제 2 교시

# 수학 영역

by. 이다정T

## 5지선다형

*1.* $\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

*2.* 함수 $f(x)=x^3-4x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

$= f'(3)$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

*3.* 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = 2a_3 + 3a_2$$

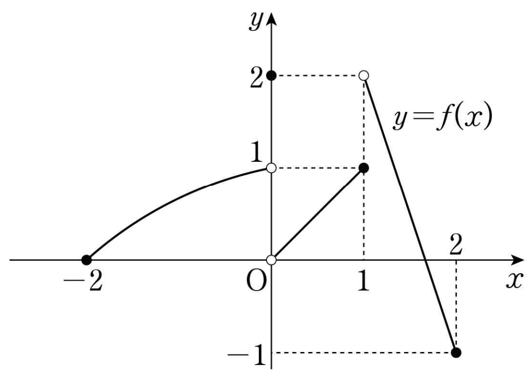
를 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\cancel{a_2}\cdot r^2 = 2\cdot r\cdot \cancel{a_2} + 3\cancel{a_2}$

$\Rightarrow r = 3$

*4.* 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to 0-}f(x) - \lim_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

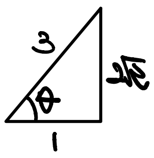
① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x)=(x^2+x)(2x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{3}$일 때, $\sin\theta\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$




$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\tan\theta=2\sqrt{2}$ 부호 반대 (∵ $\cos<0$)

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^3+x$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

적분상수

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

*8.* 두 실수 $a=(\log 3)^2-(\log 2)^2$, $b=\log_6 10$에 대하여 $10^{ab}$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

〈로그 공식 : 밑변환〉

풀 $a=\log 6 \times \log\frac{3}{2}$

$\Rightarrow ab = \cancel{\log_6 10} \times \cancel{\log 6} \times \log\frac{3}{2} = \log\frac{3}{2}$

*9.* 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

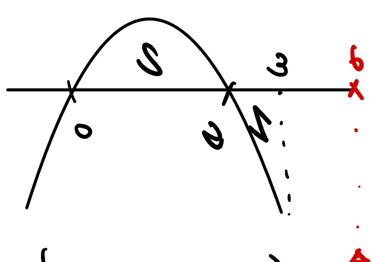
$$v(t)=-3t^2+6t$$

이다. 양수 $a$에 대하여 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

〈삼차함수 2:1〉

풀 $\Rightarrow \int_0^3 v(t)\,dt = 0 \Rightarrow a=3$




풀 $\int_0^6 |v(t)|\,dt = \int_0^2 v(t)\,dt + \int_2^6 |v(t)|\,dt$

$= \frac{3}{6}\cdot 2^3 + \left(\frac{1}{2}\times 4\times 72 - \frac{3}{6}\cdot 4^3\right)$

$= 4 + 112 = 116$

*10.* 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 10 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ -19 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$를 만족시키는 자연수 $n$의 값은? [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

〈규칙성 발견 → 선지판단〉

풀

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | −19 | 10 | 10 | −19 |
| | | 합 : 1 | | | 합 : 1 |

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3n} a_k = n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = n$

i) $n=25 \Rightarrow 25 = 3\times 8+1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 8+10 = 18$

ii) $n=26 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 8+20 = 28$

iii) $n=27 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 9$

iv) $n=28 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 9+10 = 19$

v) $n=29 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 9+20 = 29$

↳ 선지에 대해 단순 대입

*11.* 0이 아닌 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

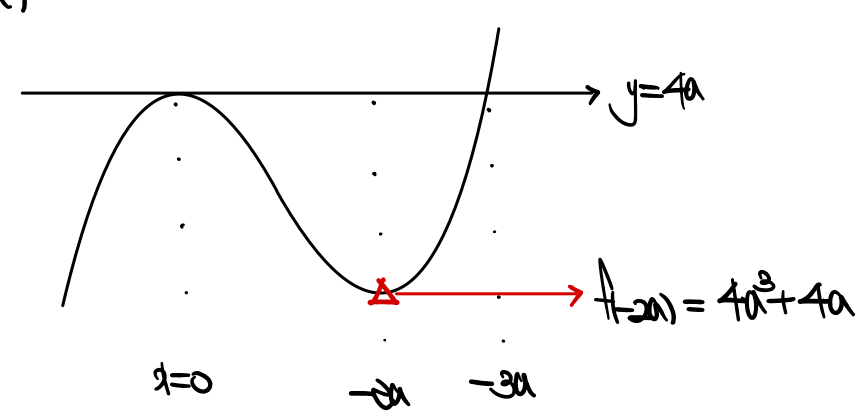
라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① $-24$ ② $-20$ ③ $-16$ ④ $-12$ ⑤ $-8$

<함수 개형 추론>

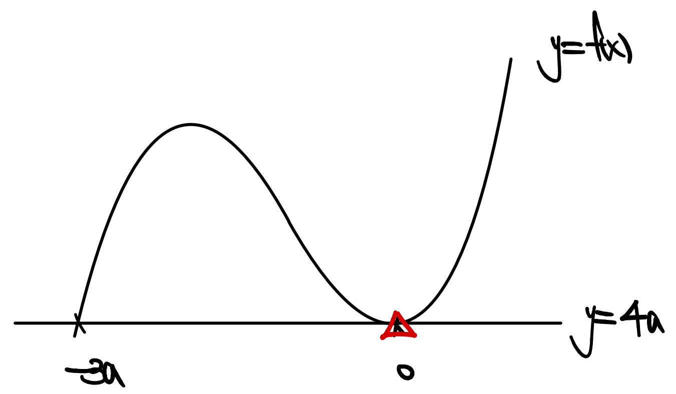
[1] $f(x)=x^2(x+3a)+4a$

(i)




$\Rightarrow a=-2 \quad (a<0)$

(ii)



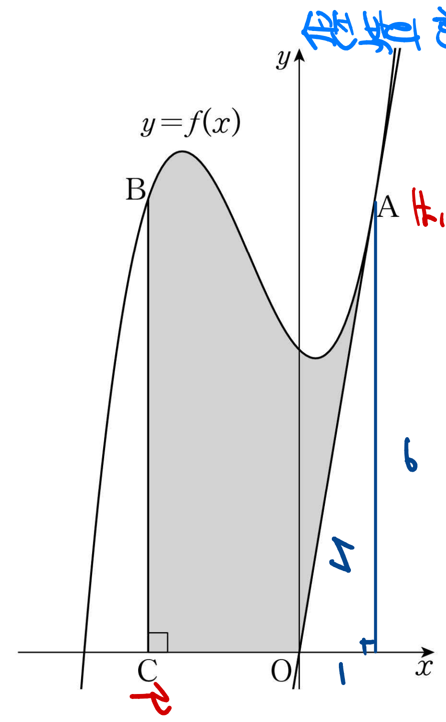

$\rightarrow f(0)=4a=-40$

$a=-10$ ↯ $(\because a>0)$

*12.* 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 B$(-2,\ f(-2))$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$ ② $\frac{47}{4}$ ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{53}{4}$

<곡선 밖의 한 점 ~ 접선 & 정적분>




[1] 평균 변화율 = 순간변화율

$\frac{f(t)-0}{t-0}=f'(t) \Rightarrow t=1 \Rightarrow A(1,6)$

[2] $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(t)\,dt - \triangle$

$=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\times1\times6$

$=\left.\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right|_{-2}^{1} - 3$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+4-\left(4-\frac{16}{3}-2-8\right)-3$

$=\frac{51}{4}$

13. 0이 아닌 실수 $a$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\geq 0)\end{cases}$$

→ a>0, a<0 에 따라..

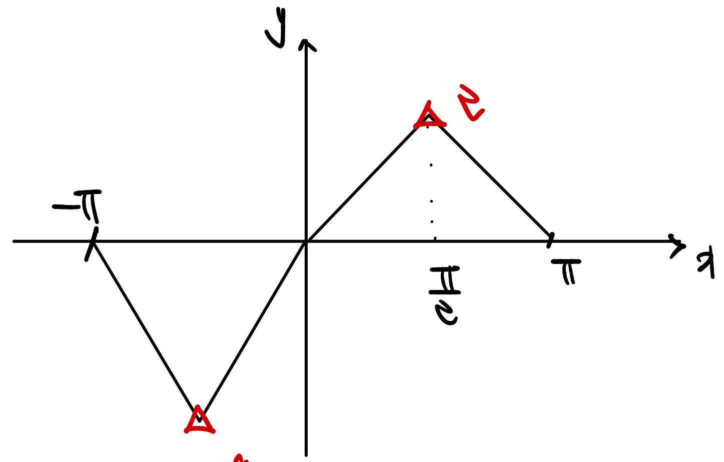
→ 이는 확정

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 $a$의 값의 곱은? [4점]

① $-12$ ② $-10$ ③ $-8$ ④ $-6$ ⑤ $-4$

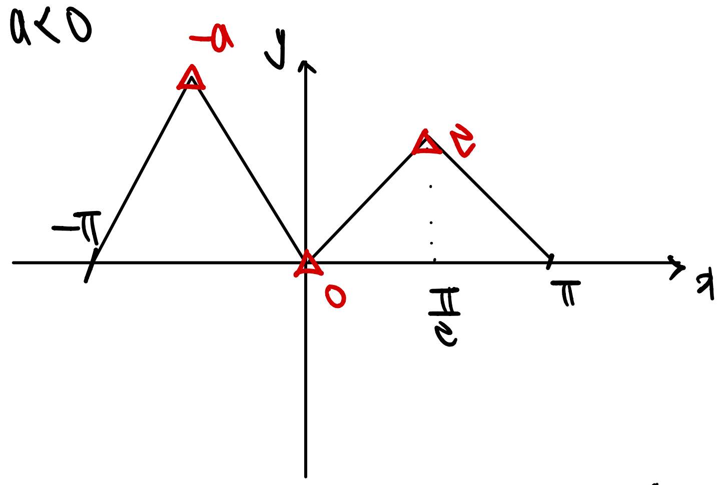
<삼각함수 최대 & 최소>

[1] $a>0$




$\Rightarrow 2+a=4 \Rightarrow a=2$

[2] $a<0$




$\Rightarrow -a-0=4 \Rightarrow a=-4$

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1 \leq x_2$인 모든 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 부등식
> $$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
> 를 만족시키는 모든 실수 $a$의 값의 범위가 $a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$이다.

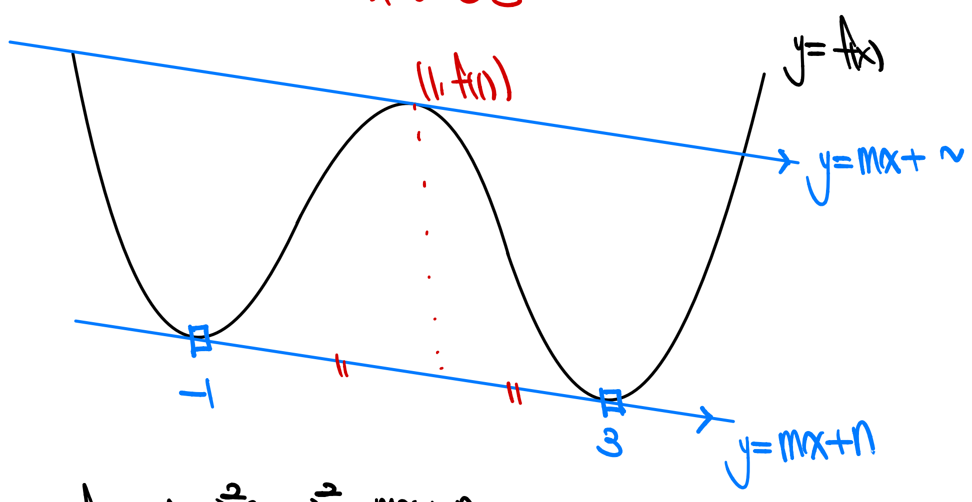
$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

<공통접선 & 접선>

[1] $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \underline{f'(a)(x-a)+f(a)}\,dt$

↳ $x=a$ 접선




$\Rightarrow f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+mx+n$

[2] $f(1)=4\cdot4+m+n=15 \Rightarrow m+n=-1$

$f'(1)=m=1 \Rightarrow n=-2$

$\therefore f(4)=25\cdot1+4m+n$

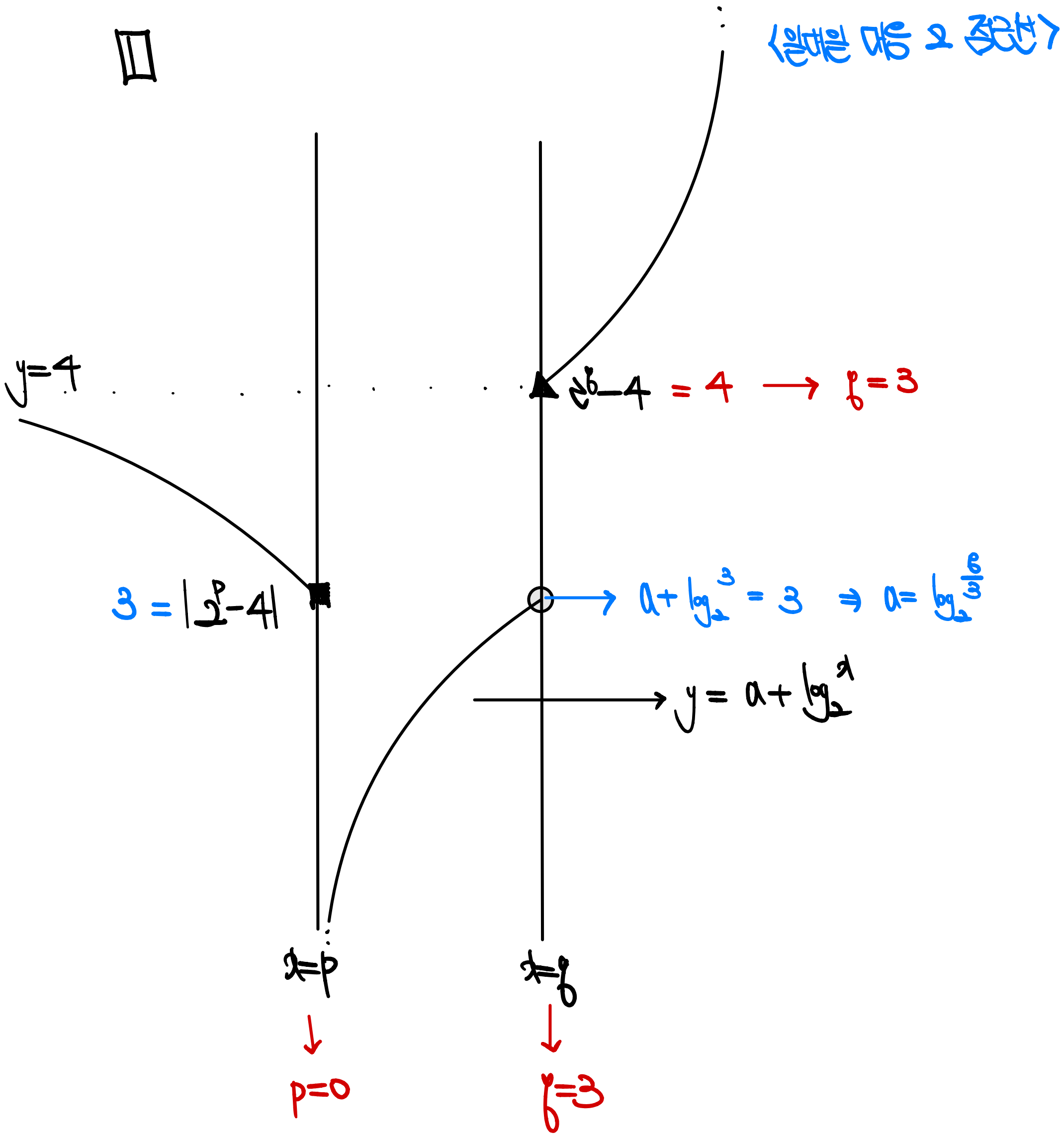
$=25+4-2=27$

15. 세 실수 $a$, $p$, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$




$\Rightarrow f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_2\frac{8}{3}+\log_2\frac{3}{2}=2$

**단답형**

16. 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$$

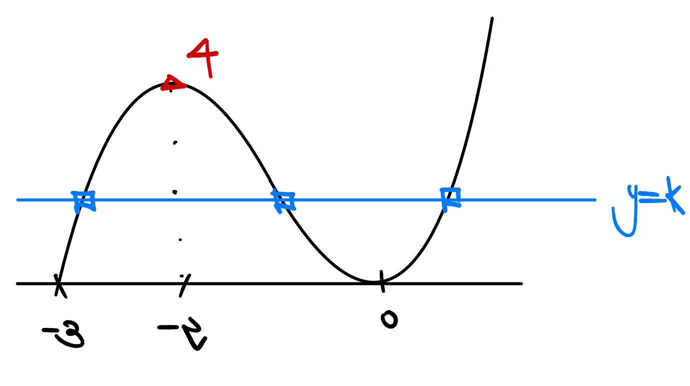
을 만족시키는 실수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

$\therefore x=6$

17. $x$에 대한 방정식 $x^3+3x^2-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 $k$의 개수를 구하시오. [3점]

$x^3+3x^2=k$

$\Rightarrow x^2(x+3)=k$




$\therefore k=1, 2, 3$

$\Rightarrow$ 3개

*18.* 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8,\quad \sum_{k=1}^{8} {a_k}^2 = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{8}(a_k^2+2a_k-3) = 20+16-24$

$= 12$

$\therefore 12$

*19.* 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

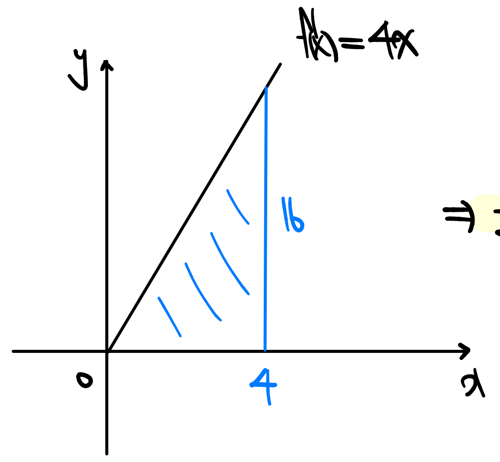
$$\int_0^x \{f(t)+t^2\}dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

1) 대입 ⇒ 0 = 0

미분 : $\cancel{f(x)}+x^2 = \cancel{f(x)}+xf'(x)-3x^2$

$\Rightarrow f'(x) = 4x$



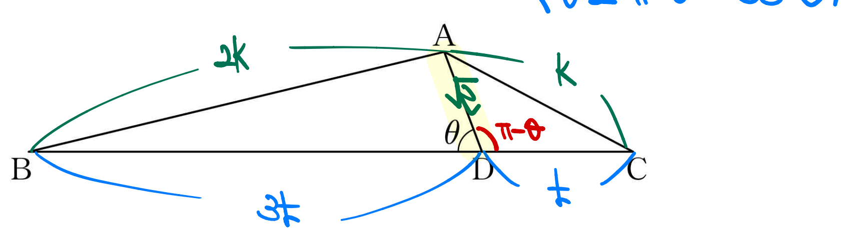

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times4\times16 = 32$

*20.* 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle ADB=\theta$라 하자.

$$\overline{AD}=\sqrt{2},\quad \overline{AB}:\overline{AC}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

{θ & π−θ → 공통변}



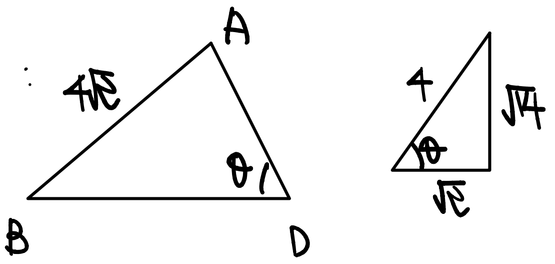

1) $\triangle ABD : 4k^2 = 2+9t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot3t\cdot\cos\theta$

$\triangle ACD : k^2 = 2+t^2-2\sqrt{2}\cdot t\cdot\cos(\pi-\theta)$

연립

$\Rightarrow t=2$ & $k=2\sqrt{2}$

2) $\triangle ABD$ :




$\frac{4\sqrt{2}}{\sin\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

$\pi R^2 = \frac{64}{7}\pi$ $\therefore 71$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

$\longrightarrow$ $a_n = n \cdot a_{n+1}$ $(a_n \geq 3)$

$a_{n+1}=10 \Rightarrow a_n < 3$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합을 구하시오. [4점]

〈역방향 추론〉

[1] $a_6$ $a_5$ $a_4$ $a_3$ $a_2$ $a_1$

$2 \longrightarrow 10$

$40 \longrightarrow 120 \longrightarrow 240 \longrightarrow 240$

$k\ (k<3) \rightarrow 3k \longrightarrow 6k$

$(3 \leq 3k < 9)$

$6k \neq 10$: $6k \Rightarrow (6 \leq 6k < 18)$

$\to 6, 7, \cdots, 17$

$6k = 10$: $1, 2$

$\therefore 381$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

〈연속 & 미가 후보 찾기〉

[1] 연속 $x=0$

$\Rightarrow -f(0) = |f(0)| - 8$

$\Rightarrow f(0) > 0$ & $f(0) = 4$

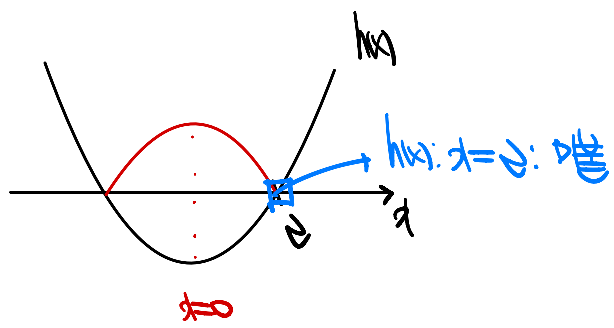
[2] 미가 : $x=0$

$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x)+(2x^2-8) & (x\geq 0)\end{cases}$ $x=0$ 부근

$\Rightarrow g'(x)=\begin{cases}-f'(x) & (x<0)\\ f'(x)+4x & (x\geq 0)\end{cases}$ $x=0$ 부근

$\Rightarrow -f'(0) = f'(0) \Rightarrow f'(0)=0$

[3] $h(x) = |2x^2-8|$ $(x \geq 0)$



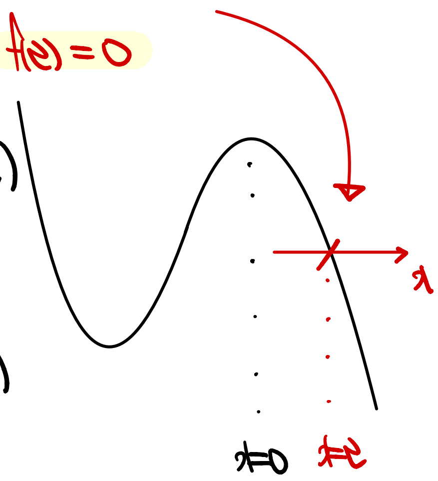

$\Rightarrow g(x) = |f(x)| - h(x)$ $(x>0)$

$x=2$ : 미불 $\Rightarrow |f(x)|$ : $x=2$ 미불이어야함

$\Rightarrow f(2)=0$

$\Rightarrow g'(x)=\begin{cases}f'(x)-h'(x) & (0<x<2)\\ -f'(x)-h'(x) & (x>2)\end{cases}$

$\Rightarrow g'(2)=\begin{cases}f'(2)-(-8) & (0<x<2)\\ -f'(2)-8 & (x\geq 2)\end{cases}$




$\Rightarrow f'(2) = -8$

$\therefore f(x) = -x^2(x-1)+4$

$f(-5) = -25\cdot(-6)+4 = 154$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

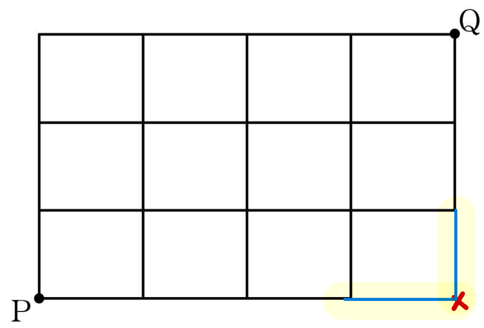
# 수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{4}H_{3}$ 의 값은? [2점]

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점] 여사건




① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

*25.* 네 문자 $a$, $b$, $c$, $d$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 $a$가 적어도 한 번 이상 나오는 경우의 수는? [3점] 〈여사건〉

① 170 ② 175 ③ 180 ④ 185 ⑤ 190

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4} \Rightarrow 4^4$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3} \Rightarrow 3^4$

$\therefore 4^4 - 3^4 = 175$

*26.* 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 모두 4 이상이 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32


1, 3 ⇒ 무조건 이웃 (i) $\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{\quad}$ ~

(ii) $\underline{3}\ \underline{1}\ \underline{3}$ ~

(i) 1 : 양끝 배치 ⇒ $\underline{1}\ \underline{3}$

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$\Rightarrow \underset{1\text{배치}}{{}_2C_1} \times \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 12$

(ii) $\underline{3}\ \underline{1}\ \underline{3}$ 배치

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

$\therefore 24$

*27.* 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

> (가) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $x$가 3의 배수이면 $(f \circ f)(x)=x$이다.

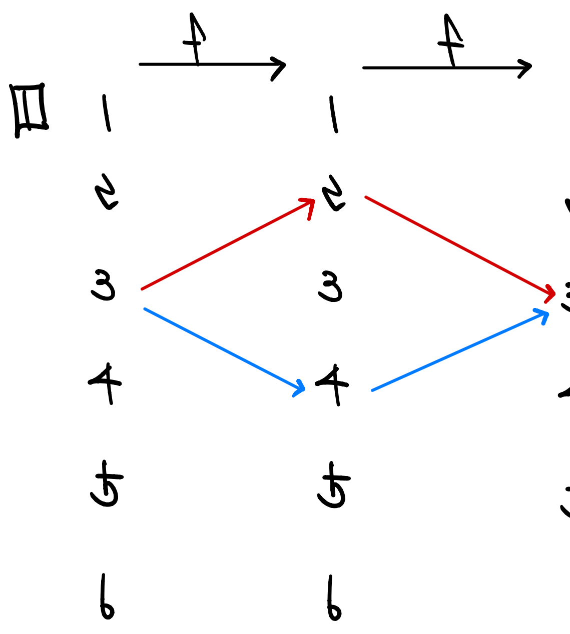
① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

풀 (가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$

→ 중복조합 고려

(나) $f(f(3)) = 3$
$f(f(6)) = 6$

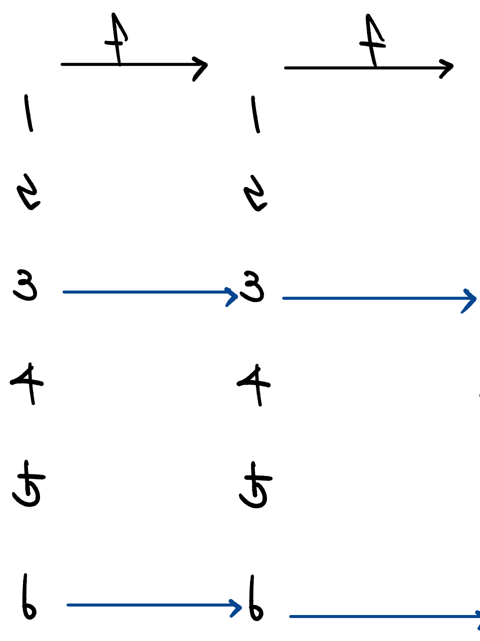
중복조합 case 분류의 기준

풀


⇒ (가) 조건 X

⇒ (가) 조건 X

⇒ $f(3)=3$ & $f(6)=6$



⇒ $f(3)=3$ & $f(6)=6$

⇒ $_3H_2 \times {}_4H_2 = 6 \times 10 = 60$

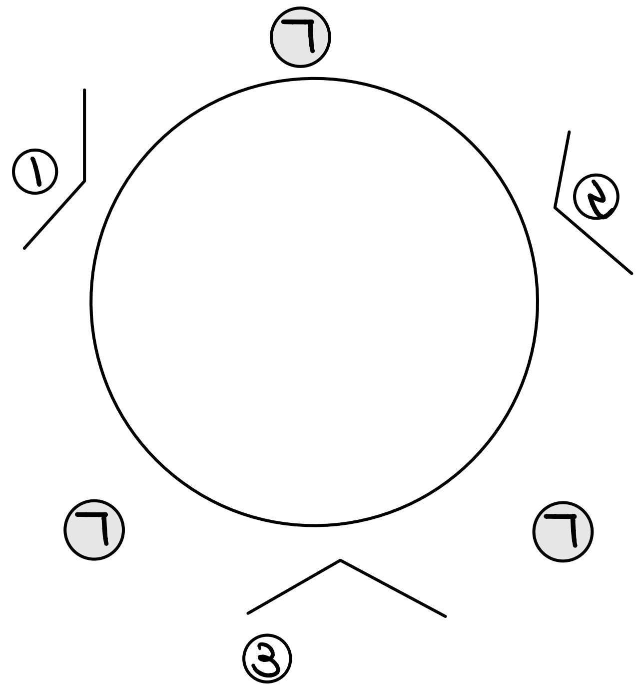
$f(1), f(2)$　$f(4), f(5)$

*28.* 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
> (나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고, 짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

풀 ㄱ 배열 : 2! (원순열 계산)




풀 ①, ②, ③에 흰색 접시 무조건 1개 이상

⇒ 2개 1개 1개 배분 : 3가지

| | ① | ② | ③ | |
|---|---|---|---|---|
| (i) | 홀홀 | 짝 | 짝 | ⇒ $2! \times 2! = 4$ |
| (ii) | 짝짝 | 홀 | 홀 | ⇒ $2! \times 2! = 4$ |

짝 배열, 홀 배열

전체 : $4! = 24$

⇒ $2! \times 3 \times (4! - 8) = 96$

## 단 답 형

*29.* 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 $a$, $b$, $c$, $d$라 하자. $a \times b \times c \times d$가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수를 구하시오. [4점]

→ 2, 4, 6 으로 케이스 분류

Ⅰ 짝수 4개인 경우

3 3 3 3 ⇒ $3^4 = 81$

Ⅱ 짝수 3개인 경우 <4 : 적어도 1개 포함>

ㄴ 여사건

3 3 3 홀수

$\underbrace{{}_4C_1}_{\text{홀수자리}} \times \underbrace{{}_3C_1}_{\text{홀수 1,3,5 중}} \times (\underbrace{3^3}_{2,4,6} - \underbrace{2^3}_{2,6}) = 228$

Ⅲ 짝수 2개인 경우 : 4, 4

4 4 3 3

$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{4 배치}} \times \underbrace{{}_3C_1 \times {}_3C_1}_{\text{나머지 2자리에 홀수 배치}} = 54$

∴ 363

*30.* 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
> (나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다.

Ⅰ i) A B C | D E

ㄱ 8개 ≠ (by 가) | 0개 0개

ㅎ

2배

Ⅱ i) A B C | D E

ㄱ $a+b+c=1$ | 2개 1개

ㅎ $a+b+c=4$

⇒ ${}_3H_1 \times {}_3H_4 = 45$

ii) A B C | D E

ㄱ $a+b+c=3$ | 1개

ㅎ $a+b+c=2$ | 2개

⇒ ${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

iii) A B C | D E

ㄱ $a+b+c=2$ | 1개 1개

ㅎ $a+b+c=3$ | 1개

⇒ ${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

Ⅲ D E

i) ㄱ 2개

ㅎ 1개

ii) ㄱ 1개

ㅎ 1개 1개

iii) ㄱ

ㅎ 2개 1개

→ Ⅱ와 동일

Ⅳ E : 2개 ⇒ D : 4개 ⇒ A+B+C=2개 ✗

∴ $2(45+60+60)$

$= 330$

* 확인 사항
- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)a_n}{n^2}=3$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{3n^2+1}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

*25.* 자연수 $k$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \frac{(k^2+9)^n + 30^n}{(10k)^n}$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 $k$의 개수는? [3점]

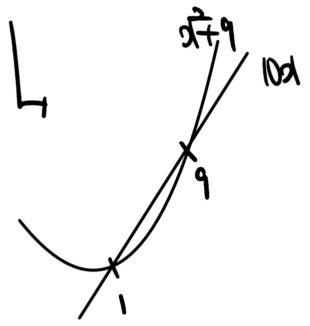
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

풀 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{(k^2+9)^n+\boxed{30}^n}{\boxed{(10k)}^n}$ → 비교 $10k \geq 30$

$\Rightarrow k \geq 3$ → 수렴

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{(k^2+9)}^n+30^n}{\boxed{(10k)}^n}$ → 비교 $k^2+9 < 10k$

$\Rightarrow k^2 - 10k + 9 = (k-1)(k-9) < 0$




$\Rightarrow 1 \leq k \leq 9$

$\therefore 3 \leq k \leq 9$

∴ 7개

*26.* 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 $S_n - S_{n-1} = \frac{a_n - n^2}{n+1} = 4n-3 \quad (n \geq 2)$

$\Rightarrow a_n = (4n-3)(n+1) + n^2$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2+1} = 5$

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> $0<x<3$일 때, $x$에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$이다.

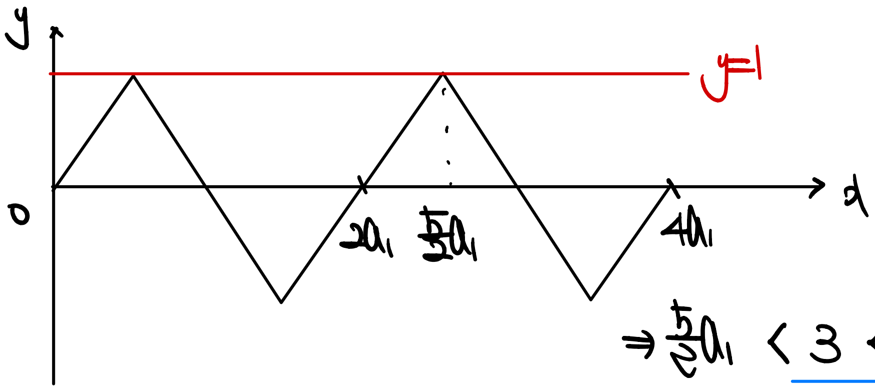
$\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

⟨주기 & 규칙 → 극한⟩

[1] $y=\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ → 주기 : $2\cdot a_n$

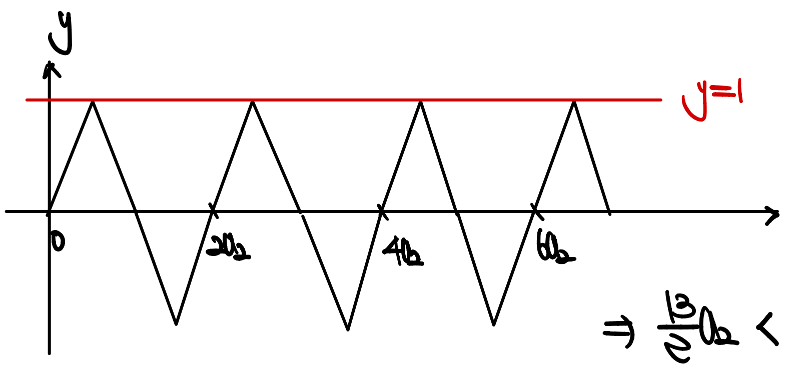
[2] (i) $n=1$ → 주기 : $2a_1$ & 실근 개수 2개




$\Rightarrow \frac{5}{2}a_1 < 3 < 4a_1$

$a_1 > \frac{3}{4}$

(ii) $n=2$ → 주기 : $2a_2$ & 실근 개수 : 4개




$\Rightarrow \frac{13}{2}a_2 < 3 < 8a_2$

$a_2 > \frac{3}{8}$

[3] $a_n < \frac{3}{4n} \xrightarrow[\text{근사}]{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n}$

(∵ n=3, n=4 에도 간단하게 해보세요!)

$\therefore \frac{3}{4}$

28. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx$ $(a>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

↳ 기함수

> 모든 실수 $x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$의 값이 존재한다. ⇒ $x=-1$ 에서 ...

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 $k$가 존재할 때, $g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점] ⟨극한으로 정의된 함수⟩

⇒구간 나누어

① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

[1] $g(x)=\begin{cases} 2x^2 & (x>1) \\ f(x) & (-1<x<1) \\ 2x^2 & (x<-1) \\ 1+\frac{f(1)}{3} & (x=1) \\ 1 & (x=-1) \end{cases}$

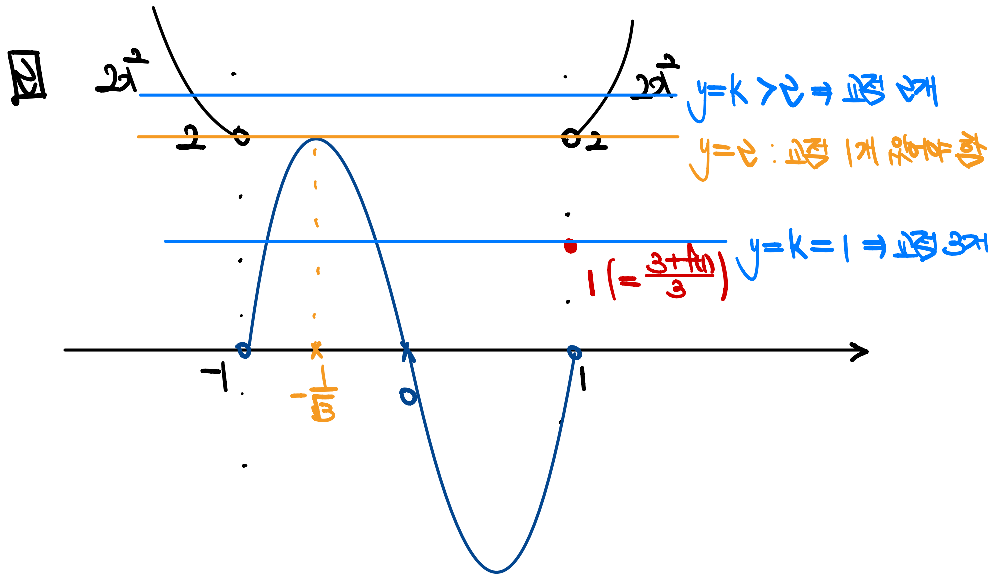
$\Rightarrow x=-1 : \frac{2+(-1)^n+f(-1)}{1+(-1)^n+1}$ : 값 존재 X

⇒ 값이 존재하기 위해서 $2+f(-1)=2$

$\Rightarrow f(-1)=0$

$\Rightarrow f(1)=0$ (by 기)

[2]




$\Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2 \\ f(1)=0 \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{a}{3\sqrt{3}}-\frac{b}{\sqrt{3}}=2 \\ a+b=0 \end{cases}$ $a=3\sqrt{3}$, $b=-3\sqrt{3}$

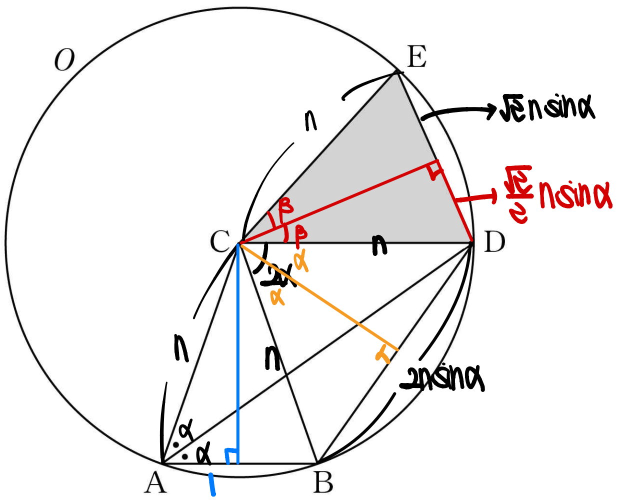
$\Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\sqrt{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{8}$

$g(2)=8$

$\therefore 9\sqrt{3}$

**단답형**

*29.* 그림과 같이 자연수 $n(n \ge 2)$에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 $n$인 원 $O$와 $\overline{AB}=2$를 만족시키는 원 $O$ 위의 두 점 A, B가 있다. ∠BAC를 이등분하는 직선이 원 $O$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $S_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n}\right) = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




[0] 구: $S_n = \frac{1}{2}\cdot n^2 \cdot \sin 2\beta = n^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$

[1] △ABC

$\cos 2\alpha = \frac{1}{n} \longrightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{n}$

$n$, $\sqrt{n^2-1}$, $2\alpha$, $1$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$

[2] $\sin\beta = \frac{1}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cancel{n}\sin\alpha \Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-1}{2n}} = \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$

$2\sqrt{n}$, $\sqrt{n-1}$, β, $\sqrt{3n+1}$

[3] $S_n = n^{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{n-1}}{2\cancel{\sqrt{n}}} \times \frac{\sqrt{3n+1}}{2\cancel{\sqrt{n}}}$

$= \frac{n}{4}\sqrt{3n^2-2n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{\sqrt{3n^2-2n-1}}{4} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3n^2}-(\cancel{3n^2}-2n-1)}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}} = \frac{1}{4}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

∴ 13

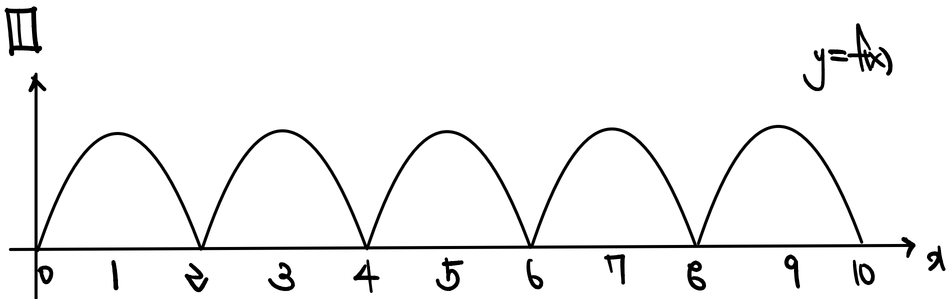
*30.* 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 2$일 때 $f(x) = x(2-x)$이고 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다. 공비가 $r$인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

주기: 2

(가) $r$은 유리수이다.
(나) 함수 $f(x)$가 $x = a_k$에서 극값을 갖고 $0 < a_k < 10$인 자연수 $k$의 개수는 3이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1}+a_n} = \frac{81}{10}$일 때, $a_7 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[1]




by (나) $a_k$: 극값 3개 지나려면 ⇒ 9, 3, 1 ⇒ $r=\frac{1}{3}$ ①
9, 6, 4 ⇒ $r=\frac{2}{3}$ ②

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{a_1} r\cdot a_1 \cancel{r^{n-1}} + \cancel{a_1}\cancel{r^{2n-1}}^{\,r^n}}{r\cdot\cancel{a_1}\cancel{r^{n-1}} + \cancel{a_1}\cancel{r^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 r + r^n}{r+1} = \frac{a_1 r}{r+1} = \frac{81}{10}$

① $r=\frac{1}{3}$

$\frac{a_1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} = \frac{81}{\cancel{10}_5} \Rightarrow a_1 = \frac{162}{5} \xrightarrow[r=\frac{1}{3}]{} a_k = 9, 3, 1 \cdots$ 불가능

② $r=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow a_1 = \frac{81}{4} \xrightarrow[r=\frac{2}{3}]{} a_3 = 9 \rightarrow a_4 = 6 \rightarrow a_5 = 4$

$\therefore a_7 = a_3 \times r^4$

$= 9\times\frac{16}{81} = \frac{16}{9}$

∴ 25

(주의: 4→2→1도 가능 $a_1=4$, $r=\frac{1}{2}$ ⇒ $\frac{4\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \ne \frac{81}{10}$)

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.