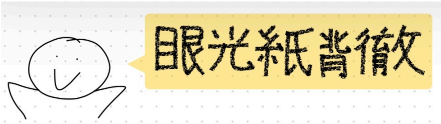


오르비 인생은 초콜릿 상자.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 두 다항식

$$A=x^2+2xy-2y^2,\ B=x^2+3xy+2y^2$$

에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① $x^2+4xy+y^2$ ② x^2+5xy ③ $2x^2+5xy-y^2$ ④ $2x^2+5xy$ ⑤ $2x^2+6xy$

2. $(1+i)+(3-4i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① $3-3i$ ② $3+3i$ ③ $4-3i$ ④ $4+3i$ ⑤ $4-4i$

3. ${}_5C_2$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

${}_5C_2 = \frac{5\times\cancel{4}^{2}}{2\times1} = 10$ (5)

* ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

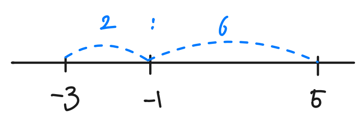
Advice. ${}_5C_2 = {}_5C_3 = 10$
${}_6C_2 = {}_6C_4 = 15$
${}_6C_3 = 20$
꼭. 암기!

4. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(5)에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는? [3점]

2:6

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$-3+2=-1$ (1)



Advice. AB를 $m:n$으로 내분, 외분 공식

(1) 내분

$x=\frac{mb+na}{m+n}$

(2) 외분

$x=\frac{mb-na}{m-n}$

5. 일차함수 $f(x)=2x+k$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(7)=2$ 일 때, $f(k)$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f(2)=7$, $f(2)=k+4=7$, $k=3$

$\therefore f(x)=2x+3$, $f(k)=f(3)=2\times3+3=9$ (2)

기본정의 역함수의 정의

$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$.

6. 이차함수 $y=x^2-2ax+a+1$ 의 그래프가 직선 $y=-2x$ 에 접할 때, 양수 a 의 값은? [3점]

$D=0$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$x^2-2(a-1)x+a+1=0$

$D/4=a^2-2a+1-a-1=a^2-3a$

$=a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$) (3)

정의 접한다 $\Leftrightarrow D=0$

7. $a-b=2$, $a^3-b^3=32$ 일 때, ab 의 값은? [3점]

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$\cancel{2}(4+3ab)=\cancel{32}\,16$

$3ab=12$, $ab=4$ (4)

정의 전개공식의 변형식

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

8. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-x-6\geq 0 \\ x^2-25<0 \end{cases}$$

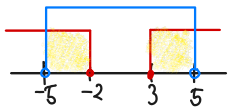
을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$(x-3)(x+2)\geq 0$ $x\leq -2,\ x\geq 3$

$x^2<25$, $-5<x<5$.

$\therefore -5<x\leq -2,\ 3\leq x<5$



$x=\cancel{-4}, \cancel{-3}, -2, \cancel{3}, \cancel{4}$

$\therefore$ 合: -2 // (1)

정석 연립부등식의 해 : 수직선에서 생각!

9. 직선 $y=ax+4$를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x+3)^2+(y+5)^2=1$의 넓이를 이등분할 때, 상수 a의 값은? [3점]

$(-3,-5)$

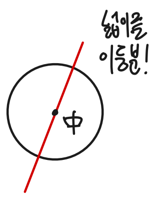
① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$T_1: (x,y)\longrightarrow(x+4,y)$: $y=a(x-4)+4$

$T_2: (x,y)\longrightarrow(-x,y)$: $\underbrace{y=a(-x-4)+4}_{f(x)}$

$f(-3)=-a+4=-5$, $a=9$ // (5)

Advice.



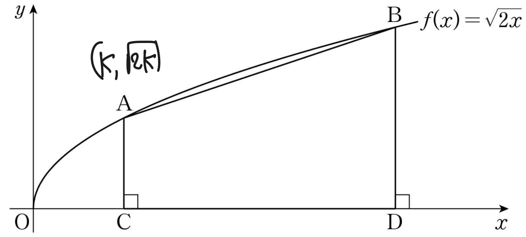
정의 평행이동 ≠ 도형의 평행이동!

$T: (x,y)\longrightarrow(x+a,\ y+b)$에 의하여

$f(x,y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y-b)=0$

10. 그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(k,\ f(k))$, $\mathrm{B}(4k,\ f(4k))$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 넓이가 18일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 값은? [3점]

$(4k,\ 2\sqrt{2k})$



① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{55}$

$\overline{AB}=\sqrt{(3k)^2+(\sqrt{2k})^2}=\sqrt{9k^2+2k}$

$S=\frac{1}{2}\times 3k\times 3\sqrt{2k}=\frac{9}{\sqrt{2}}(\sqrt{k})^3=18$, $(\sqrt{k})^3=(\sqrt{2})^3$, $k=2$.

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$ // (2)

11. 실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $z^2+4\bar{z}=0$일 때, $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$ (a, b는 실수 ; $b\neq0$)

$z^2+4\bar{z} = a^2-b^2+2abi+4a-4bi$

$= \underbrace{(a^2+4a-b^2)}_{=0} + \underbrace{2b(a-2)}_{=0} i = 0$ ($2b \neq 0$)

$\therefore a-2=0$, $\boxed{a=2}$, $4+8-b^2=0$ $\boxed{b^2=12}$

$\therefore a^2+b^2 = 4+12 = 16$ (4)

기본정석 복소수가 같을 조건 (복소수 항등)

a, b, c, d가 실수일 때,

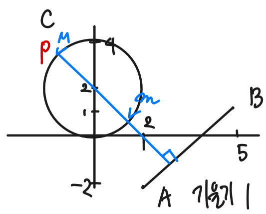
$a+bi = c+di \iff a=c, b=d$

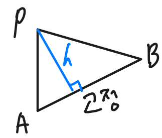
$a+bi = 0 \iff a=0, b=0$

12. 좌표평면 위에 원 $C: x^2+y^2-4y=0$이 있다. 두 점 A$(2, -2)$, B$(5, 1)$과 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P의 x좌표는? [3점]

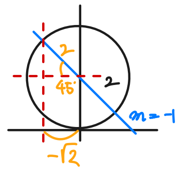
① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

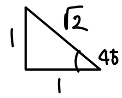
C: 中$(0,2)$, $r=2$.





S가 최대 ⟺ h가 최대

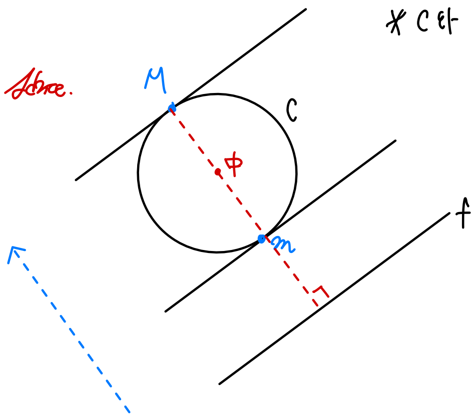




$-\sqrt{2}$ (2)

* C와 f 사이의 거리.

Advice.



13. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ 4x^2-y^2=45 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $\alpha>0$, $\beta>0$) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

$\begin{matrix} 2x & -y \\ x & -2y \end{matrix}$ $y=2x,\ x=2y.$

i) $y=2x.$ $4x^2-4x^2=0 \neq 45$ (X)

ii) $x=2y$ $16y^2-y^2=15y^2=45,\ y^2=3,\ y=\sqrt{3}$

$x=2\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}.$ $\alpha+\beta=3\sqrt{3}$ // (5)

기본정석 〈연립방정식의 해법〉

$\boxed{\text{정석}}$ 연립방정식의 기본 : 미지수가 1개인 일차방정식을 유도!

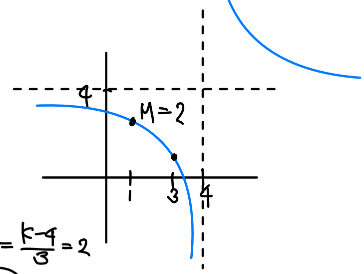
① 연립일차방정식 가감법, 대입법, 등치법.

② 연립이차방정식 { 일차 & 이차 ⇒ 대입!
이차 & 이차 { i) 인수분해 여부 확인 / ii) 최고차항 소거 / iii) 상수항 소거 } ⇒ 일차식 유도 후 대입!

14. $1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=\dfrac{4x-k}{x-4}$의 최댓값이 2가 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

(4,4)

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26



$f(1)=\frac{4-k}{-3}=\frac{k-4}{3}=2$

$k=10$ // (1)

$\boxed{\text{정석}}$ 제한범위 내에서의 최대·최소 : 그래프를 이용한다.

※ $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ 그래프 빨리 그리기

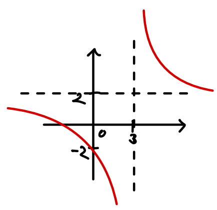
① 점근선 : $x=-\frac{b}{a},\ y=\frac{c}{a}.$

② $f(0)$의 부호로 사분면 특정

ex.) $f(x)=\frac{2x+6}{x-3}$

① 3, 2 잡기

② $f(0)=-2$ ⇒ 사분면.



15. 실수 x에 대한 두 조건

$p : (x-a)(x+2a) > 0$,

$q : |x-1| \le 5$

가 있다. q가 $\sim p$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

$\sim p \Rightarrow q$. $\boxed{P^c \subset Q}$

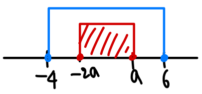
$\sim p : (x-a)(x+2a) \le 0$

$q : -5 \le x-1 \le 5$, $\boxed{-4 \le x \le 6}$

i) $a \ge 0$ ($P^c = \{x \mid -2a \le x \le a\}$.)

$-2a \ge -4$, $a \le 2$

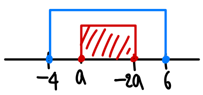
$a \le 6$ ∴ $\boxed{0 \le a \le 2}$



ii) $a < 0$ ($P^c = \{x \mid a \le x \le -2a\}$.)

$a \ge -4$, $-2a \le 6$, $a \ge -3$

$\boxed{-3 \le a < 0}$



∴ $-3 \le a \le 2$, $M+m = -1$ (3)

기본개념

충분조건 필요조건

$p \Rightarrow q$

⇕

$P \subset Q$

16. 어느 청소년 센터에서는 서로 다른 3개의 체육 동아리와 서로 다른 2개의 음악 동아리를 운영한다. 두 청소년 A와 B가 이 5개의 동아리 중에서 다음 조건을 만족시키도록 동아리를 선택하는 경우의 수는? [4점]

(가) A와 B는 각자 1개 이상의 체육 동아리와 1개 이상의 음악 동아리를 포함한 서로 다른 3개의 동아리를 선택한다.

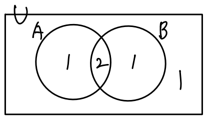
(나) A는 선택하고 B는 선택하지 않은 동아리의 개수는 적어도 1이다.

$A-B$ ① or ② ~~3 4 5~~

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

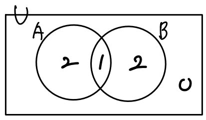
$A \cap B$ 3 Case 나누기. 기본으로 계산.

$\boxed{n(A-B)=1}$



$A\cap B$	$A-B$	$B-A$	$(A\cup B)^c$	(경우의 수)
체체	음	음	체	${}_3C_2 \times 2! \times {}_1C_1$
음체	아무거나 상관 X			${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 3!$
음음	체	체	체	${}_2C_2 \times 3!$

$\boxed{n(A-B)=2}$



$A\cap B$	$A-B$	$B-A$	(경우의 수)
체	음체	음체	${}_3C_1 \times 2! \times 2!$
음	체체	체음	${}_2C_1 \times {}_3P_2 \times 2! \times \frac{1}{2!}$

음, 체 한개씩 배열.

$({}_3C_2 \times 2! \times {}_1C_1) + ({}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 3!) + ({}_2C_2 \times 3!) + ({}_3C_1 \times 2! \times 2!) + ({}_2C_1 \times {}_3P_2 \times 2! \times \frac{1}{2!})$

6, 36, 6, 12, 12

$6+36+6+12+12 = 72$ (5)

Advice. $\times \frac{1}{2!}$ 이유?

체 체 음, 체 한개씩 배열.

${}_2C_1 \times {}_3P_2 \times 2! \times \frac{1}{2!}$

'체'가 2개 들어가는 부분에는 ${}_2C_1$과 $2!$의 중복! 순서만 다르지 같은 Case ×2개 有.

ex.) a b ← c 추가 ⊜ a c ← b 추가

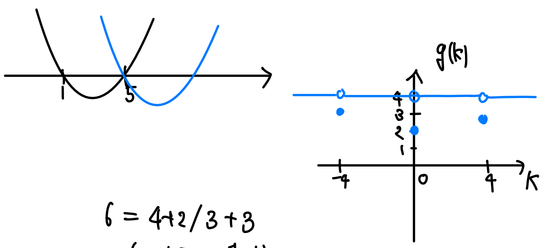
$(x-1)(x-5)$ f(x)는 x축으로 k만큼 평행이동

17. 이차함수 $f(x)=x^2-6x+5$가 있다. 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)f(x-k)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 하자. $g(k-7)+g(k+1)=6$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

8차이 나는 두 함숫값 합 6.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

--------→ 움직이면서 g(k) 그리기



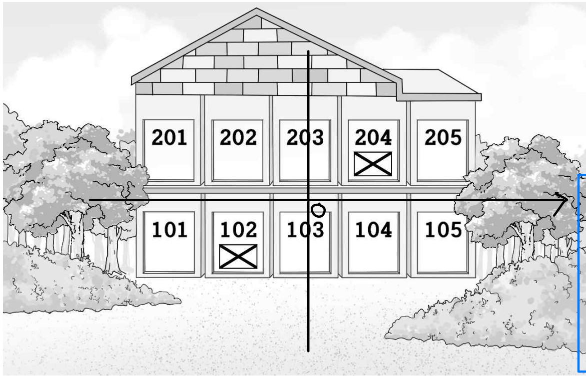
$6 = 4+2 / 3+3$
(x좌표 8차이)

i) $3+3$
$k-7=-4$

ii) $4+2$
$k-7=-8, 0$

$k_1+k_2+k_3 = 21-12 = 9$ (1)

18. 어느 숙소에는 그림과 같이 객실 번호가 적힌 10개의 객실이 있다.



위아래 원점대칭
→ 아래층만 계산하고 (A 배열) ×2.

관광객 A, B, C를 포함한 5명의 관광객이 다음 규칙에 따라 10개의 객실 중에서 각자 서로 다른 한 객실에 숙박하는 경우의 수는? [4점]

> (가) 5명의 관광객 중 어느 관광객도 객실 번호가 102, 204인 객실에는 숙박하지 않는다.
> (나) A와 B가 숙박하는 객실 번호의 차는 1 또는 100이다. 이웃한다.
> (다) A와 C가 숙박하는 객실 번호의 차는 4보다 크고 100이 아니다. 층 다르고, 이웃하지 않는다.

① 800 ② 840 ③ 880 ④ 920 ⑤ 960

//// 이용해 A 위치 따라 B, C case 분류, 나머지 2명 배열 ($\times {}_5P_2$)

A	B	C	
101	201	202, 204, 205	3
103	104	201, 202, 205	6
	203	〃	
104	103	4	8
	105	4	
105	104	3	6
	205	3	

$3+6+8+6 = 23.$

(A 2층 case는 동일)

$\therefore \underbrace{(23\times 2)}_{ABC\ 배열} \times \underbrace{{}_5P_2}_{나머지} = 920$ (4)

19. 최고차항의 계수가 1인 서로 다른 두 삼차다항식 $f(x)$, $g(x)$와 최고차항의 계수가 1인 서로 다른 두 이차다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 다항식 $f(x)+g(x)$는 세 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$, x^2-5x+6으로 각각 나누어떨어진다.
> (나) 두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$는 각각 다항식 $f(x)-g(x)$로 나누어떨어진다.

$f(1)-g(1)=0$. $f(x)-g(x)$는 $(x-1)$을 인수로!

$f(1)=g(1)$이고 $f(2)=1$일 때, $g(3)$의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$f(x)+g(x)=2\underbrace{(x-2)(x-3)}(x-\alpha)$ "으로 만들 수 있는 이차식?

$P_1(x)=(x-2)(x-\alpha)$
$P_2(x)=(x-3)(x-\alpha)$) $\underline{f(x)-g(x)}$가 공통인수

2차 불가능 ($P_1(x)$와 $P_2(x)$가 이차식 공통인수 X)

〈이유〉
$P_1(x)=k(x-\alpha)\times\frac{1}{k}(x-2)$
$P_2(x)=k(x-\alpha)\times\frac{1}{k}(x-3)$

1차 $k(x-\alpha)$

상수 $f(x)-g(x)=C$, $f(1)-g(1)=C=0$
$\therefore f(x)-g(x)=0$ (X)

$f(x)-g(x)=k(x-\alpha)$ $(k\neq 0)$. $f(1)-g(1)=0$이므로 $\boxed{\alpha=1}$

$f(x)+g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$, $f(x)-g(x)=k(x-1)$ $\boxed{f(2)\text{의 이용}}$

⊕ $f(2)+g(2)=0$, $f(2)-g(2)=k$.
$2f(2)=\boxed{2=k}$

⊖ $f(3)+g(3)=0$, $f(3)-g(3)=2\times2=4$
$2g(3)=-4$, $g(3)=-2$ // (2)

$\boxed{\text{기본정석}}$ 〈인수정리〉
$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다 $\Leftrightarrow f(x)$는 $(x-\alpha)$로 나누어 떨어진다.

Advice. 인수정리를 이용하면 ...

$f(1)-g(1)=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)$는 $(x-1)$ 인수로.
$P_1(x), P_2(x)$는 $f(x)-g(x)$로 나누어 ~ $\Leftrightarrow P_1(x), P_2(x)$ $(x-1)$ 인수로.
$f(x)+g(x)$ $P_1(x), P_2(x)$로 나누어 ~ $\Leftrightarrow f(x)+g(x)$ $(x-1)$ 인수로.

$\therefore f(x)+g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$

20. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 20 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 명제 '모든 $x\in U$에 대하여 $\{x, x^2+1\}\not\subset A$이다.'는 거짓이다.
> (나) 자연수 x에 대한 두 조건 p, q가
> p: x는 $\frac{1}{2}x\in A$인 20 이하의 자연수이다.
> q: x는 $x\in A$인 20 이하의 짝수이다.
> 일 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(x: $2n$, $\frac{1}{2}x$: n, x: $2n$)

$\boxed{n\in A \Leftrightarrow 2n\in A}$ 진리집합 같다.

$1\not\in A$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은? [4점]

① 50 ② 53 ③ 56 ④ 59 ⑤ 62

(나) Q의 원소를 $2n$ $(2n\in A)$이라고 하면, $P=Q$이므로
$2n\in P$, $n\in A$. $\therefore \boxed{2n\in A \Leftrightarrow n\in A}$

(가) 어떤 $x\in A$에 대하여 $\{x, x^2+1\}\subset A$는 참이다.
$\cancel{(1,2)}$, $\cancel{(2,5)}$, $(3,10)$, $\cancel{(4,17)}$, $\cancel{(5,26)\cdots}$
$(1\not\in A)$
(나)에 의해 2or4$\in A \Leftrightarrow 1\in A$ (X)

$\therefore \{3,10\}\subset A$.

A: 3, 5, 6, 10, 12, 20

$m=3+5+6+10+12+20$
$=56$ // (3)

a,b 구하기. 관계식 2개 필요!

21. 두 실수 a, $b\,(b>0)$에 대하여 함수

g(x) y절편 >0.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x\le 0) \\ -x^2+ax-b & (x>0)\end{cases}$$

g(x)

h(x) = −g(−x) ⇒ 원점대칭!

주의

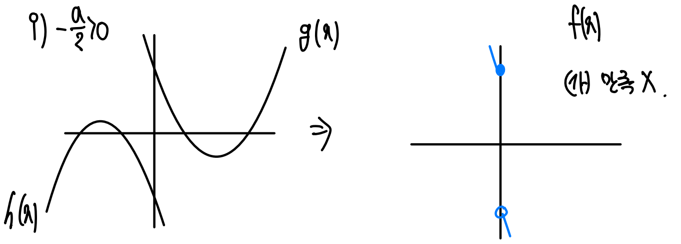
이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)=p+q\sqrt{2}$이다. $p-q$의 값은? (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 개수는 1이다.
> (나) 모든 정수 k에 대하여 $f(k)f(k+1)\ge 0$이다.

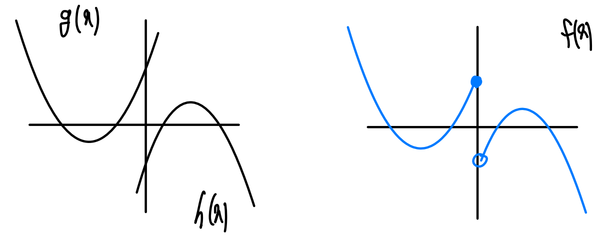
① -1 ② 3 ③ 7 ④ 11 ⑤ 15

① f(x) 개형 판단하기.

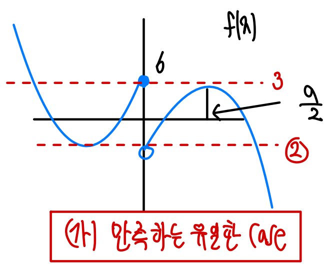
i) $-\frac{a}{2}>0$



ii) $-\frac{a}{2}<0$



② (가) 만족시키도록 위아래로 이동시키기!



관계식1

$f(\frac{a}{2})=h(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}-b=b$

$2b=\frac{a^2}{4}$, $\boxed{a^2=8b}$

(나) 모든 정수 k에 대하여 $f(k)f(k+1)\ge 0$

$k=0$: $f(0)f(1)\ge 0$, $f(1)\ge 0$, but $f(1)>0$ 이면 $f(-1)<0$, $f(-1)f(0)<0$ (x)

∴ $\boxed{f(1)=f(-1)=0}$ 관계식 2

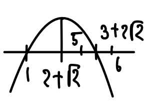
$f(1)=-1+a-b=0$, $\boxed{b=a-1}$

$a^2=8(a-1)$, $a^2-8a+8=0$

$a=4\pm\sqrt{16-8}=4\pm 2\sqrt{2}$.

if $a=4+2\sqrt{2}$

$f(5)f(6)<0$ (x)



∴ $a=4-2\sqrt{2}$, $b=3-2\sqrt{2}$

$f(2)=2a-b-4=8-4\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}-4=1-2\sqrt{2}$.

∴ $p-q=3$ (2)

단답형

22. 두 집합

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 5, 9\}$

에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 구하시오. [3점]

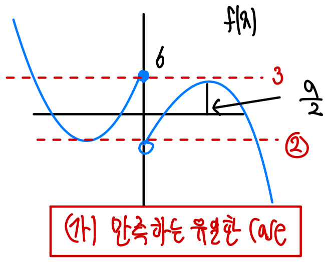
14

23. 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 $(g\circ f)(9)$의 값을 구하시오. [3점]

$g\circ f(9)=g(f(9))=g(12)=143$

기본공식 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

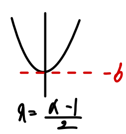
Advance. 21번 다른 풀이



$g(-1)=0$, $g(x)=x^2+ax+b=(x+1)(x-\alpha)$

라고 하자. $\boxed{a=1-\alpha,\ b=-\alpha}$

(미지수 α로 통일, 관계식 1개 필요)

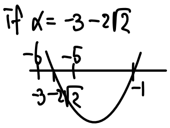


$f(\frac{\alpha-1}{2})=(\frac{\alpha+1}{2})\times(-1)\times(\frac{\alpha-1}{2})$

$=-(\frac{\alpha+1}{2})^2=-b=\alpha$.

(계산생략) $\alpha=-3\pm 2\sqrt{2}$.

if $\alpha=-3-2\sqrt{2}$



$f(-6)f(-5)<0$ (x)

∴ $\alpha=-3+2\sqrt{2}$.

$f(2)=-4+2a-b=2(1-\alpha)+\alpha-4$

$=-\alpha-2=1-2\sqrt{2}$, $p-q=3$

2-3i도 근!

24. 두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+3i$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

$a=2\times 2=4$ (두근 합)　$b=2^2+3^2=13$. (두근 곱)

$a^2+b^2=16+169=185$

Advice. * 켤레근

$\boxed{\text{정석}}$ 계수가 실수인 다항식 $f(x)$에 대하여
α가 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $\bar{\alpha}$도 $f(x)=0$의 근이다.

* 유사 '켤레근' (무리수)

$\boxed{\text{정석}}$ 계수가 유리수인 다항식 $f(x)$에 대하여
$a+b\sqrt{m}$ (a, b, m은 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)이
방정식 $f(x)=0$의 근이면 $a-b\sqrt{m}$도 $f(x)=0$의 근이다.

* 켤레근의 합 & 곱 ($a\pm bi$)

합! $2a$　곱! a^2+b^2.

$f^{-1}(5)=1, f^{-1}(b)=3$

25. 무리함수 $y=\sqrt{2(x-1)}+a$의 역함수의 그래프가 두 점 $(5, 1)$, $(b, 3)$을 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f(x)=\sqrt{2(x-1)}+a$.　$f(1)=5$, $f(3)=b$

$f(1)=\boxed{a=5}$　$f(3)=2+5=\boxed{7=b}$

$a+b=12$

$\boxed{\text{기본정석}}$ 역함수의 정의

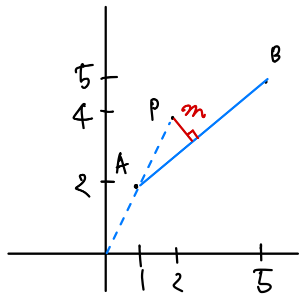
$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
$f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$.

26. 좌표평면 위의 원점 O와 점 A$(1, 2)$에 대하여 선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점을 P, 점 B$(5, 5)$에 대하여 선분 AB 위의 한 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

점과 직선 사이의 거리!

$\overline{OA}=\overline{AP}$
P$(2,4)$
(A가 OP 중점)

or 공식: $\left(\frac{2\times1-1\times0}{2-1}, \frac{2\times2-1\times0}{2-1}\right)$



$y=\frac{3}{4}(x-1)+2$

$3x-4y+5=0$

$d=\frac{|-5|}{5}=1$, $\boxed{m=1}$

M : A or B.

i) $\overline{PA}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

ii) $\overline{PB}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\boxed{M=10}$

$\therefore M+m=11$

도형문제 : 닮음, 원주각, 넓이, 접선조건 등등 적극 이용

27. 두 정수 a, b에 대하여 x에 대한 방정식

$f(x)$ $x^3+ax^2+bx-3a=0$은 a를 포함한 서로 다른 세 정수를 근으로 갖고, x에 대한 방정식 $x^3+bx^2-2ax-2ab=0$은 정수인 근을 오직 하나만 갖는다. $a-b$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)$

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & a & b & -3a \\ & & a & 2a^2 & 2a^3+ab \\ \hline & 1 & 2a & 2a^2+b & 2a^3-3a+ab=0 \end{array}$$

$a(2a^2-3+b)=0$

if $a=0 \to b=3$

$g(x)=x^2(x+3)$

정수근 3개 (X)

$\therefore a\neq 0$

$2a^2-3+b=0$, $\boxed{b=-2a^2+3}$

$f(x)=(x-a)\underbrace{(x^2+2ax+2a^2+b)}_{\text{정수근! }(\neq a)}$ ← 길 $\boxed{\text{기본정석}}$ ③ 풀이

$D=a^2-2a^2-b=-a^2+2a^2-3=k^2$ (k는 정수)

$a^2-k^2=3$. $a^2=4$, $\boxed{a=\pm 2}$ $\boxed{b=-2\times 4+3=-5}$

$(k^2=1)$

i) $a=2$인 경우

(계산생략...) $g(x)=(x-2)(x+2)(x-5)$ (X)

$\therefore a=-2$ $b=-5$ $a-b=3$

cf. "인 경우 $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$, $g(x)=(x-5)(x^2+4)$로 성립.

$\boxed{\text{기본정석}}$ 〈이차방정식의 정수근〉

부정방정식, 'ax' '근이 정수'라는 조건으로 해결 가능 case.

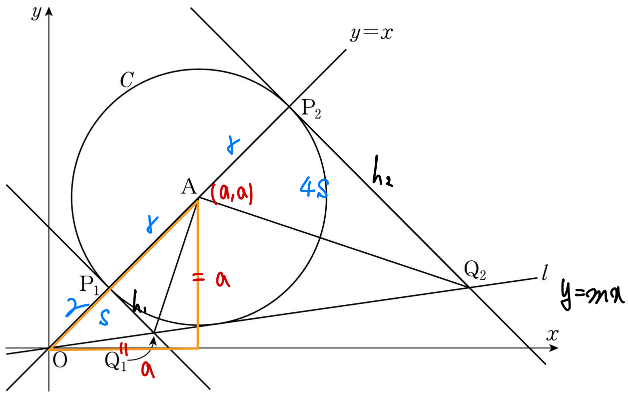
① 근과 계수의 관계 이용

② $b^2-4ac\ge 0$ 만족시키는 범위를 먼저 구해본다.
↳ 확히 쓸 조건 없을 때, '근이 정수'에 착안하여 평방시 이용 정.

③ $b^2-4ac=k^2$으로 놓고 근이 정수임을 이용한다.

28. 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 점 A를 중심으로 하고 x축과 만나지 않는 원 C에 대하여 원점 O를 지나고 원 C에 접하는 두 직선 중 기울기가 작은 직선을 $l : y=mx$라 하자. 원 C와 직선 $y=x$의 교점 중 x좌표가 작은 것을 $\mathrm{P_1}$, x좌표가 큰 것을 $\mathrm{P_2}$라 하면 $\overline{\mathrm{OP_1}}=2$이다. 원 C 위의 점 $\mathrm{P_1}$에서의 접선과 직선 l의 교점을 $\mathrm{Q_1}$, 원 C 위의 점 $\mathrm{P_2}$에서의 접선과 직선 l의 교점을 $\mathrm{Q_2}$라 하면 삼각형 $\mathrm{AQ_2P_2}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{AP_1Q_1}$의 넓이의 4배이다. $m=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



접근) P_1 좌표 이용해서 l 위의 점 알아내기 or

l은 원점에서 C에 그은 접선이다 ⇒ 접선의 방정식 구하기 위해서는 中좌표, r 필요! 이차수 접기(r)

$\boxed{r\text{ 구하기}}$ 〈조건〉

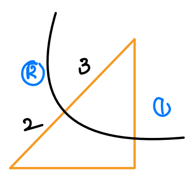
1) $\angle OQ_1P_1 \sim \angle OQ_2P_2$

2) $\triangle AQ_1P_1 : \triangle AQ_2P_2 = 1:4$

$\cancel{2} : h_1 = \cancel{2}(1+r) : h_2$, $\boxed{h_2=h_1(1+r)}$

$\cancel{\frac{1}{2}\times r}\times h_1 : \cancel{\frac{1}{2}\times r}\times h_2 = 1:4$, $\boxed{h_2=4h_1}$

$1+r=4$, $\boxed{r=3}$



① ⟶ $a=5\times\frac{1}{\sqrt2}=\boxed{\frac{5}{\sqrt2}}$

$\therefore$ 中$\left(\frac{5}{\sqrt2},\frac{5}{\sqrt2}\right)$

$mx-y=0$ $(m<1)$

$d=\dfrac{\left|\frac{5}{\sqrt2}(m-1)\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{-5(m-1)}{\sqrt{2(m^2+1)}}=3$ $(d=r)$

$25m^2-50m+25=18m^2+18$, $7m^2-50m+7=0$

$m=\frac{1}{7}$, $p+q=8$

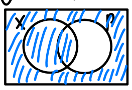
Advice. 〈원의 방정식 – 접선의 방정식 구하기〉

접점이 주어진 경우 $x_1x+y_1y=r^2$ 이용 / 원의 중점을 원점으로 옮긴다 (평행이동) 이용!

기울기가 주어진 경우 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이용 / $D=0$ / $d=r$ 이용

원 밖의 한 점 $D=0$ / $d=r$ 이용

U $X\cup P^c$ $(=(P-X)^c)$

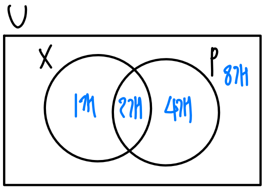


$\frac{a(x-2)+2a-an}{x-2}-n = \frac{a(2-n)}{x-2}+a-n$ (<0)

29. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $P=\{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $n(X-P)\times n(X\cup P^C)=11$ ∋ $X-P \subset X\cup P^c \Rightarrow n(X-P) < n(X\cup P^c)$
>
> (나) 집합 X의 모든 원소의 곱이 M일 때, M의 양의 약수의 개수는 16이다.

$P=\{2,3,5,7,11,13\}$, $n(P)=6$.



① $n(X-P)=1$
② $n((P-X)^c)=11$ 이니 $n(P-X)=4$ $(n(U)=15)$
③ $n(P)=6$이니 $n(P\cap X)=2$
④ 마지막 $n((X\cup P)^c)=8$.

$\therefore X=\{$소수 소수 1/합성수$\} \Rightarrow M=$소수$\times$소수$\times\alpha$

* 양의 약수 개수 16 = 〈소인수분해〉
- 16×1 — O^{15} — 불가능
- 4×4 — $O^3\times O^3$ — 불가능
- 8×2 — $O^7\times O$ — 불가능
- $4\times2\times2$ — $O^3\times O\times O$ — $\alpha=O^2\times O$ 꼴
- $2\times2\times2\times2$ — $O\times O\times O\times O$ — $\alpha=$소수$_1\times$소수$_2$ 꼴.

i) $\alpha=O^2\times O$ 꼴 $(M=O^3\times O\times O)$

$\alpha=$ 1 4 6 8 9 10 12 14 15
8 = $2^2\times2$, 12 = $2^2\times3$

2가 아닌 소수 택 2 ⇒ $_5C_2$ 2 선택, 3이 아닌 소수 택 1 ⇒ $_4C_1$ ⇒ $10+4=14$

ii) $\alpha=$소수$_1\times$소수$_2$ 꼴 $(M=O\times O\times O\times O)$

$\alpha=$ 1 4 6 8 9 10 12 14 15
6 = 2×3, 10 = 2×5, 14 = 2×7, 15 = 3×5

$4\times{}_4C_2=4\times6=24$

$\therefore 14+24=38$

30. 실수 $a\,(a\neq0)$과 2보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid x\neq2$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2\ \text{또는}\ 2<x<n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\geq n)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

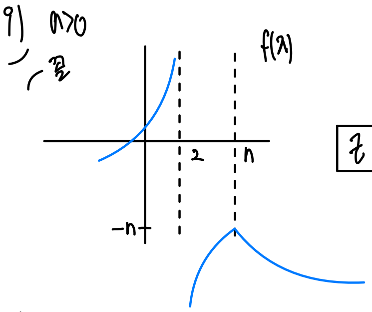
> (가) $g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $\frac{3}{2}n$이다.
>
> (나) $g(|f(5)|)\times g(n)=6$

$|f(x)|$ & (x축과 만나는 점) 2개 $(|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0)$

식 이용 ⇒ n에 관한 관계식 찾기
↳ $f(x)$, $g(t)$ Graph 개형 판단 우선!

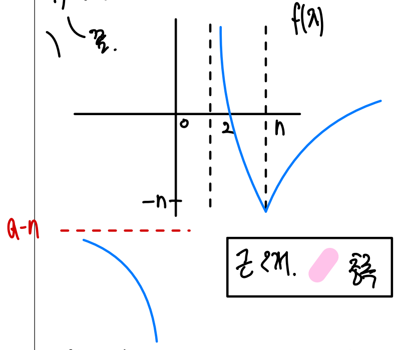
$$f(x)=\begin{cases}\frac{a(2-n)}{x-2}+a-n & (x<2,\ 2<x<n) \quad (n,-n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\geq n) \quad (n,-n)\end{cases}$$

i) $a>0$ 꼴



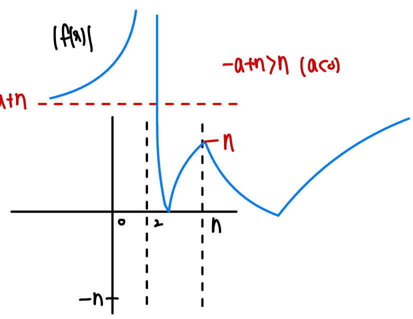
$\boxed{2\text{개 X. 모순.}}$

ii) $a<0$ 꼴.

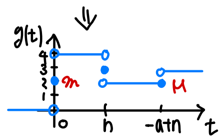


$\boxed{2\text{개. 충족}}$

⇒



$|f(x)|$, $-a+n$, $-a+n>n$ $(a<0)$



(나) $g(|f(5)|)\times g(n)=6$, $g(|f(5)|)=2$,
$|f(5)|=0$, $n<|f(5)|\leq\frac{3}{2}n$.

$\therefore -a+n=\frac{3}{2}n$, $\boxed{a=-\frac{1}{2}n}$.

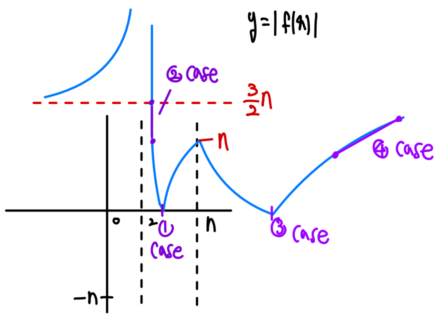
" 이용, $f(5)$를 n에 대한 식으로 표현.

(다음장에서 마저 설명...)

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

29. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $P=\{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n(X-P)\times n(X\cup P^C)=11$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱이 M일 때, M의 양의 약수의 개수는 16이다.



Advice. "f(x)=t의 서로다른 실근의 개수를 g(t)"
2, 3 등에 의. 연습 많이 해두기
(y=t를 이동하며 판단)

30. 실수 $a\,(a\neq 0)$과 2보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid x\neq 2$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\geq n) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $\frac{3}{2}n$이다.
(나) $g(\lvert f(5)\rvert)\times g(n)=6$

$(a=-\frac{1}{2}n)$

$$\frac{ax-an}{x-2}-n=\frac{-\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2}n^2-nx+2n}{x-2}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}nx+\frac{1}{2}n^2+2n}{x-2}=\frac{-3nx+n^2+4n}{2(x-2)}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-3nx+n^2+4n}{2(x-2)} & (x<2,\ 2<x<n) \\ \frac{1}{2}n\sqrt{x-n}-n & (x\geq n) \end{cases}$$

$\boxed{|f(5)|=0,\ n<|f(5)|\leq\frac{3}{2}n.}$

i) $5<n$

$|f(5)|=\left|\frac{n^2-11n}{6}\right|=\left|\frac{n(n-11)}{6}\right|=0$, $\boxed{n=11}$ ①

$\cancel{n}<\cancel{n}\left|\frac{n-11}{6}\right|\leq\frac{3}{2}\cancel{n}$, $6<n-11\leq 9$, $17<n\leq 20$, $\boxed{n=18,19,20}$ ②

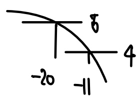
절댓값 벗기기 : ② case에서 $f(5)>0$, $|f(5)|=f(5)$

ii) $5\geq n$

$|f(5)|=n\left|\frac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\right|=0$, $\sqrt{5-n}=2$, $5-n=4$, $n=1$ (X) $(n\geq 2)$ ③

$\cancel{n}<\cancel{n}\left|\frac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\right|\leq\frac{3}{2}\cancel{n}$, $1<\frac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\leq\frac{3}{2}$, $4<\sqrt{5-n}<5$, $-20<n<-11$ (X)

절댓값 벗기기 : ④ case에서 $f(5)>0$, $|f(5)|=f(5)$



$\therefore 11+18+19+20=68$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.