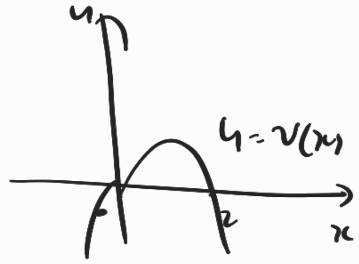
9. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -3t^2 + 6t$$

이다. 양수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120



$\int_0^a -3t^2+6t\,dt$

$= -a^3+3a^2 = 0 \Rightarrow a=3$

$\int_0^6 |-3t^2+6t|\,dt$

$= (-t^3+3t^2)_0^2 - (-t^3+3t^2)_2^6$

$= 4+112 = 116$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 10 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ -19 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$\Rightarrow \sum_{k=n}^{3n} a_n = 0$

10 10 −19 / 10 10 −19 / ······ / 10 10 −19 /

"한 묶음"이라하자. 한 묶음의 합은 10+10−19=1

n으로 가능한 경우의 수

$-19 + \underbrace{1 + \cdots + 1 + 1}_{19개} = 0 \cdots ①$

−19 / ○ / ··· / ○ / ○

$10\ -19 + \underbrace{1 + \cdots + 1 + 1}_{9개} = 0 \cdots ②$

10 −19 / ○ / ··· / ○ / ○

① $\Rightarrow n = \frac{1}{2}(3\times19+1) = 29$

② $\Rightarrow n = \frac{1}{2}(3\times9+2) = 14.5$ (불가능) $\therefore n = 29$

11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

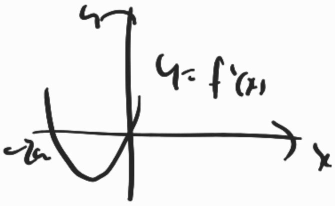
$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -40일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$

i) $a>0$

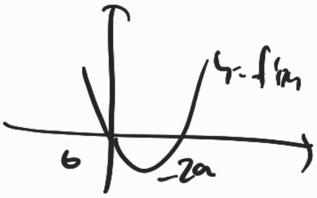


(극소) $= f(0) = 4a = -40$

$\Rightarrow a=-10$

가정에 모순!

ii) $a<0$



(극소) $= f(-2a) = -8a^3+12a^3+4a$

$= 4a^3+4a = -40$

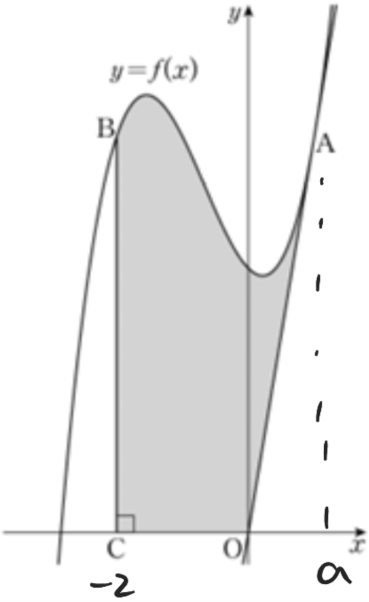
$\Rightarrow a^3+a+10 = (a+2)(a^2-2a+5)$

$\Rightarrow a=-2$

$f(2) = 8+12a+4a = 16a+8 = -24$

12. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 B$(-2,\ f(-2))$에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$　② $\frac{47}{4}$　③ $\frac{49}{4}$　④ $\frac{51}{4}$　⑤ $\frac{53}{4}$



$$\frac{f(a)}{a} = f'(a)$$

$\Rightarrow a^3+2a^2-a+4 = 3a^3+4a^2-a$

$\Rightarrow 2a^3+2a^2-4$

$= 2(a-1)(a^2+2a+2)$

$\Rightarrow a=1,\ f(a)=6$

$(\text{넓이}) = \int_{-2}^{1} x^3+2x^2-x+4\,dx - \frac{1}{2}a f(a)$

$= \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right)_{-2}^{1} - 3$

$= -\frac{15}{4}+6+\frac{3}{2}+12-3$

$= \frac{51}{4}$

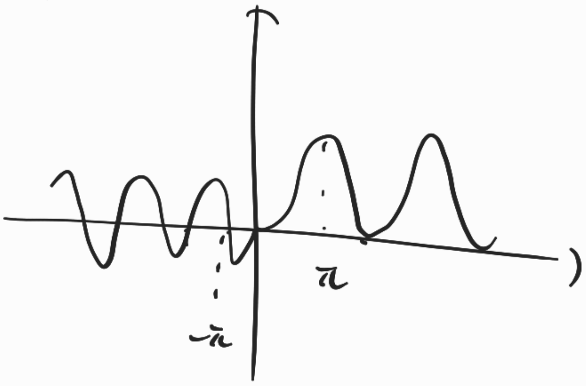
13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

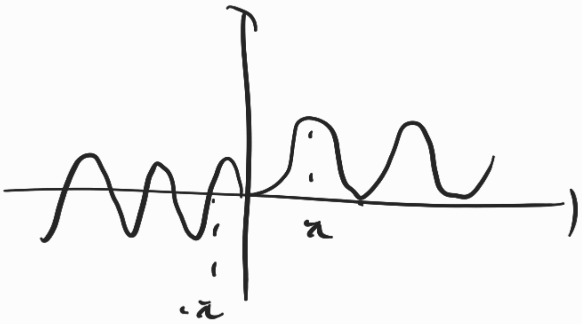
① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

$a>0$



$$\left.\begin{matrix} M=2 \\ m=-a \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+a=4 \Rightarrow a=2$$

$a<0$



$$M=\begin{cases} 2 & (-2<a<0) \\ -a & (a\leq -2) \end{cases}$$

$m=0$

$M-m=4 \Rightarrow M=4 \Rightarrow a=-4$

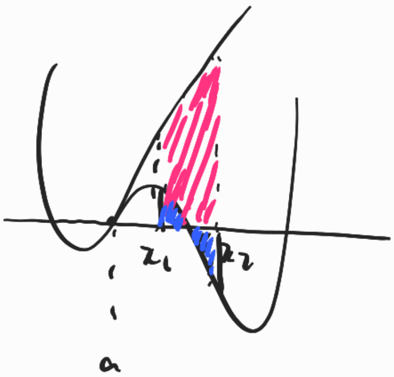
(가능한 모든 a의 곱) $= 2\times(-4) = -8$

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1 \le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
> $$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
> 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a \le -1$ 또는 $a \ge 3$이다.

$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29



식의 의미를 살펴봅시다.

대충 그림처럼 a, x_1, x_2를 잡으면...

//// → $\int_{x_1}^{x_2} f(t)-f(a)\,dt$

//// → $\int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)\,dt$

겹쳐요.

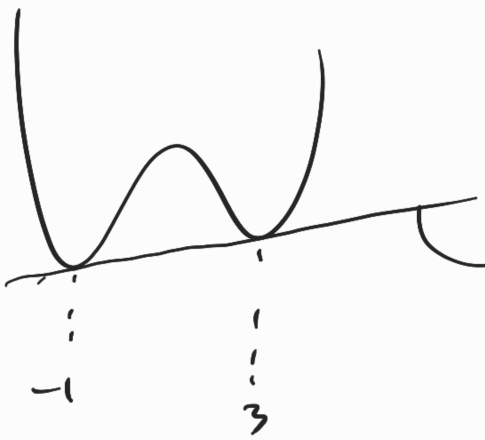
그렇다면 접선을 $l(x)$라 하면 //// − //// = $\int_{x_1}^{x_2} l(x)-f(x)\,dx$ 가 될겁니다.

다시보니 이 적분값 인것이죠

모든실수 x_1, x_2에대해 이 적분 값이 양수이려면

$x=a$에서의 접선이 항상 $f(x)$ 그래프보다 아래에 있어야 합니다. (또는 같거나)

가능한 a범위가 $a\le-1$, $a\ge3$이니까 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같습니다.



이를 $y=mx+n$ 라 하면

$f(x)-(mx+n)=(x+1)^2(x-3)^2$

이때 $f(1)=15 \Rightarrow m+n=-1$

$f'(1)=1 \Rightarrow m=1$

$\Rightarrow (m,n)=(1,-2)$

$\Rightarrow f(4)=4m+n+25=4-2+25$

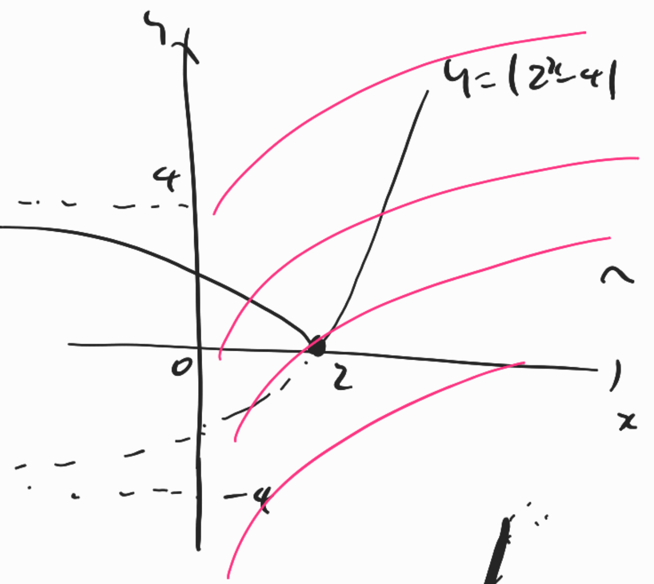
$=27$

15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$　② 2　③ $\dfrac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$



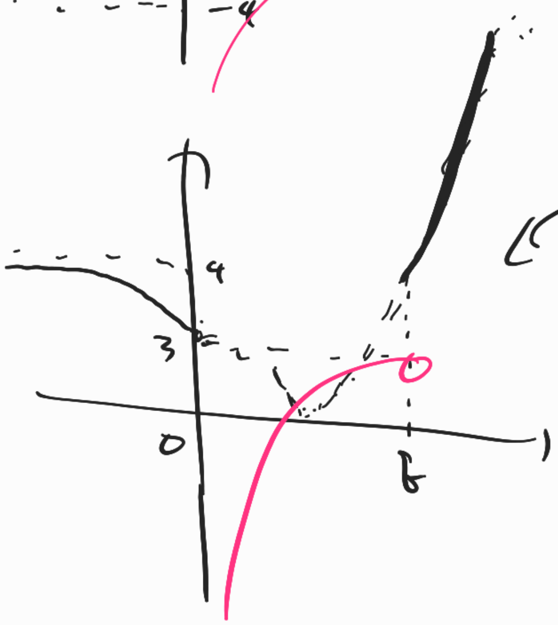
대략 이런 표상을 떠올릴 수 있겠네요.

f가 일대일 대응이라면 ($\mathbb{R}$으로의)

f의 치역에 임의의 음수가 속해야 할테니...

$p=0$을 이끌어 낼 수 있겠네요

또한 $\{f(x) \mid x \ge q\}$가 $\{4 \le x\}$가 되어야 할 테니



와 같이 $y=f(x)$의 개형을 도출할 수 있겠습니다..

따라서 $p=0$, $2^q-4=4 \Rightarrow q=3$

$(\log_2 q)+a=3 \Rightarrow a=3-\log_2 3$

$\therefore f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\log_2 3+\log_2\frac{3}{2}$

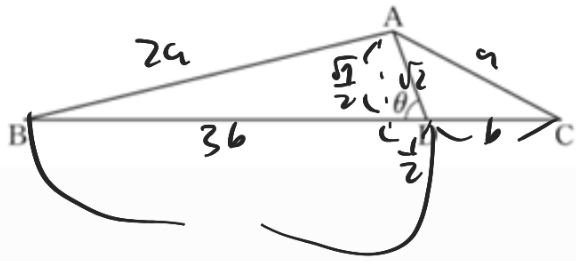
$=3+\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

$=2$

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3:1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle\mathrm{ADB}=\theta$라 하자.

$$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2},\quad \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\Rightarrow 4a^2=\left(3b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

$a^2=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ (∵ 피타고라스 Th.)

을 연립하면

$\left(3b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=4\left(\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow 5b^2-7b-6=(5b+3)(b-2)=0$

$\Rightarrow b=2,\ a=2\sqrt{2}$

○ABD의 외접원 반지름을 R라 하면

$\frac{2a}{\sin\theta}=2R \Rightarrow R=\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{14}/4)}=\frac{8}{\sqrt{7}}$

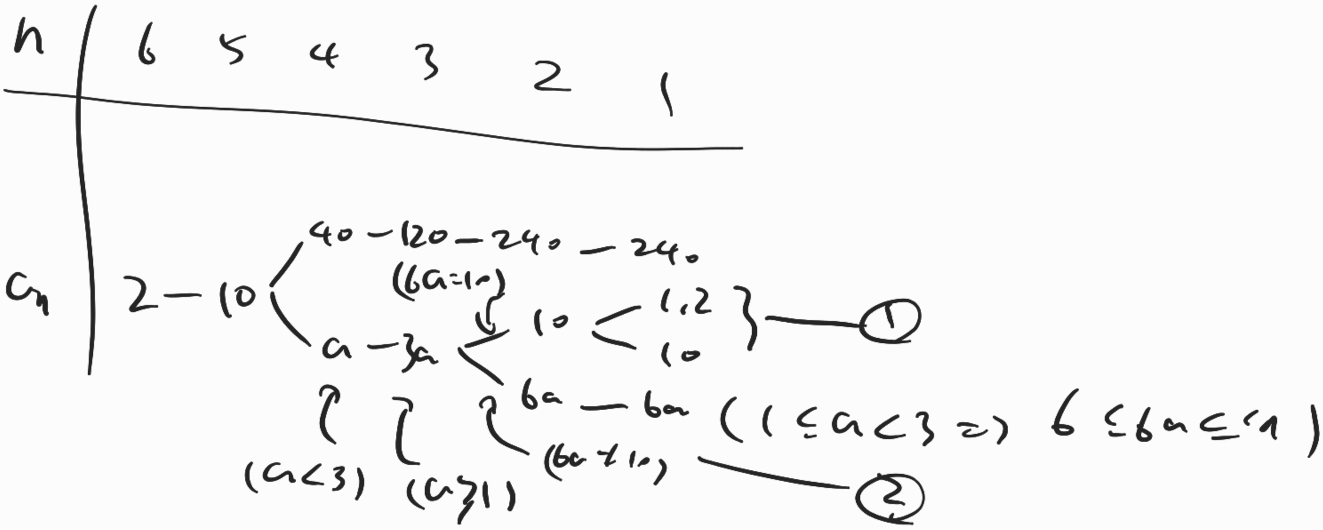
∴ 외접원 넓이 : $\frac{64}{7}\pi \Rightarrow p+q=71$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \ge 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

역추적해봅시다. 딱히 방법이 안떠오르네요



a_1이 자연수입니다. 따라서 ①, ② 통틀어 a_1로 가능한 값은 1, 2, 6 ~ 17 입니다.

∴ 모든 a_1의 값은 $1+2+6+\cdots+17+240 = 3+138+240$
$= 381$

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x)$가 $x=0$에서 연속 $\Rightarrow -f(0)=|f(0)|-8 \Rightarrow f(0)=4$ — ①

〃 〃 에서 미분가능 $\Rightarrow -f'(0)=$ ($|f(x)|$의 $x=0$에서 좌미분계수) — ②

$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능 $\Rightarrow$

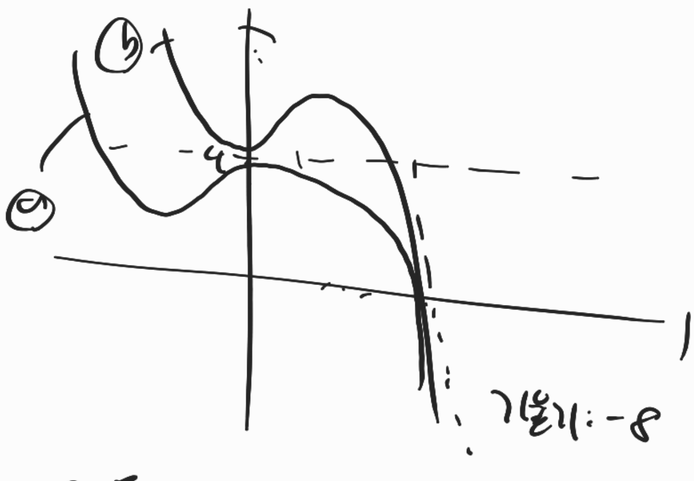
좌미계	2 우.미.계	
$\lvert f(x)\rvert - \lvert 2x^2-8\rvert$	$\lvert f(x)\rvert - \lvert 2x^2-8\rvert$	함수
$a+8$	$-a-8$	미분계수

— ③

$\Rightarrow a=-8$ — ③ (a는 $|f(x)|$의 $x=2$에서 좌.미.계입니다)

①이 성립하면 $|f(x)|$의 $x=0$에서 미분계수는 $f(x)$의 미분계수이니 $f'(0) \Rightarrow -f'(0)=f'(0) \Rightarrow f'(0)=0$

$|f(x)|$의 미분계수가 $x=2$에서 좌/우가 달라야 ③이 성립하니 $f(2)=0$, $|f'(2)|=8$ 을 얻습니다. 이외의 $x>0$에서는 $|f(x)|$가 미분가능해야 하니 개형은 다음과 같습니다.



(ⓐ,ⓑ 둘 다 가능합니다)

이를 통해 $f(x)$를 구하면

$f(x)=ax^2(x-b)+4$ 이고

$f(2)=4a(2-b)+4=0 \Rightarrow a(2-b)=-1$

$f'(2)=a(12-4b)=-8$

$\Rightarrow b=1,\ a=-1$

$\Rightarrow f(x)=-x^2(x-1)+4$

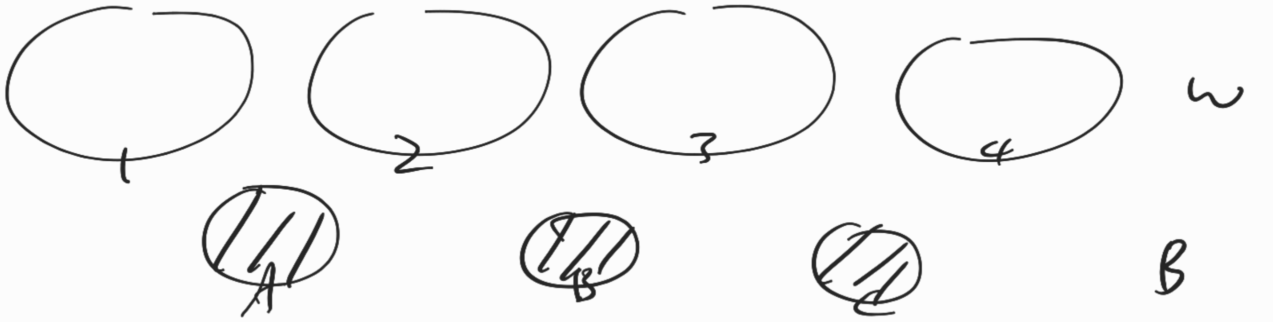
$\Rightarrow f(-5)=150+4=154$

확통

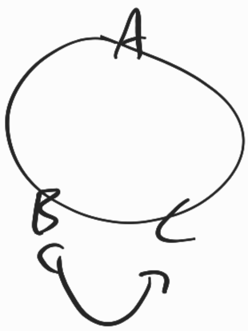
28. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 흰색 접시와 문자 A, B, C가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 검은색 접시가 있다. 이 7개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키도록 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 검은색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다. (나) 홀수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않고, 짝수가 적힌 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100



원순열이니 A위치를 고정하여 중복을 고려하겠습니다.



흰접시는 2, 1, 1개씩 배열되는게 맞겠고... 경우의수 계산하면

(검은접시 배열 가짓수)

× (흰접시 2개 경우의수) × (흰접시 자리 배열)

= 2 × 8 × 3! = 96

12
14
21
23
32
34
41
43

12

너무대충 썼는데
양해부탁드립니다.

29. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $a\times b\times c\times d$가 16의 배수가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

① a.b.c.d에 4가 4개 => 1가지

② 〃 3개 => ${}_4C_3 \times 5 = 20$

③ 〃 2개 => ${}_4C_2 \times 5^2 = 150$

④ a.b.c.d에 4가 1개

4, 짝, 짝, 홀 => $4\times(3\times3)\times2^2 = 144$

4, 짝, 짝, 짝 => $4\times2\times2\times2 = 32$ +

(짝≠4)

176

⑤ 〃 0개

짝짝짝짝 => $2^4 = 16$ (짝≠4)

∴ $1+20+150+176+16 = 363$

30. 검은 공 4개와 흰 공 4개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 세 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합은 홀수이다.
> (나) 학생 D가 받는 공의 개수는 학생 E가 받는 공의 개수의 2배이다.

	A	B	C	D	E
받는 공 개수	tot 5			2	1

← 가 유일하네요 ...? 뭐지

E가 흰공을 받는다고 해봅시다. 검은 공을 받는다고 해도 어차피 똑같을테니 마지막때 ×2 할게요.

E	D	A B C	
W	WW		$_3H_4 \times {}_3H_1 = {}_6C_2 \times {}_3C_1 = 45$
	BW		$_3H_3 \times {}_3H_2 = {}_5C_2 \times {}_4C_2 = 60$
	BB		$_3H_2 \times {}_3H_3 = {}_4C_2 \times {}_5C_2 = 60$

$+$ 165

$\therefore 165 \times 2 = 330$

28. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx\ (a>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$ 의 값이 존재한다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k가 존재할 때, $g\left(-\frac{1}{2}\right)\times g(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

미적

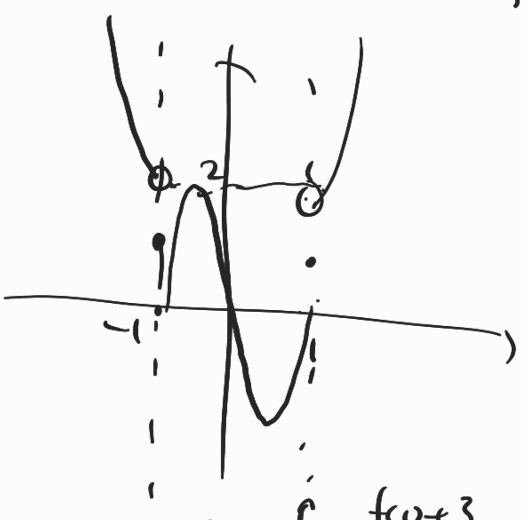
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\begin{cases}2x^2 & (|x|>1)\\ \frac{f(1)+3}{3} & (x=1)\\ f(x) & (|x|<1)\\ ? & (x=-1)\end{cases}$$

극한값이 존재함 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(-1)}{2+(-1)^n}\right)+1$

$\Rightarrow f(-1)=0$이고 $g(-1)=1$ —①

정리하면 $g(x)=\begin{cases}2x^2 & (|x|>1)\\ \frac{f(1)+3}{3} & (x=1)\\ 1 & (x=-1)\\ f(x) & (|x|<1)\end{cases}$

$-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



$k>2$이면 $x>1$, $x<-1$에서 교점 최소 1개씩 생김 $\Rightarrow$ 불가능

$\therefore k=1$ 또는 2

①에 의해 $f(-1)=0 \Rightarrow -a-b=0 \Rightarrow f(x)=a(x^3-x)$

따라서 $f(1)=0 \Rightarrow g(1)=1$.

$g(1)=g(-1)=1$이므로 k는 1이 될 수 없음. 따라서 $k=2$이고

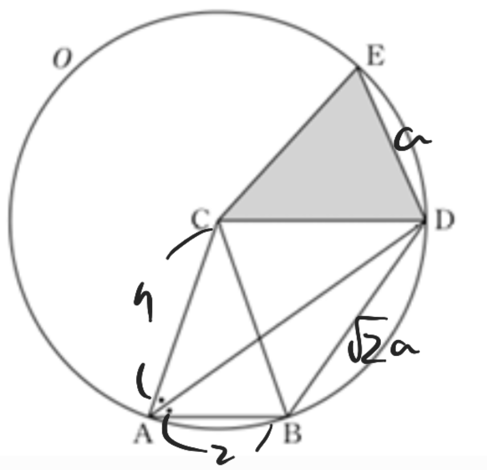
$y=a(x^3-x)$의 극대가 2

극대는 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 생김 $\Rightarrow a\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2$

$\Rightarrow a=3\sqrt{3} \Rightarrow f(x)=3\sqrt{3}(x^3-x)$

$\therefore f(-\frac{1}{2})\times g(2)=3\sqrt{3}\times\frac{3}{8}\times 8=9\sqrt{3}$

29. 그림과 같이 자연수 $n\,(n\geq 2)$에 대하여 중심이 C이고 반지름의 길이가 n인 원 O와 $\overline{AB}=2$를 만족시키는 원 O 위의 두 점 A, B가 있다. $\angle BAC$를 이등분하는 직선이 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위의 점 E에 대하여 $\overline{BD}:\overline{DE}=\sqrt{2}:1$일 때, 삼각형 CDE의 넓이를 S_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\sin\left(\frac{\angle CAB}{2}\right)=s$라 합시다.

$\cos(\angle CAB)=\frac{1}{n}$

$=1-2s^2$ (∵ 2배각공식)

$\Rightarrow s=\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$

$\frac{n^2-n}{4}$

$\frac{n^2-n}{4}$

그러므로 $BD=2ns=\sqrt{2n^2-2n}$

$\Rightarrow DE=\sqrt{n^2-n}$ 이고 $S_n=DE\times\sqrt{n^2-\frac{DE^2}{4}}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{n^2-n}\times\sqrt{\frac{3n^2+n}{4}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n-\frac{S_n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(n-\sqrt{n^2-\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}}\right)$

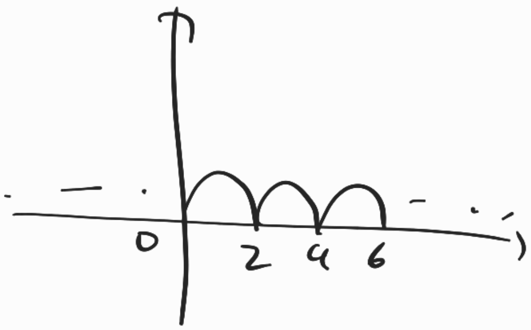
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}}{n+\sqrt{n^2-\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\therefore p+q=13$

30. 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 2$일 때 $f(x) = x(2-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) r은 유리수이다.
(나) 함수 $f(x)$가 $x = a_k$에서 극값을 갖고 $0 < a_k < 10$인 자연수 k의 개수는 3이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} = \frac{81}{10}$ 일 때, $a_7 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$a_k = 1, 2, \cdots, 9$ 인 k 개수는 3개

집합 $A = \{a_n \mid n$은 자연수$\}$ 를 생각합니다.
$B = \{1, 2, \cdots, 9\}$

자연수 a, m, n에 대해 $r = \frac{n}{m}$ 이라 둘 때

$a, ar, ar^2 \in B$ 인 a, m, n이 존재해야 합니다.

그럼 a가 m^2의 배수이니 $a = m^2 x$라 하면

$m^2 x, mnx, n^2 x \in B$ 입니다.

따라서 가능한 $(m, n, x) = (2, 1, 1)$ — ①
$(2, 1, 2)$ → k 개수가 4개 이상 ⇒ 조건 만족 X
$(3, 1, 1)$ — ②
$(3, 2, 1)$ — ③

또한 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 r^n + a_1 r^{2n-1}}{a_1 r^{n-1}(1+r)} = \frac{a_1 r}{1+r} = \frac{81}{10} \Rightarrow a_1 = \frac{r+1}{r} \times \frac{81}{10}$

i) ① ⇒ $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{243}{10}$ ⇒ 만족 X

ii) ② ⇒ $r = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{324}{10}$ ⇒ 만족 X

iii) ③ ⇒ $r = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{81}{4}$ ⇒ $a_2 = \frac{27}{2}$, $a_3 = 9$, $a_4 = 6$, $a_5 = 4$
⇒ 만족

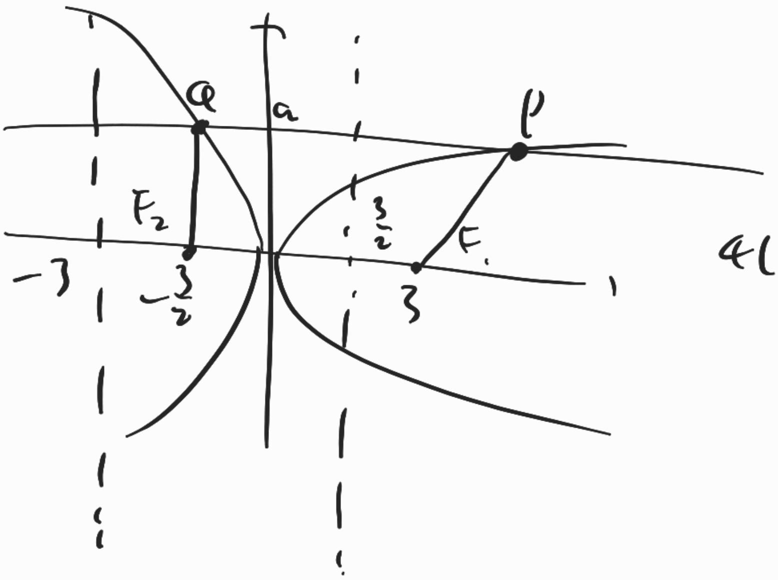
$a_7 = a_5 \times \frac{4}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow p+q = 25$.

28. 직선 $y=a\,(a>0)$이 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 12x,\ \ C_2 : y^2 = -6x$$

와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 하자. 사각형 PQF_2F_1의 둘레의 길이가 41일 때, 사각형 PQF_2F_1의 넓이는? [4점]

① 76　② 78　③ 80　④ 82　⑤ 84



$P\left(\frac{a^2}{12}, a\right)$, $Q\left(-\frac{a^2}{6}, a\right)$

이고 포물선의 성질에 따라

$41 = \overline{PF_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{QF_2} + \overline{PQ}$

$= \left(\frac{a^2}{12}+3\right) + \frac{9}{2} + \left(\frac{3}{2}+\frac{a^2}{6}\right) + \left(\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{6}\right)$

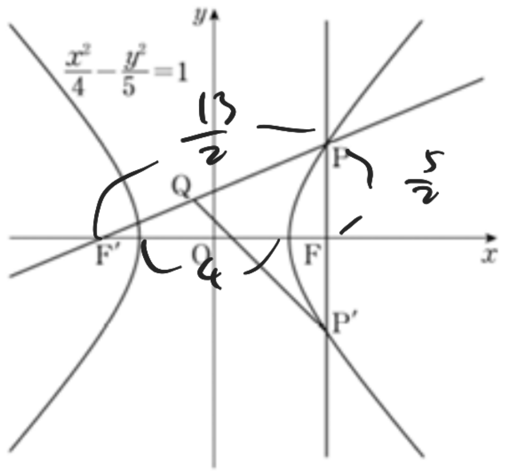
$= 9 + \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow a = 8$, $\overline{PQ} = \frac{a^2}{4} = 16$

$\therefore \square PQF_2F_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{F_1F_2}+\overline{PQ}\right)\times a$

$= 82$

29. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 있다. 직선 $x=c$가 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P, 제4사분면 위의 점을 P$'$이라 하자. 선분 F$'$P 위에 $\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{QP'}}$인 점 Q를 잡자. 두 점 P, P$'$을 초점으로 하고 점 Q를 지나는 타원의 장축의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



쌍곡선의 성질에 따라

F(3,0), F'(-3,0) 입니다.

그럼 P(3, a)라 하면

$\frac{9}{4}-\frac{a^2}{5}=1 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow P(3, \frac{5}{2})$

그럼 $\overline{PP'} = 2\overline{FP} = 5$ 이고...

$\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{FF'} = 4$ 이니

$\overline{PF'} = \frac{13}{2}$ 이므로

따라서 $\cos\angle QPF = \cos\angle F'PF = \frac{5}{13}$

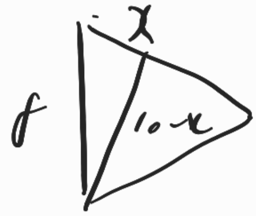
이고 $\overline{PQ} = x$라 하면

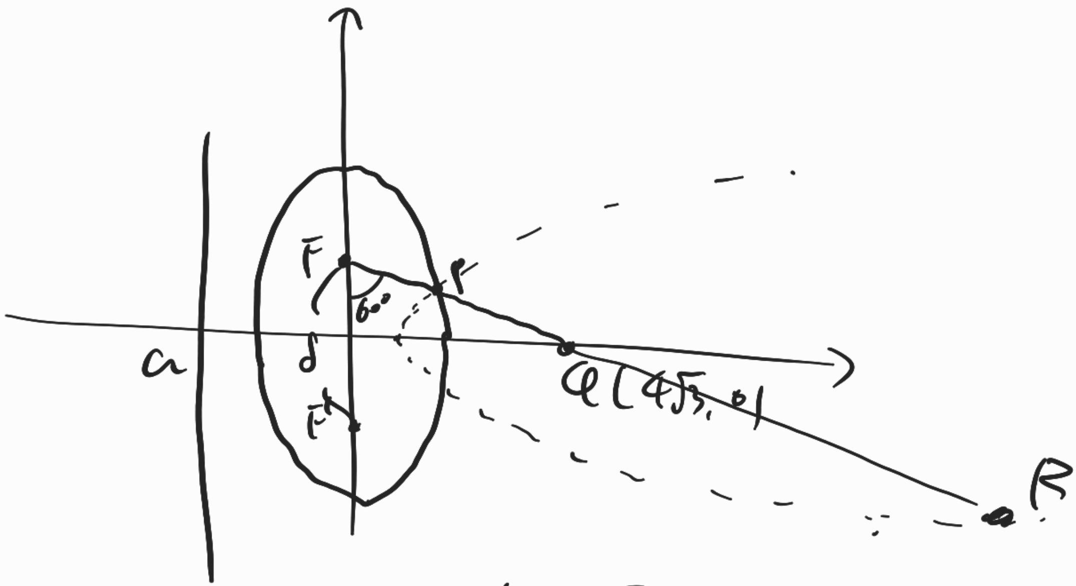
$\frac{5}{13} = \frac{x^2+25-25}{10x} \Rightarrow x = \frac{50}{13}$

그럼 타원 장축 길이는 $\overline{PQ} + \overline{P'Q} = \frac{50}{13} + 5 = \frac{115}{13}$

$\Rightarrow p+q = 128$

30. 두 초점이 F(0, 4), F′(0, −4)이고, 장축의 길이가 10인 타원이 있다. 이 타원 위에 있는 제1사분면 위의 점 중 $\angle F'FP = \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키는 점 P에 대하여 직선 FP가 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q를 초점으로 하고 준선이 $x=a\,(a<0)$인 포물선이 점 P를 지난다. 직선 FP가 이 포물선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R이라 할 때, $\overline{PR} = p+q\sqrt{3}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p, q는 유리수이다.) [4점]





$\angle F'FP = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{FF'} = 8$ 이니 $Q(4\sqrt{3}, 0)$을 얻습니다.

한편 $\overline{PF} = x$라 하면 $\overline{PF'} = 10-x$ 이고 코사인 법칙에 의해

$$(10-x)^2 = x^2+64-8x = x^2-20x+100 \Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow P\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \tfrac{5}{2}\right)$$

따라서 $PQ = \overline{QF} - \overline{PF} = 8-3 = 5$ 이기에 $a = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 5$

R의 x좌표를 r라 하면 포물선의 성질에 의해

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(r-4\sqrt{3}) = r-a = r-\frac{3}{2}\sqrt{3}+5 = \frac{2}{\sqrt{3}}r - 8$$

$$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r = 13-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) \times \frac{26-3\sqrt{3}}{2} = \frac{60+43\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{QR} = r-a = 35+20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{PR} = \overline{PQ}+\overline{QR} = 5+35+20\sqrt{3} = 40+20\sqrt{3}$$

$$\therefore p+q = 60$$