4a=-40$ (x)

$f(-2a)=-8a^3+12a^3+4a=-40$

$a^3+a+10=0$

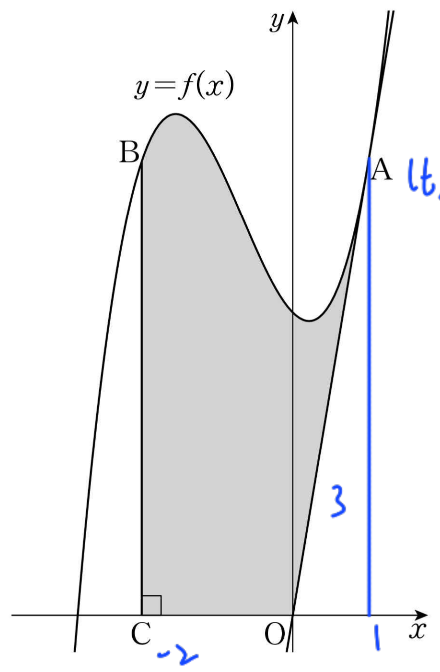
$(a+2)(a^2-2a+5)=0$

$a=-2$

$\therefore f(2)=8-32=-24$

12. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 B$(-2,\ f(-2))$에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$　② $\frac{47}{4}$　③ $\frac{49}{4}$　④ $\frac{51}{4}$　⑤ $\frac{53}{4}$



$(t,\ t^3+2t^2-t+4)$
$=(1,6)$

$f'(x)=3x^2+4x-1$

$f'(t)=3t^2+4t-1=\dfrac{t^3+2t^2-t+4}{t}$

$2t^3+2t^2-4=0$　$(t-1)(t^2+2t+2)=0$　$t=1$

$S=\int_{-2}^{1}(x^3+2x^2-x+4)dx-3$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{1}-3$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+4\right)-\left(4-\frac{16}{3}-2-8\right)-3$

$=6-\frac{1}{4}+7=\frac{51}{4}$

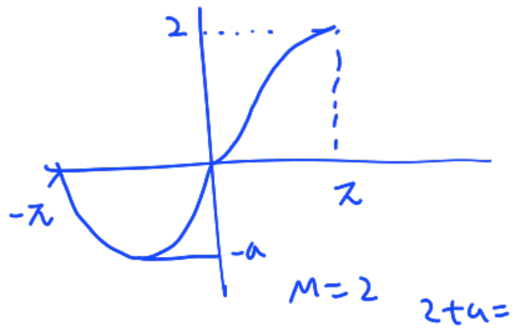
13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

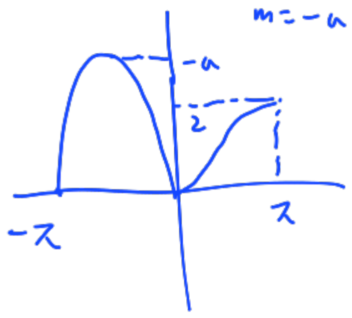
① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

$a>0$



$M=2$
$m=-a$
$2+a=4$
$a=2$

$a<0$



$-a=4$
$a=-4$

$-a\le 2 \to M-m\ne 4$
$\therefore -a>2$

$2\times(-4)=-8$

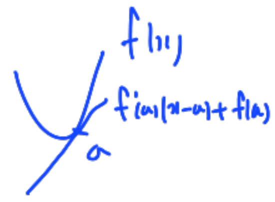
14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

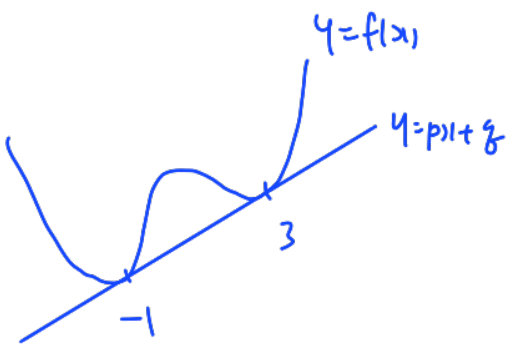
> $x_1\le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
> $$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
> 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a\le -1$ 또는 $a\ge 3$이다.

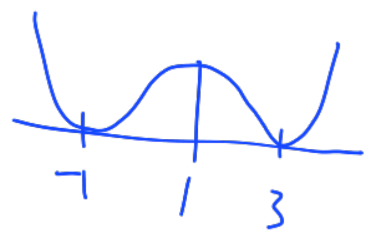
$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

$\int_{x_1}^{x_2}\left(f(t)-\left(f'(a)(x-a)+f(a)\right)\right)dt \ge 0$







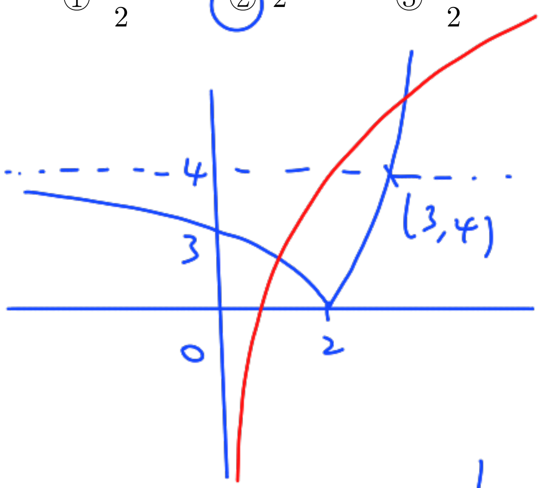
$f(x)-px-q$
$f'(1)-p=0$
$f'(1)=p=1$
$f(x)-x-q=(x+1)^2(x-3)^2$
$f(1)-1-q=16,\ q=-2$
$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$
$f(4)=25\cdot 1+4-2=27$

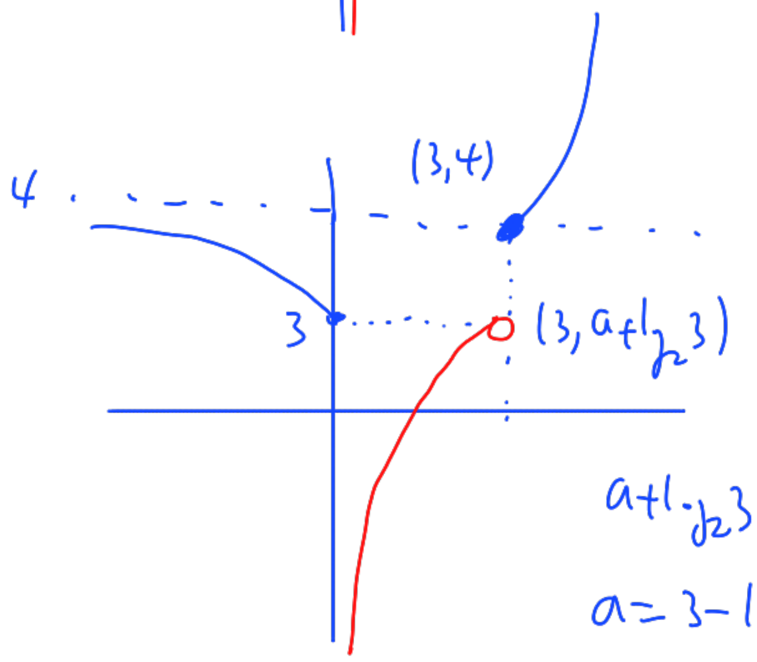
15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$





$a+\log_2 3 = 3$

$a=3-\log_2 3$

$p=0,\ q=3$

$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=a+\log_2\frac{3}{2}$

$=3-\log_2 3+\log_2 3-1=2$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$ $\boxed{6}$

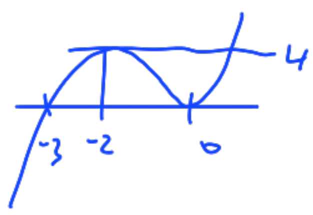
$x^2-4x+4=x+10$

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0,\ x=6$

17. x에 대한 방정식 $x^3+3x^2-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$k=x^2(x+3)$ $\boxed{3}$



1, 2, 3

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8,\ \ \sum_{k=1}^{8} {a_k}^2 = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{12}$

$\sum_{k=1}^{8}(a_k^2+2a_k-3)$

$= 20+16-24 = 12$

19. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)+t^2\}dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{32}$

$f(x)+x^2 = f(x)+xf'(x)-3x^2$

$f'(x) = 4x$

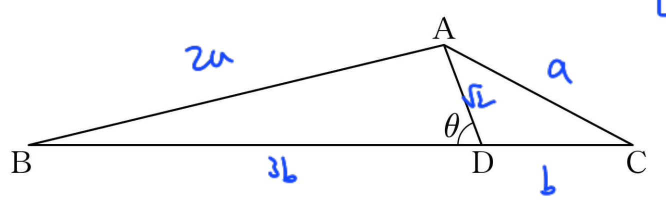
$\int_0^4 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^4 = 32$

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle \mathrm{ADB} = \theta$라 하자.

$$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{2},\ \ \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = 2:1,\ \ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{71}$



$\triangle ABD$ $4a^2 = 9b^2+2-6\sqrt{2}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

$4a^2 = 9b^2+2-3b$

$\triangle ACD$ $a^2 = b^2+2-2\sqrt{2}b\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$4a^2 = 4b^2+8+4b$

$5b^2-7b-6=0$

$(5b+3)(b-2)=0$

$b=2$

$a=2\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$2R = \frac{2a}{\sin\theta} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{7}},\ R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

$\pi R^2 = \frac{64}{7}\pi$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{381}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
240	240	120	40	10	2
6α $(6\le 6\alpha<18)$	6α	3α	α		
β $(\beta<3)$	$\left(\begin{matrix}6\alpha<18\\6\alpha\ge3\end{matrix}\right)$	$\left(\begin{matrix}3\alpha<9\\3\alpha\ge3\end{matrix}\right)$	$(\alpha<3)$		
	$6\le6\alpha<18$	$3\le3\alpha<9$			
		$6\le6\alpha<18$			

$\beta=1,2$ $6\le6\alpha\le17$

$240+(1+2)+(6+7+\cdots+17)$

$=243+\dfrac{12(6+17)}{2}=243+138=381$

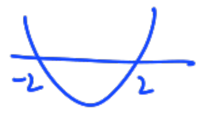
22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x\geq 0)\end{cases}$$ 0^-

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{154}$

$2x^2-8=2(x+2)(x-2)$



$x=0$ 연속 $\Rightarrow -f(0)=|f(0)|-8$ $f(0)=4$ $f'(0^+)>0$

0^+ $g(x)=f(x)+2x^2-8$

$g'(0^+)=f'(0)$
$g'(0^-)=-f'(0)$ $]=$ $\therefore f'(0)=0$

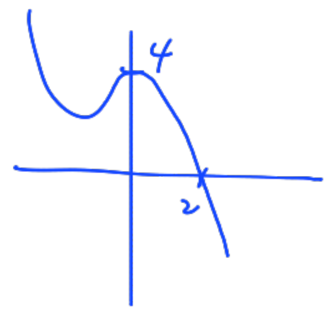
$x>0$ $|2x^2-8|$ $x=2$ 미분 X $\Rightarrow$

$g(x)$가 $x=2$ 미분가능하려면

$|f(x)|$는 $x>0$ $x=2$에서만 단일근 보장

$f(2)=0$ (중근 X)

$f'(2)\neq0$ 중근이면 $g(x)$는 $x=2$ 미·불



$x\to2^-$ $g(x)=f(x)+2x^2-8$, $g'(2^-)=f'(2)+8$

$x\to2^+$ $g(x)=-f(x)-2x^2+8$, $g'(2^+)=-f'(2)-8$

$g'(2^-)=g'(2^+)$ $\therefore f'(2)=-8$

$f(x)=ax^3+bx^2+4$

$f(2)=8a+4b+4=0$

$2a+b+1=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f'(2)=12a+4b=-8$

$3a+b=-2$

$a-1=-2$
$a=-1$
$b=1$

$f(x)=-x^3+x^2+4$

$f(-5)=125+25+4=154$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계)

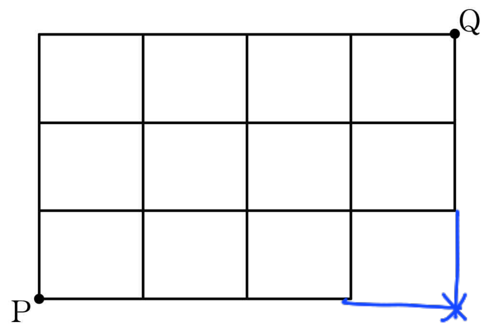
5지선다형

23. ${}_4H_3$의 값은? [2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

${}_6C_3$

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

${}_7C_3-1=34$

25. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? [3점]

① 170 ② 175 ③ 180 ④ 185 ⑤ 190

$4^4 - 3^4 = 256 - 81 = 175$

26. 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 모두 4 이상이 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$1+2<4$ 1 옆 ⇒ 3

13 ---- $_4C_2=6$

----31 $_4C_2=6$

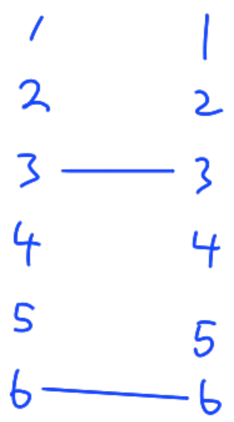
313 223 $\frac{4!}{2!}=12$

24

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [3점]

(가) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다.
(나) x가 3의 배수이면 $(f \circ f)(x)=x$이다.

① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64



$f(f(3))=3 \to f(3)=3$

$f(f(6))=6 \to f(6)=6$

${}_3H_2 \times {}_4H_2 = 6 \times 10 = 60$

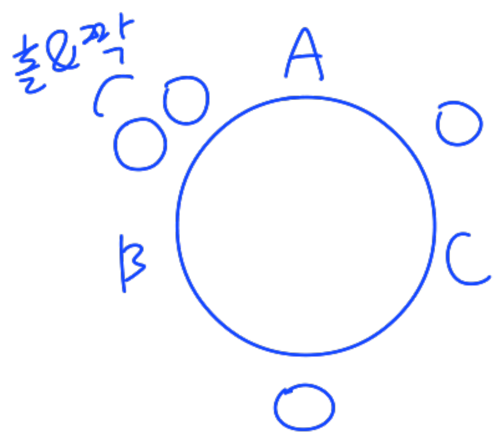
28. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고, 짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

1234 ABC

W B



$2! \times 3 \times (2\times2\times2!) \times 2 = 96$

ABC / OO 자리 / 홀짝 순서 / 나머지

단답형

29. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a\times b\times c\times d$가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

4/2 6/1 3 5 $\boxed{363}$

i) 4 4개 1

ii) 4 3개 $4C_3\times5=20$

iii) 4 2개 $4C_2+5^2=150$

iv) 4 1개 (2or6 2개 이상) ⇒ $4C_1\times(2^3+3C_2\times2^2\times3)=176$

2or6 3개 2or6 2개

v) 4 0개 $2^4=16$

$\therefore$ $1+20+150+176+16=363$

30. 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] $\boxed{330}$

(가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
(나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다.

A B C D E

2 1 (o)
4 2 (가) x
6 3 총8개 x

D E

ww w → $3H_4\times3H_1=45$
wB w → $3H_3\times3H_2=60$
BB w → $3H_2\times3H_3=60$
165

BB B
wB B
ww B
// 165

330

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)a_n}{n^2}=3$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{3n^2+1}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\lim \frac{a_n}{n}=\frac{3}{2}$

$\lim \frac{\frac{a_n}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$

25. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \frac{(k^2+9)^n + 30^n}{(10k)^n}$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\frac{3}{k}\right)^n$, $k>0$

$\frac{k^2+9}{10k} \le 1$, $\frac{3}{k} \le 1$

$k^2-10k+9 \le 0$ $k \ge 3$

$1 \le k \le 9$ $3 \le k \le 9$

7개

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{a_n - n^2}{n+1} = 4n-3$

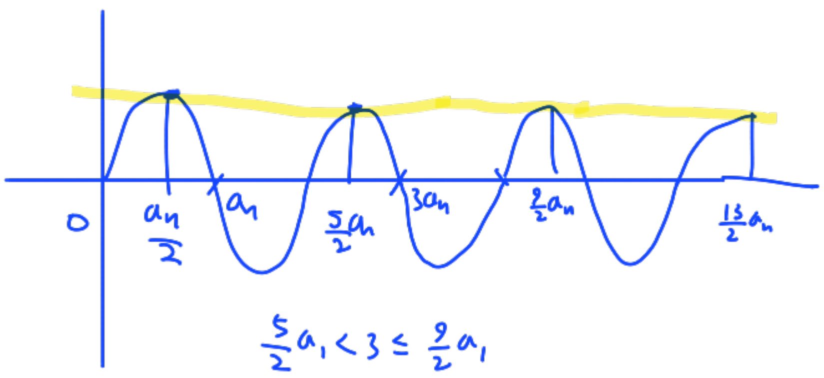
$a_n = 5n^2 \sim$

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> $0<x<3$일 때, x에 대한 방정식 $\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$의 값은? [3점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$



$\frac{5}{2}a_1 < 3 \le \frac{9}{2}a_1$

$\frac{13}{2}a_2 < 3 \le \frac{17}{2}a_2$

$\frac{8n-3}{2}a_n < 3 \le \frac{8n+1}{2}a_n$

$\frac{6}{8n+1} \le a_n < \frac{6}{8n-3}$

$\frac{6n}{8n+1} \le na_n < \frac{6n}{8n-3}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} na_n = \frac{3}{4}$

28. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx\ (a>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$의 값이 존재한다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k가 존재할 때, $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

$g(x)$

$|x|<1$ $\quad f(x)$

$|x|>1$ $\quad 2x^2$

$x=1$ $\quad \frac{3+f(1)}{3}$

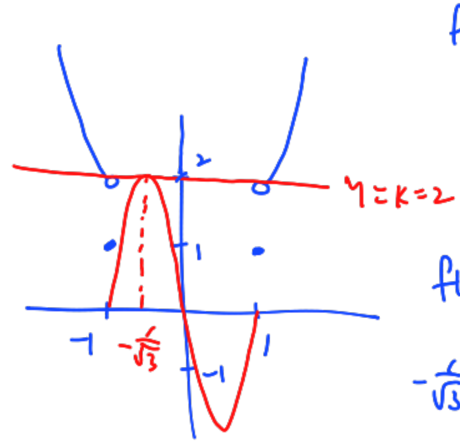
$x=-1$ $\quad \frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}$ 존재 $\Rightarrow$ $\frac{3+f(-1)}{3}=\frac{1+f(-1)}{1}$ $\quad \therefore f(-1)=0 \to g(-1)=1$

$-a-b=0,\ b=-a$

$f(x)=ax(x^2-1)$

$f(1)=0 \to g(1)=1$

$g(x)$



$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}a\left(-\frac{2}{3}\right)=2$

$\therefore a=3\sqrt{3}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}\sqrt{3}$

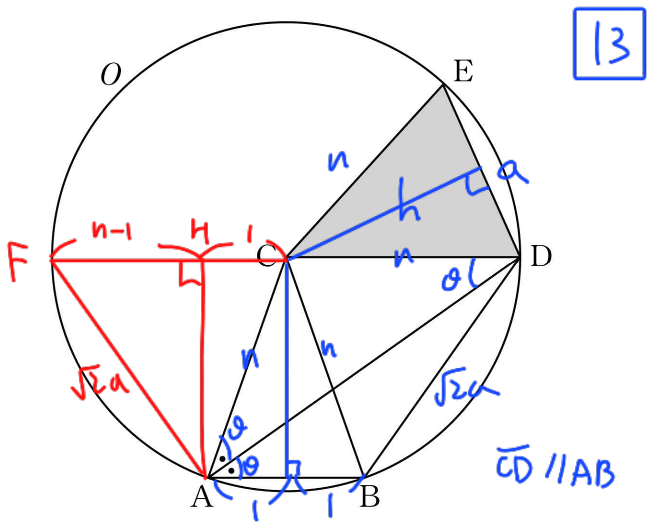
$g(2)=8$

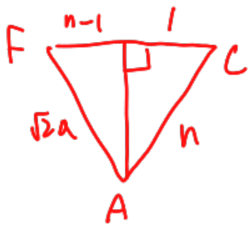
$\therefore g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2)=9\sqrt{3}$

단답형

29. 그림과 같이 자연수 $n(n\geq 2)$에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 n인 원 O와 $\overline{AB}=2$를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B가 있다. $\angle BAC$를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{BD}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 S_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

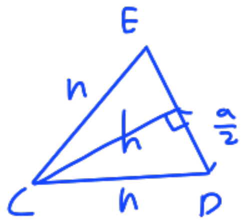
$\boxed{13}$





$(\sqrt{2}a)^2-(n-1)^2=n^2-1$

$2a^2=2n^2-2n$, $a^2=n^2-n$, $a=\sqrt{n^2-n}$



$h=\sqrt{n^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3n^2+n}{4}}$

$S_n=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n^2-n}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+n}}{2}$

$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)(3n+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{3n^2-2n-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{n^2-\frac{2n}{3}-\frac{1}{3}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(n-\sqrt{n^2-\frac{2n}{3}-\frac{1}{3}}\right)$

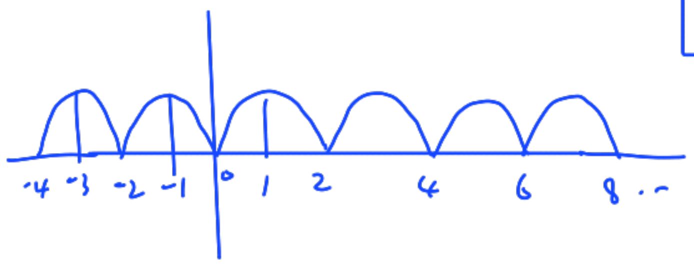
$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)=\frac{1}{12}\sqrt{3}$ $\quad p+q=13$

30. 함수 $f(x)$는 $0\leq x<2$일 때 $f(x)=x(2-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) r은 유리수이다.
> (나) 함수 $f(x)$가 $x=a_k$에서 극값을 갖고 $0<a_k<10$인 자연수 k의 개수는 3이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_{n+1}+a_{2n}}{a_{n+1}+a_n}=\frac{81}{10}$일 때, $a_7=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{25}$



a_k: 9 이하 자연수 3개 존재

$a_n=ar^{n-1}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^2r^n+ar^{2n-1}}{ar^n+ar^{n-1}}=\frac{81}{10}$ $\quad$ 수렴 → $-1<r\leq 1$

$r=\frac{q}{p}$

$\frac{ar}{r+1}=\frac{81}{10}$, $a=\frac{81}{10}\cdot\frac{r+1}{r}$

$a_k=ar^{k-1}=\frac{81}{10}(r+1)r^{k-2}$

a_k 3개 존재 $k=d,e,f$ $\quad a_d>a_e>a_f$, $r=\frac{q}{p}$

$\underbrace{a_d,a_e,a_f}_{9\text{이하 자연수}}$ ⇒ $a_f=a_d\cdot r^{f-d}$ $\quad f-d\geq 2$

$a_f=a_d\cdot\frac{q^{f-d}}{p^{f-d}}$

$f-d\geq 2$, a_f 자연수 ⇒ $a_d=p^2\times\square$

$-1<r=\frac{q}{p}\leq 1$, $a_d\leq 9$

$r\neq 1$, $p\neq 1$) $p^2=4,9$

$r=\frac{q}{p}=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$

a_k 3개 존재 ⇒ $r>0$

r	a_d	a_e	a_f		
$\frac{1}{2}$	4	2	1	$a=\frac{243}{10}$	$a_d\neq 4$
$\frac{1}{3}$	9	3	1	$a=\frac{162}{5}$	$a_d\neq 9$
$\frac{2}{3}$	9	6	4	$a=\frac{81}{4}$	

$a_3=9$, $a_4=6$, $a_5=4$) ok $\quad a_7=4\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{9}$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 의 단축의 길이는? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

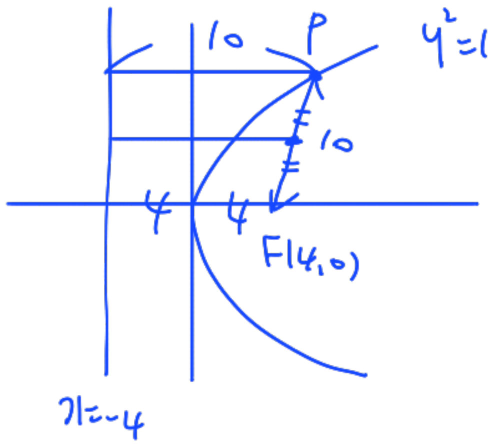
24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x$ 일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\frac{2}{a}=\frac{1}{3}$

25. 초점이 F인 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에 대하여 선분 FP를 지름으로 하는 원의 넓이가 25π일 때, 이 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



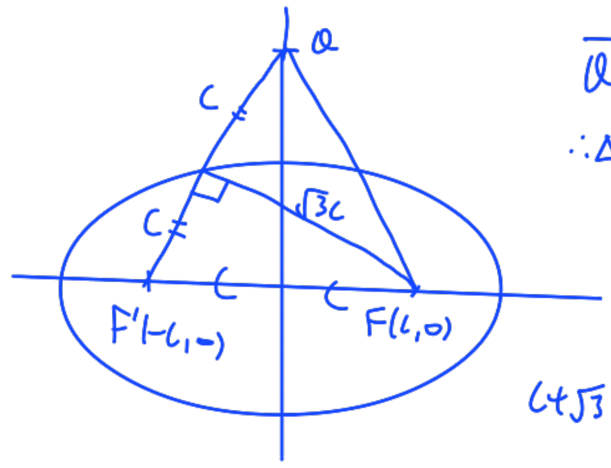
$y^2=16x$ $r=5$

$2r=10$

$\frac{10+8}{2}=9$

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 2인 타원이 있다. 이 타원 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 직선 $\mathrm{F'P}$가 y축과 점 Q에서 만난다. 직선 FP가 선분 $\mathrm{F'Q}$의 수직이등분선일 때, c의 값은? [3점]

① $3-2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $2\sqrt{3}-3$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-2$



$\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{FF'}}$

∴ΔQFF': 정삼각형

$c+\sqrt{3}c=2$

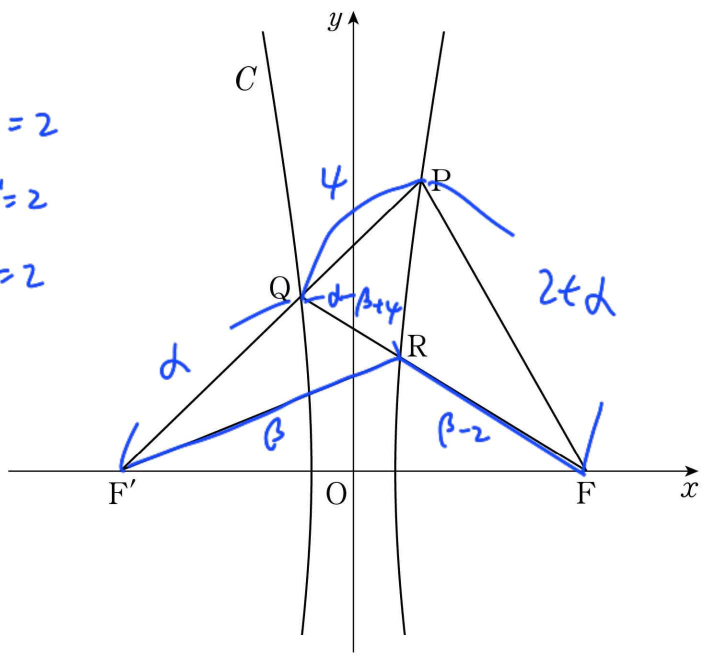
$c=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\,(c>0)$이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 C가 있다. 쌍곡선 C 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 선분 F′P가 쌍곡선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 선분 FQ가 쌍곡선 C와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이고 삼각형 F′RQ의 둘레의 길이가 16일 때, 삼각형 FPQ의 둘레의 길이는? [3점]

$F'R-FR=2$

$QF-QF'=2$

$PF'-PF=2$



① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$\alpha+\beta+(\alpha-\beta+4)=16$

$\alpha=6$ $\overline{PF}=8$, $\overline{FQ}=8$

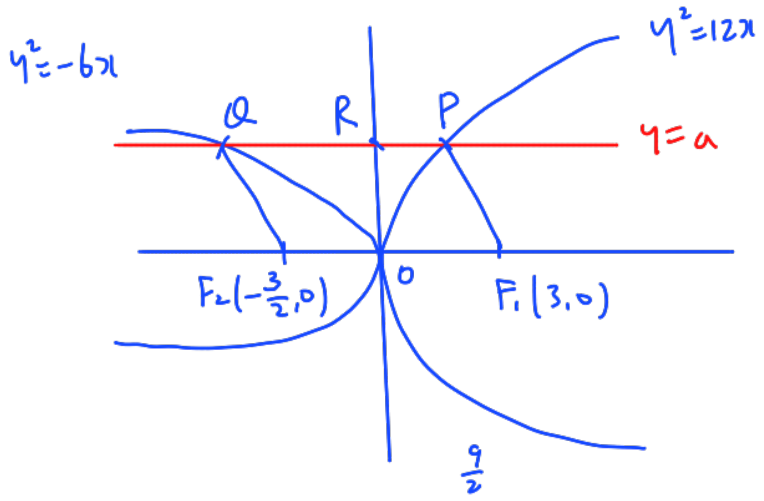
$\therefore 4+8+8=20$

28. 직선 $y=a\,(a>0)$이 두 포물선

$$C_1 : y^2=12x,\quad C_2 : y^2=-6x$$

와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 하자. 사각형 $\mathrm{PQF_2F_1}$의 둘레의 길이가 41일 때, 사각형 $\mathrm{PQF_2F_1}$의 넓이는? [4점]

① 76 ② 78 ③ 80 ④ 82 ⑤ 84



$PR_1=PF_1-3$

$QR=QF_2-\frac{3}{2}$

$PQ=PF_1+QF_2-\frac{9}{2}$

$PQ+\frac{9}{2}=PF_1+QF_2$

$\therefore F_1F_2+PF_1+QF_2+PQ$

$=2(PF_1+QF_2)=41$

$PF_1+QF_2=\frac{41}{2}=PQ+\frac{9}{2}$

$\therefore PQ=16$

$P(\frac{a^2}{12},a)$, $Q(-\frac{a^2}{6},a)$

$PQ=\frac{a^2}{4}=16$, $a=8$

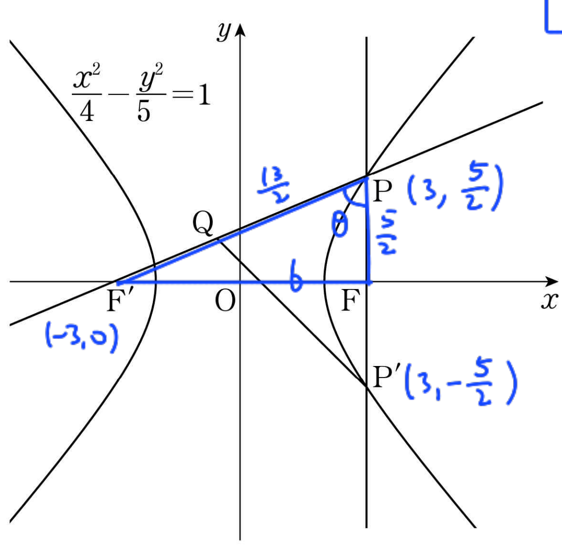
$\therefore S=\frac{1}{2}(F_1F_2+PQ)\times 8$

$=4(\frac{9}{2}+16)=18+64=82$

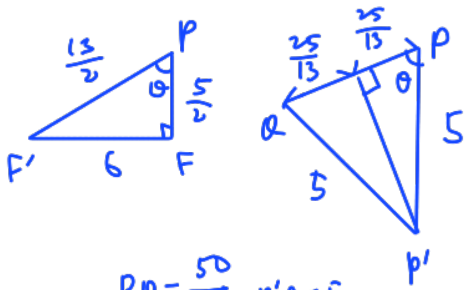
단답형

29. 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 있다. 직선 $x=c$가 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P, 제4사분면 위의 점을 P$'$이라 하자. 선분 F$'$P 위에 $\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{QP'}}$인 점 Q를 잡자. 두 점 P, P$'$을 초점으로 하고 점 Q를 지나는 타원의 장축의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{128}$



$C=3,\ P(3,\frac{5}{2}),\ P'(3,-\frac{5}{2})$

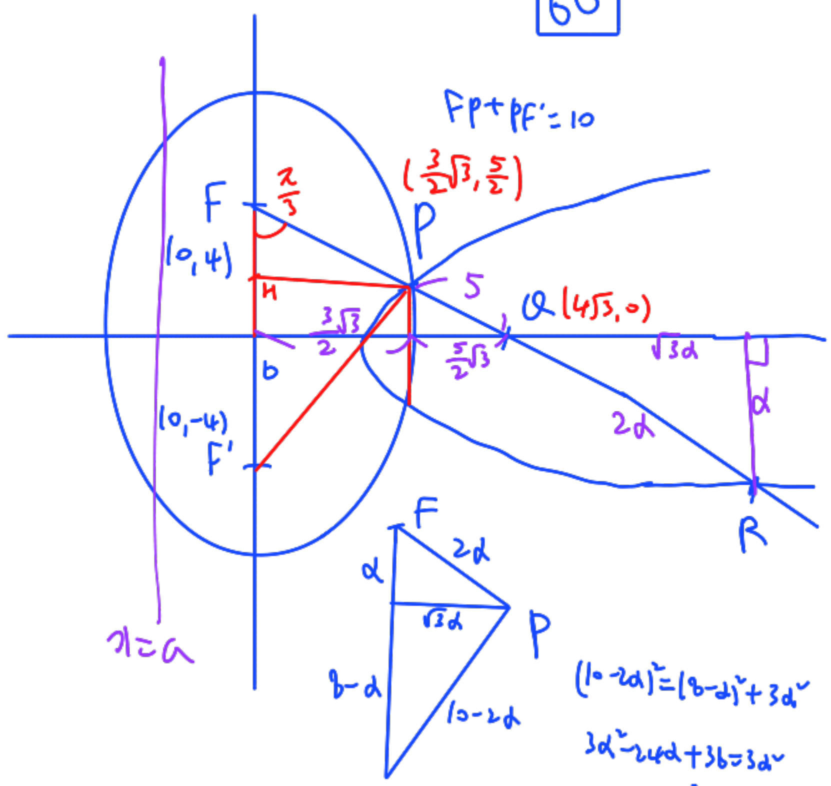


$PQ=\frac{50}{13},\ P'Q=5$

$P'Q+PQ=\frac{115}{13}$

30. 두 초점이 F$(0,\ 4)$, F$'(0,\ -4)$이고, 장축의 길이가 10인 타원이 있다. 이 타원 위에 있는 제1사분면 위의 점 중 $\angle \mathrm{F'FP}=\frac{\pi}{3}$를 만족시키는 점 P에 대하여 직선 FP가 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q를 초점으로 하고 준선이 $x=a\ (a<0)$인 포물선이 점 P를 지난다. 직선 FP가 이 포물선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{PR}}=p+q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{60}$



$(10-2\alpha)^2=(8-\alpha)^2+3\alpha^2$

$3\alpha^2-24\alpha+36=3\alpha^2$

$\alpha=\frac{3}{2}\quad P(\frac{3}{2}\sqrt{3},\frac{5}{2})$

$5=\frac{3}{2}\sqrt{3}-a,\ a=\frac{3\sqrt{3}}{2}-5$

$2\alpha=\sqrt{3}\alpha+4\sqrt{3}-a,\ \alpha=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{3}+5}{2-\sqrt{3}}=\frac{5}{2}(\sqrt{3}+2)(2+\sqrt{3})=\frac{35}{2}+10\sqrt{3}$

$\overline{PR}=5+2\alpha=40+20\sqrt{3}$

$\therefore\ p+q=60$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.