2025년도 3월 모의평가

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 10 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ -19 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

20. 첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$일 때, a의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -40일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

12. 함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $a>0$, $b>1$인 상수이다.) [3점]

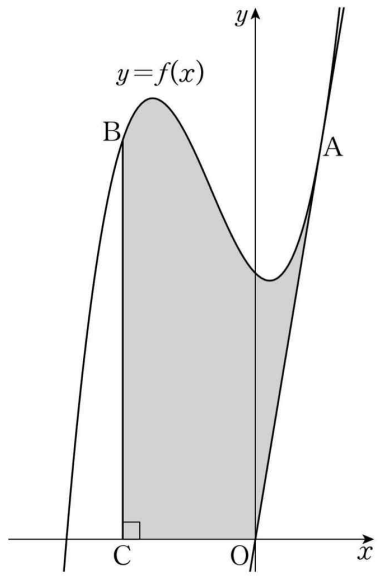
① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

17. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 $B(-2, f(-2))$에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$ ② $\frac{47}{4}$ ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{53}{4}$

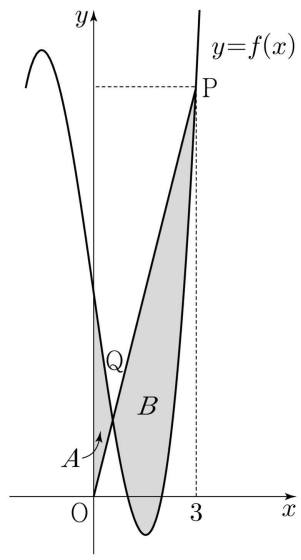


13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $P(3, f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

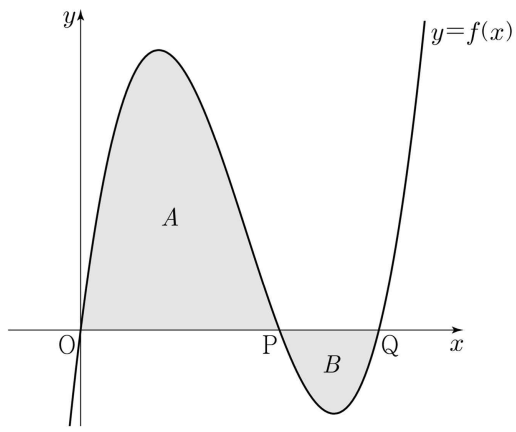
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q($\overline{OP}<\overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)$=3$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$x_1 \le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
$$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a \le -1$ 또는 $a \ge 3$이다.

$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k(k \ge 0)$에 대하여 함수
$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \le k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \ge 0$이고
$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \ge 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

29. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x\le p \text{ 또는 } x\ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

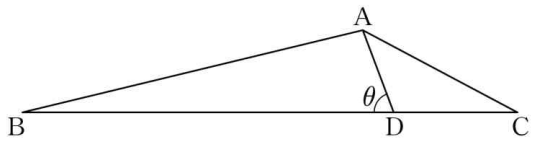
> 집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle ADB=\theta$라 하자.

$$\overline{AD}=\sqrt{2},\quad \overline{AB}:\overline{AC}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

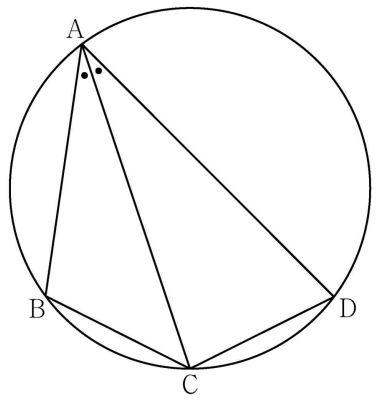
일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]

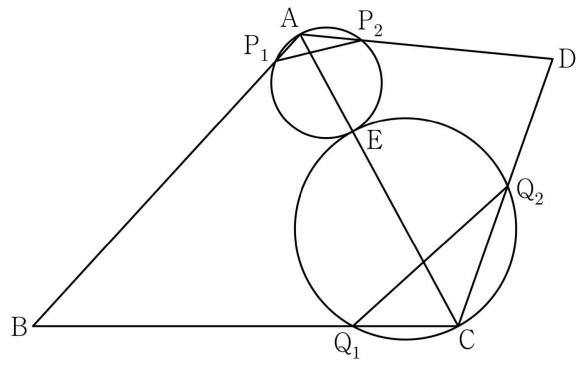


① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이다.

(나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.