—0

제 2 교시

수학 영역

소요시간 : 64m 08s

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}} = 2$

2. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2-8x+1$ $f'(3)$

$f'(3)=27-24+1=3+1=4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_4=2a_3+3a_2$$

를 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 공비는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

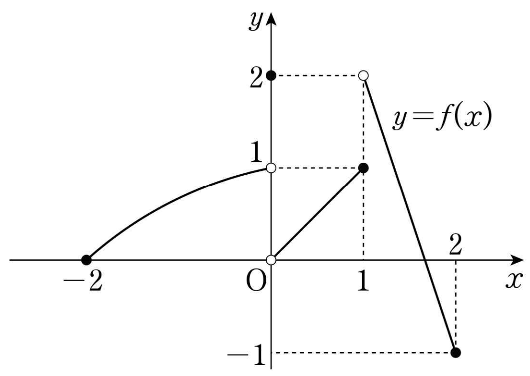
$ar^3=2ar^2+3ar$

$r^2=2r+3$

$r^2-2r-3=0$ $(r-3)(r+1)=0.$

$r>0 \to r=3.$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$1-2=-1$ ∴ ②

5. 함수 $f(x)=(x^2+x)(2x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x)=(2x+1)(2x^2-x)+(x^2+x)(4x-1)$

$f'(1)=3\times 1+2\times 3$

$=3+6=9.$

$\therefore$ ⑤

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^3+x$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-1$

$4+2-1=5$

$\therefore$ ⑤

6. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{3}$일 때, $\sin\theta\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

$\sin(\pi+(\frac{\pi}{2}+\theta))=\frac{1}{3}$

$+\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\frac{1}{3}$

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}.$

$\tan\theta\times\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times-2\sqrt{2}=-\frac{8}{3}$

8. 두 실수 $a=(\log 3)^2-(\log 2)^2$, $b=\log_6 10$에 대하여 10^{ab}의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$

$\log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6} = \frac{1}{x+y} = b$

$a = x^2 - y^2$

$a \times b = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x-y = \log \frac{3}{2}$

$10^{\log_{10}\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ ∴ ③

9. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

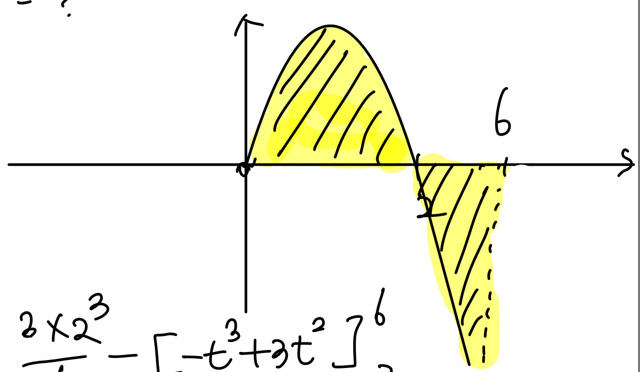
$$v(t)=-3t^2+6t$$

이다. 양수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 112　② 114　③ 116　④ 118　⑤ 120

$x(t) = -t^3+3t^2$　　$a=3$

$\int_0^6 |v(t)| = ?$



$\underbrace{\frac{3\times 2^3}{6}}_{4} - [-t^3+3t^2]_2^6$

$=116$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} 10 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ -19 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} …

10 10 −19 10 10 −19 10 10 −19 10 …

$S_n = S_{3n} \rightarrow S_{3n} - S_n = 0$.

↳ a_{n+1} ~ a_{3n} 까지의 합이 0.

| 10 10 −19 |

한번 반복될동안 +10×2, −19×1. → 0 안나옴.

$\underbrace{10\ 10\ -19}_{+1}$　+1　+1　+1　(×).

$\underbrace{10\ -19\ 10}_{+1}$ $\underbrace{10\ -19\ 10}_{+1}$ $\underbrace{10\ -19\ 10}_{+1}$ …　(×)

$\underbrace{-19\ 10\ 10}_{+1}$ / $\underbrace{-19\ 10\ 10}_{+1}$ / $\underbrace{-19\ 10\ 10}_{+1}$ / …　$\underbrace{10}$ / −19

n+1 n+2 n+3

×19 　 −19 = 0.

n+57　n+58 = 3n

↓

$3n = n+58$

$2n = 58$

$n = 29$.　∴ ⑤

11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -40일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

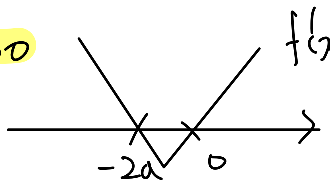
① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

$f'(x)=3x^2+6ax$

$\Rightarrow 3x(x+2a)$

$x=0$ or $-2a$

① Case #1. $a>0$

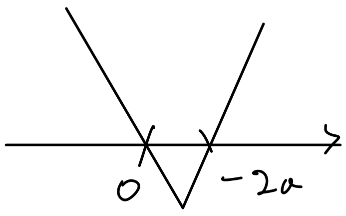


$4a=-40$

$a=-10$

(모순)

② Case #2 $a<0$



$-8a^3+12a^3+4a$

$=4a^3+4a=-40$

$a^3+a+10=0$

$a=-2 \cdots (0)$

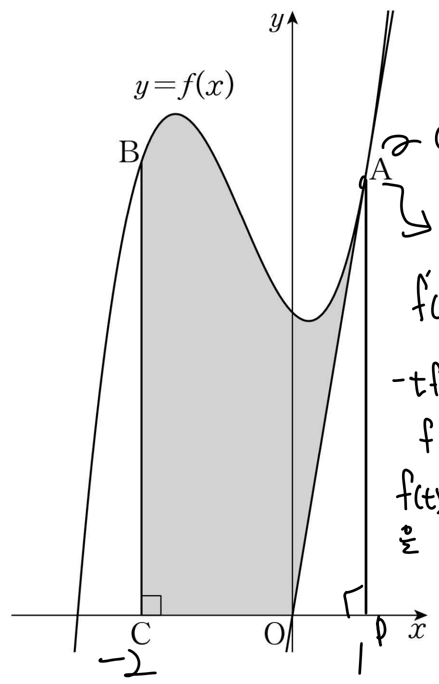
$f(2)=8+12a+4a=16a+8=-32+8$

$=-24$

$\therefore$ ①

12. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 B$(-2,\ f(-2))$에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$ ② $\frac{47}{4}$ ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{53}{4}$



개요 : $\int_B^A f(x)dx - \triangle OAP$

$-tf'(t)+f(t)=0$

$f'(t)=3t^2+4t-1$

$-tf'(t)=-3t^3-4t^2+t$

$f(t)=t^3+2t^2-t+4$

$f(t)-tf'(t)=-2t^3-2t^2+4=0$

을 만족시키는 $t>0$인 $t \to t=1$

고로 A의 좌표는 $(1,6)$

$\int_{-2}^{1} f(t)dt-3=$

$\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_{-2}^{1}-3$

$=\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+4}-\left(4-\frac{16}{3}-2-8\right)-3$

$4+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\quad -\left(-6-\frac{16}{3}\right)-3$

$=4+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+6+\frac{16}{3}\quad -3$

$13-\frac{1}{4}=\frac{52}{4}-\frac{1}{4}=\frac{51}{4}$

13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

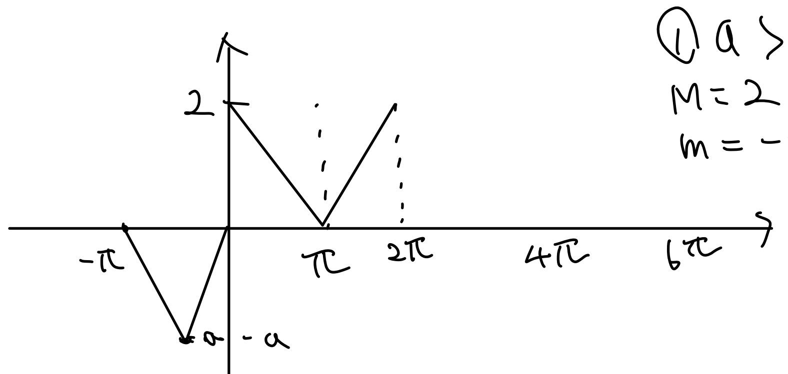
$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\geq 0) \end{cases}$$

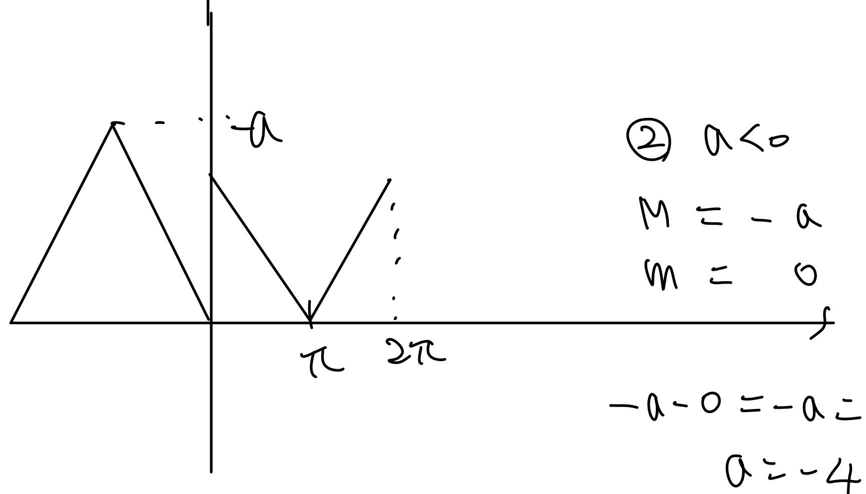
이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① -12　② -10　③ -8　④ -6　⑤ -4

① M=2
or
② M≠2

① a>0
M=2
m=-a → a=2.





② a<0
M = -a
m = 0

-a-0=-a=4
a=-4

2×-4=-8, ∴③

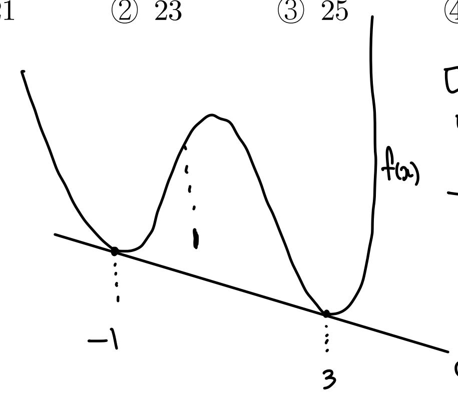
14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

→ f(x)가 f'(a)(x-a)+f(a), 즉 x=a 위에서의 접선보다 항상 커야함.

> $x_1 \leq x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
>
> $$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
>
> 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$이다.

$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29



대충 이런식으로 그려지면 되겠죠??

→ $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-3)^2$

$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+ax+b.$

$f(1)=a+b+16=15$　$a+b=-1$

$f'(1)=16+-16+a=a=1$

↳ $a=1,\ b=-2$

↳ $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$

$f(4)=25+2=27$

∴④

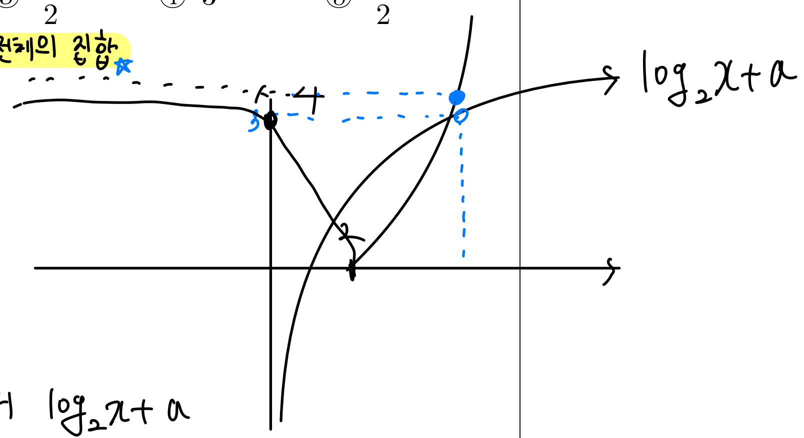
15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x\le p \text{ 또는 } x\ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

치역 또한 실수전체의 집합



Step #1. (p, q) 범위에서 $\log_2 x+a$
가 그려져야 하는데, "실수전체범위인 치역" 조건을
만족시키려면 $p=0$ 이어야함 (음수 범위에서는 로그함수만 그려질수 있기 때문)

Step #2. $|2^x-4|$ 의 $x<2$ 범위에선 최대인 치역 <4 이므로, $2^x-4=4$ 인 부분,
즉 $(3,4)$ 부분에서 $\log_2 x+a$ 의 치역이 $y<3$ 이어야 함. (일대일 대응 겹치면 X) $\rightarrow 3=\log_2 3+a$.
$a=\log_2\frac{8}{3}$, $q=3$

Step #3. $\frac{p+q}{2}=\frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{2})=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{8}{3}=\log_2 4=2$. ②

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

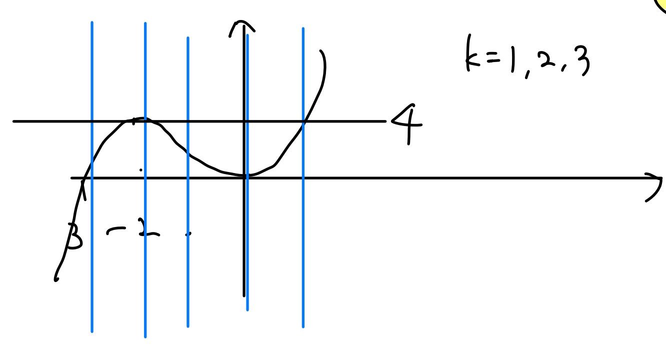
$x^2-4x+4=x+10$
$(x-6)(x+1)=0$
$x=6$ $(x>2)$

$\therefore 6$

17. x에 대한 방정식 $x^3+3x^2-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

3

$k=1,2,3$



$\therefore 3$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8, \quad \sum_{k=1}^{8} a_k^{\,2} = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{8} a_k^2+2a_k-3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{8} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{8} 3$$

$$= 20+16-24 = 36-24 = 12$$

$\therefore 12$

19. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)+t^2\}\,dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

양변 미분 → $f(x)+x^2 = f(x)+xf'(x)-3x^2$

$4x^2 = xf'(x)$

$4x = f'(x)$

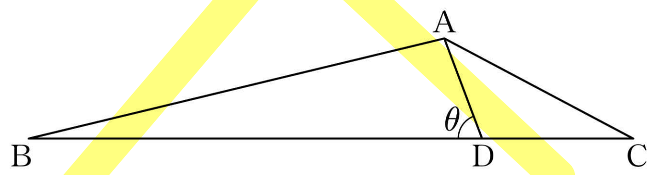
$\int_0^4 4x\,dx = [2x^2]_0^4 = 32$

$\therefore 32$

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle \mathrm{ADB} = \theta$라 하자.

$$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{2}, \quad \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = 2:1, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\therefore 71$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점] ∴ 381

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6

240 240 120 40

6 6 3 1 → 10 → 2

역방향 추론

$a_4=10 \rightarrow \frac{a_1}{6}<3.$

↳ $a_1<18$ BUT $a_2, a_3, a_4 \geq 3$

↳ $a_1 \geq 6$

a_1이 1,2 이면 $a_2=10$ (성립)

→ $a_1 = 1, 2, \sum_{k=6}^{17} k$, 240

$3+240+138=240+141=381$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0)\end{cases}$$

$x<2$ 에선 $|f(x)|+2x^2-8$

$x \geq 2$ 에선 $|f(x)|-2x^2+8$

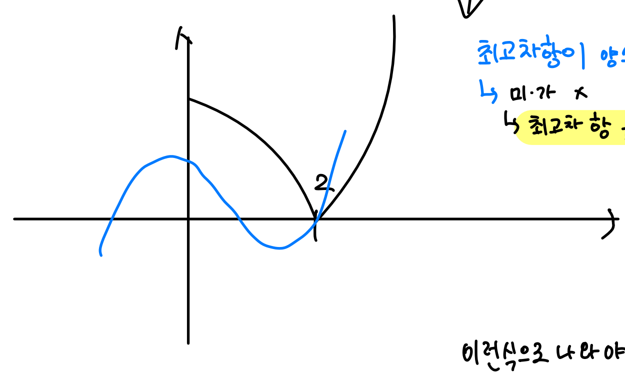
이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

① $x=0$ 에서 연속인지? → $x=0$ 에서 미·가 인지?

② $|f(x)|-|2x^2-8|$ 이 $x \geq 0$ 에서 미·가 인지?

$-f(0)=|f(0)|-8 \rightarrow f(0)$은 무조건 양수여야함 $+2f(0)=8$,

$f(0)=4$



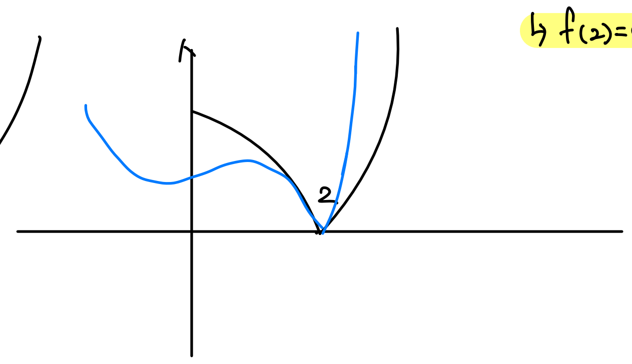
최고차항이 양수

↳ 미·가 ×

↳ 최고차항 음수

이런식으로 나와야 함.

↳ $f(2)=0$. $f'(2)=-8$



$f(x)=(ax^2+bx-2)(x-2)$

$f'(2)=4a+2b-2=-8$

$2b=-4a-6$

$b=-2a-3$

$f(x)=(ax^2-(2a+3)x-2)(x-2)$ → $x=0$ 좌우근방에서 $f(x)>0$.

$x=0$ 에서 $-f'(0)=f'(0)$. 즉 $f'(0)=0$ 이어야 하므로

$a=-1$.

↳ $f(x)=-(x^2+x+2)(x-2)$

$f(-5)=7\times22=154$

∴ 154

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

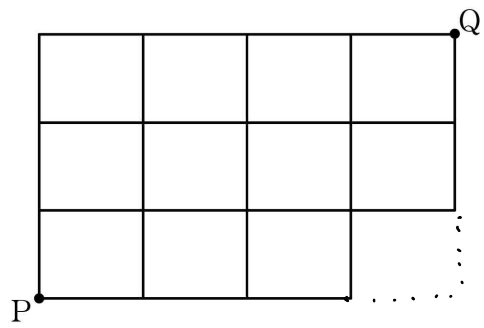
5지선다형

23. ${}_4H_3$의 값은? [2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

${}_6C_3 = 20$

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

$\frac{7!}{4!3!} - 1 = 35 - 1 = 34 \quad \therefore ⑤$

25. 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? [3점]

① 170 ② 175 ③ 180 ④ 185 ⑤ 190

여사건: 전체 − (a가 한번도 x)

⇒ 4×4×4×4 − (3×3×3×3)

= 256 − 81 = 175 ∴ ②

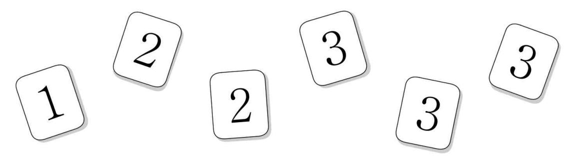
전체: 4 4 4 4

a가 한번도 x: 3 3 3 3

26. 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 모두 4 이상이 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

1은 옆에 무조건 3.

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32



① 1이 양끝에.

1 3 (자동) 1

$2\times\frac{4!}{2!2!}=12$

왼쪽끝 아 오른쪽 끝

남은 2,2,3,3 배열

② 3 1 3 (자동배열)

$4\times\frac{3!}{2!}=12$

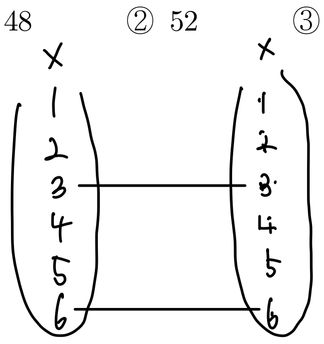
남은 2,2,3 배열

∴ 12+12 = 24, ③

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

> (가) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) x가 3의 배수이면 $(f \circ f)(x)=x$이다.

① 48　　② 52　　③ 56　　④ 60　　⑤ 64



If $f(3)=4$ 이면
$f(4)=3$ 이어야하는데, 그럼 (가) 조건 위배
→ $f(3)=3$.
같은 원리로 $f(6)=6$

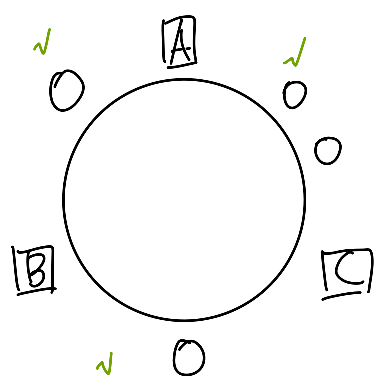
$_3H_2 \times {}_4H_2$
$=6\times 10=60$, ④

28. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
> (나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고, 짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 84　　② 88　　③ 92　　④ 96　　⑤ 100

① ② ③ ④
A B C



√ 세곳 중 한곳에는 숫자 2개

$\underbrace{2!}_{\text{A,B,C 배열}} \times \overset{\frown}{3} \times \underbrace{2\times 2}_{\text{홀수중 하나} \times \text{짝수중 하나} \to \text{이웃}} \times \underbrace{2}_{\text{이웃하는 두개 순서 바뀜}} \times \underbrace{2}_{\text{나머지 두개 배열}}$

$= 3\times 32=96$, ∴ ④

단답형

1, 2, 3, 4, 5, 6

29. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a\times b\times c\times d$가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

☆ 케이스 분류

① 짝 짝 짝 짝 _ _ _ _ $3^4=81$

② 짝 짝 짝 홀 _ _ _ _

③ 짝 짝 홀 홀 4 4 _ _

무조건 4×2개

$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{4 자리 2개}} \times \underbrace{3\times 3}_{\text{홀수배열}} = 54$

4가 적어도 하나 존재.

$\underbrace{{}_4C_1}_{\text{4자리 중 한자리 홀수}} \times \underbrace{3}_{1,3,5} \times (\underbrace{3\times3\times3}_{짝\times짝\times짝} - \underbrace{2\times2\times2}_{(4없이)\ 짝\times짝\times짝}) = 12\times19=228$

전체 − 4가 없는 경우

↳ $228+54+81=$

$228+135=361$ ∴ 361

∴ 361

30. 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
> (나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다.

2k, k

$2k+k=3k$, 즉 D+E는 3의 배수고, $a+b+c$는 홀수임.

가능한 케이스로는 $a+b+c+d+e=8$ (홀 4, 짝 4) 뿐임.

$5+2+1=8$

d+e

✓① 흰흰 | 흰 $a+b+c=4 \times a+b+c=1$
${}_3H_4 \times {}_3H_1 = 45$

② 흰흰 | 검

✓③ 흰검 | 흰 $a+b+c=2 \times a+b+c=3$
${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

④ 흰검 | 검

✓⑤ 검검 | 흰 $a+b+c=3 \times a+b+c=2$
${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

⑥ 검검 | 검

(①+③+⑤)×2

↓

$(45+60+60)=330$

∴ 330

∴ 330

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.