제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6^{\frac{1}{3}}$

2. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+x$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(3)$

$f'=3x^2-8x+1$

$f'(3)=4$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4=2a_3+3a_2$$

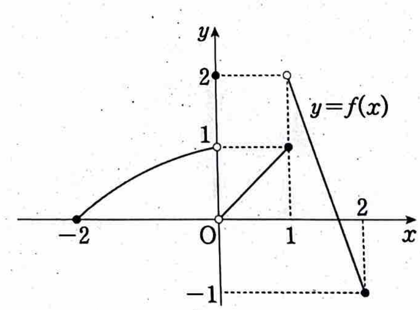
를 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$r^2=2r+3$

$(r-3)(r+1)=0$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}\overset{1}{f(x)}-\lim_{x\to 1+}\overset{2}{f(x)}$ 의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x)=(x^2+x)(2x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f' = (2x+1)(2x^2-x) + (x^2+x)(4x-1)$

$f'(1) = 3\cdot 1 + 2\cdot 3 = 9$

6. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{3}$일 때, $\sin\theta\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

$-\cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\frac{1}{9}}{-\frac{1}{3}}$

$= -\frac{8}{3}$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^3+x$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

$f(2) = 4+2-1 = 5$

8. 두 실수 $a=(\log 3)^2-(\log 2)^2$, $b=\log_6 10$에 대하여 10^{ab}의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$a=(\log 3-\log 2)(\log 3+\log 2)$

$=\log 6\cdot\log\frac{3}{2}$

$\Rightarrow ab=\cancel{\log_6 10}\cdot\cancel{\log_{10}6}\cdot\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 10^{ab}=\frac{3}{2}$

9. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-3t^2+6t$$

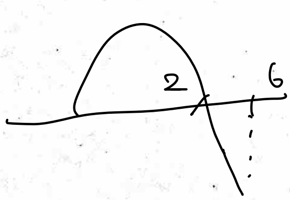
이다. 양수 a에 대하여 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=2a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

$p(t)=-t^3+3t^2 \Rightarrow a=3$

<dt 생략)

$\int_0^2(-3t^2+6t)+\int_2^6(3t^2-6t)$



$=[-t^3+3t^2]_0^2+[t^3-3t^2]_2^6$

$=4+208-96$

$=212-96=116$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases}10 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ -19 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{3n}a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$\underbrace{(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)\cdots(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})}_{n\text{개}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3n}a_k=(10+10-19)\cdot n=n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k=n$인 자연수 n의 개수는?

i) $n=3p$ (p=자연수)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3p}a_k=p(10+10-19)=p$ // $p=3p \Rightarrow \times$

ii) $n=3p-1$

$\sum_{k=1}^{3p-1}a_k \Rightarrow \overbrace{(a_1+a_2+a_3)+\cdots(a_{3p-5}+a_{3p-4}+a_{3p-3})}^{p-1\text{개}}+\overset{10}{a_{3p-2}}+\overset{10}{a_{3p-1}}$

$=1\cdot(p-1)+20=p+19$ // $p+19=3p-1$

$\Rightarrow p=10 \Rightarrow \boxed{n=29}$

iii) $n=3p-2$

$\sum_{k=1}^{3p-2}a_k=1\cdot(p-1)+10=p+9$ // $p+9=3p-2 \Rightarrow p=\frac{11}{2} \Rightarrow \times$

11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

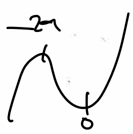
$$f(x)=x^3+3ax^2+4a$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -40일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

$f' = 3x^2+6ax = 3x(x+2a)$

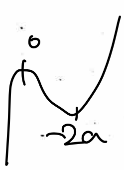
i) $a>0$



$\Rightarrow$ 극소 $= f(0) = 4a = -40$

$\Rightarrow a=-10$ → $a>0$에 위배

ii) $a<0$



$\Rightarrow$ 극소 $= f(-2a) = 4a^3+4a = -40$

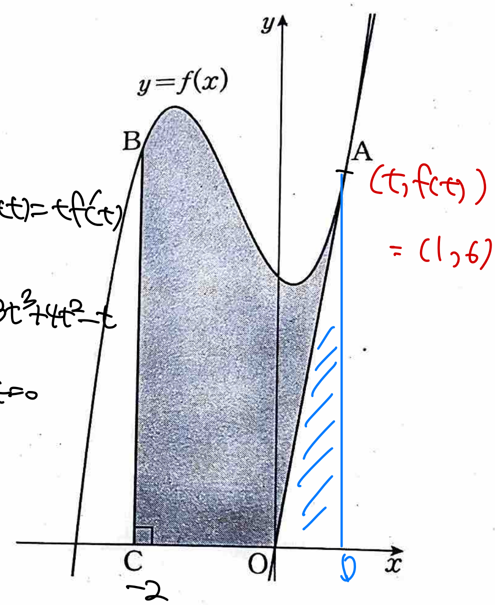
$\Rightarrow a^3+a+10=0$

$\Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow f(2) = 8+16a = -24$

12. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-x+4$에 대하여 원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 곡선 위의 점 $\mathrm{B}(-2,\ f(-2))$에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 세 선분 OA, OC, BC로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{45}{4}$ ② $\frac{47}{4}$ ③ $\frac{49}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{53}{4}$

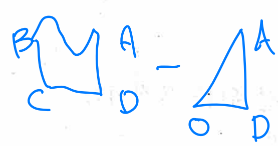


$\frac{f(t)}{t} = f'(t) \Rightarrow f(t) = tf'(t)$

$\Rightarrow t^3+2t^2-t+4 = 3t^3+4t^2-t$

$\Rightarrow 2t^3+2t^2-4=0$

$\Rightarrow \boxed{t=1}$



$\Rightarrow \int_{-2}^{1}(x^3+2x^2-x+4)dx - 3$

$= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{1} - 3$

$= -\frac{15}{4}+6+\frac{3}{2}+12-3$

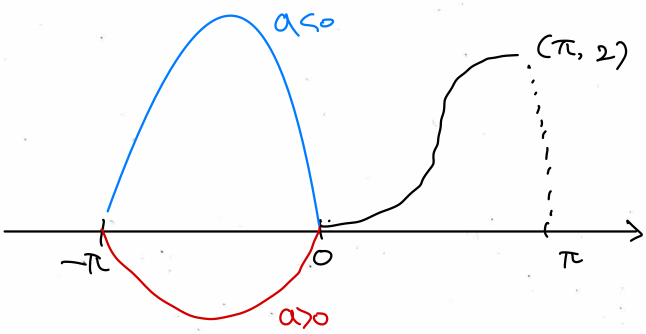
$= \boxed{\frac{51}{4}}$

13. 0이 아닌 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & (x<0) \\ 1-\cos x & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 있다. 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=4$를 만족시키는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4



i) a<0 ⇒ m=0 확정 ⇒ M=4

⇒ −a=4 ∴ a=−4

ii) a>0 ⇒ M=2 확정 ⇒ m=−2

→ −a=−2 ∴ a=2

→ −8

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x_1 \le x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
>
> $$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)dt$$
>
> 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a\le -1$ 또는 $a\ge 3$이다.

$f(1)=15$, $f'(1)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

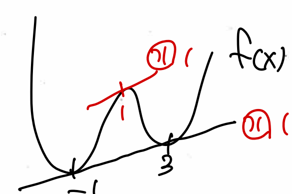
이항하면, $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \ge \int_{x_1}^{x_2}\{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$

즉, 모든 실수 x에 대해

$f(x) \ge f'(a)(x-a)+f(a)$가

성립하는 a의 범위가 $a\le -1$ or $a\ge 3$

⇒



⇒ $f(x)-(x+k)=(x+1)^2(x-3)^2$

⇒ $f(1)-(1+k)=16$ ⇒ $k=-2$

⇒ $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+(x-2)$

$f(4)=25+2=27$

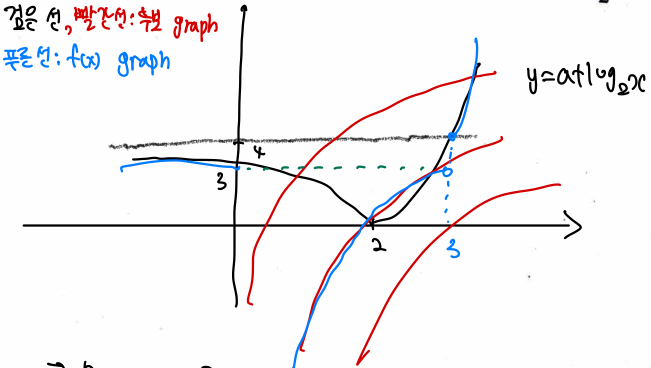
15. 세 실수 a, p, $q\,(p<q)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} |2^x-4| & (x \le p \text{ 또는 } x \ge q) \\ a+\log_2 x & (p<x<q) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응일 때, $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

검은 선, 빨간선: 후보 graph
푸른선: f(x) graph



⇒ $p=0,\ q=3$

$f(\frac{3}{2}) = a+\log_2\frac{3}{2} = ?$

$f(3^-)=3 \Rightarrow a+\log_2 3=3 \Rightarrow a=3-\log_2 3$

$\Rightarrow 3-\log_2 3+\log_2\frac{3}{2} = \boxed{2}$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

6

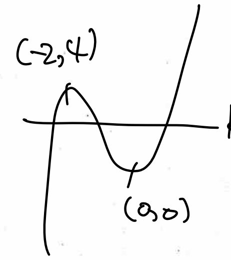
$(x-2)^2=x+10 \quad x>2$

$\Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=6$

17. x에 대한 방정식 $x^3+3x^2-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

3

$x^3+3x^2=k$



$\Rightarrow 1, 2, 3$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = 8,\ \sum_{k=1}^{8} a_k{}^2 = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)$의 값을 구하시오. [3점]

12

$20+2\cdot8-3\cdot8=20-8=12$

19. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)+t^2\}dt = xf(x)-x^3$$

을 만족시킬 때, $\int_0^4 f'(x)dx$의 값을 구하시오. [3점]

32

미

$\cancel{f(x)}+x^2=\cancel{f(x)}+xf'(x)-3x^2$

$\Rightarrow xf'(x)=4x^2$

$\therefore f'(x)=4x$

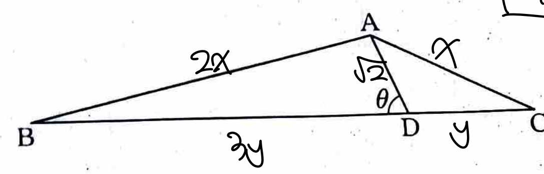
$\int_0^4 4x\,dx=[2x^2]_0^4=32$

20. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, $\angle ADB=\theta$라 하자.

$$\overline{AD}=\sqrt{2},\quad \overline{AB}:\overline{AC}=2:1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{71}$



$\triangle ABD$

$\Rightarrow 4x^2=2+9y^2-6\sqrt{2}y\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=9y^2-3y+2$ ⋯ 식①

$\triangle ADC$

$\Rightarrow x^2=2+y^2-2\sqrt{2}y\cdot-\frac{\sqrt{2}}{4}=y^2+y+2$ ⋯ 식②

식① $\Rightarrow 4x^2=9y^2-3y+2$

식② $\times4 \Rightarrow$ $-$ $4x^2=4y^2+4y+8$

$0=5y^2-7y-6 \Rightarrow (5y+3)(y-2)=0 \Rightarrow \boxed{y=2}$

$\Rightarrow x^2=2^2+2+2=8$

$2R=\frac{2x}{\sin\theta} \Rightarrow R^2\pi=\frac{x^2}{\sin^2\theta}\pi$

$=\frac{8}{\frac{7}{8}}\pi=\frac{64}{7}\pi$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (a_n \geq 3)\\ 10 & (a_n < 3)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{381}$

$a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1$

2 — 10 — 40 — 120 — 240 — $\boxed{240}$

k — 3k — 6k (3k≥3)

(k<3)

i) 6k≠10 ⇒ $a_1 \geq 6$

⇒ $a_1 = 6k < 18$

⇒ a_1은 10을 제외한 6 이상 17 이하의 자연수

⇒ 23 6 - 10 = $\boxed{128}$

ii) 6k=10

⇒ a_1 = 1 or 2 or 10

⇒ 240+128+1+2+10

= 381

$f(-5) = -125a+25b+4$

= 154

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ |f(x)|-|2x^2-8| & (x \geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{154}$

⇒ g(x)는 x=0에서 연속

⇒ $-f(0) = |f(0)| - 8$

⇒ $\boxed{f(0)=4}$

⇒ $g(x)\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x)+2x^2-8 & (x\geq 0)\end{cases}$ (x=0 근방)

⇒ $-f'(0)=f'(0)$

⇒ $\boxed{f'(0)=0}$

$|f(x)|-|2x^2-8|$ ⇒ x=2가 중요!!

마찬가지 x=2 미분X

x=2 미분X

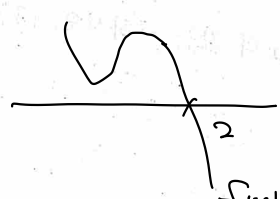
|f(x)| 역시도 x=2 미분X

⇒ $\boxed{f(2)=0}$

and 이후

(|f(x)| 미분 없어야 함)

⇒



x=2 근방에서

⇒ $g=\begin{cases} f(x)+2x^2-8 & (x\leq 2)\\ -f(x)-2x^2+8 & (x\geq 2)\end{cases}$

⇒ $f'(2)+4\cdot 2 = -f'(2)-4\cdot 2$

⇒ $\boxed{f'(2)=-8}$

⇒ $f(x) = ax^3+bx^2+4$

$8a+4b+4=0 \rightarrow 2a+b=-1$

$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow 12a+4b=-8 \Rightarrow 3a+b=-2$

⇒ $\boxed{a=-1,\ b=1}$

* 확인 사항