김승겸 (외대부고 졸/ 가톨릭관동 의예)

걸린시간: 66min

:9: 무난한 속도 문제, 비율관계 떠올리면 됨

10: 특이한 문제지만 10이 나오는 개수가 19의 배수가 되게하면 됨

11: a부호만 조심 실수 주의

12: 잘 계산

13: 케이스 나누기

14: 공통접선 떠올리기

15: 그래프 여러개 그리면서 시도. 쉬움

20: 미지수 2개 놓고 코사인법칙 두번써서

21: 역연산, a1만 자연수라는걸 잊지말자

22: 문제 별로임. 식 세우는 연습만 하자

28: 시간 좀 걸리는 문제, 발문이 걸림

29: 미지수 세우고 n에대해 정리해서 대입하면 됨

30: 할말없음

시험지 난이도: 중

공통: 중상, 미적: 중하

전통적으로 3모가 어렵게 나오던 것에 비해 난도가 쉬운 시험지라고 생각됨.

두드러지는 킬러가 없는 것은 요즘 트렌드에 부합함.

시험지 계산량이 전체적으로 적지 않고 당황할 포인트는 있음

주목할 문제: 10 22 28

시간 재고 푼 조교들 총평

이도윤 (상현고 졸/가천대의예)

걸린시간: 86분

총평:: 난이도 상

공통 객관식 11-14번의 난이도가 일반적인 모의고사 보다 낮은 대신 10번의 난이도가 10번치고 어려움.

미적의 경우 29번의 난이도가 생각보다 어려운 편임.

케이스를 나눠서 푸는 문제가 많이 출제되었음.

문항 번호에 신경쓰지 않고 막혔을 경우 넘어가는 것이 매우 중요했을 것 같다.

정동우 (상현고 졸/한양대의예)

걸린시간: 70분

총평: 난이도 上 (1cut 예상 77)

직관적으로 경우를 때려맞추는 스타일의 위험성을 일깨워준 시험지.

조건 하나하나 해석해가며 푸는 것이 제일 승률 좋은 풀이법 !!

특히 22, 28, 30을 정확히 풀지 못하겠다면 그동안의 풀이 스타일을 점검하도록 하자.

공통 문제 퀄리티 좋음 << 교훈이 많은 문제들

미적분도 범위 내에서 최대한 열심히 낸 흔적이 보임. 28은 수능에 내도 괜찮을 거 같은 수준.

시험지의 변곡점: 10번 <<< 10번치곤 어려웠던 문제. 못 풀었더라도 당황하지 않았다면 그것에 의의를 두자.

#10

comment & review point

♬ 정수 자연수 조건의 이용

문제를 잘 쳐다보면, a_n이 3을 주기로 1씩 만듦을 알 수 있고,

주어진 시그마 등식이 오른쪽은 3배수로 잘 정의되어 있지만, 왼쪽은 3배수로 정의되어 있지 않기에,

$n=3p+k$꼴로 나눠봐야한다는걸 쉽게 알 수 있다

이렇듯, 자연수 조건중 배수조건이 나오면 해당배수로 식을 세팅해주어야 함을 쉽게 떠올릴 수 있다.

풀이

일단 주어진 수열을 잘 분석하면 3을 한 주기로 봤을 때, 수열의 합이 1씩 커진다

♠ $n=3p$ 꼴

이와 같은 경우에는 구해야 하는 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$ 의 우변은 $3p$가 되고 좌변은 p가 되므로 모순

♥ $n=3p+1$ 꼴

이와 같은 경우에는 구해야 하는 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$ 의 우변은 $3p+1$이 되고 좌변은 $p+10$이 되는데

이 경우 $p=\frac{9}{2}$ 가 되므로 모순

♣ $n=3p+2$ 꼴

이와 같은 경우에는 구해야 하는 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3n} a_k$ 의 우변은 $3p+2$가 되고, 좌변은 $p+20$가 되므로

$p=9$가 되면서 성립함

따라서 답은 ♣의 경우 $n=29$

(답: 5번)

#13

comment & review point

♬ case찾기 문제 관찰

case찾기 문제의 경우 해당 상황을 아는지 모르는지 구분하는것부터 시작됩니다

문제를 보면 $f(x)$가 양수쪽에서는 아예 부담이 없는 상황임을 알 수 있고,

음수쪽에서는 개형자체는 거의 확정이나 a의 절댓값과 크기에 따라서 최대최소가 정해지므로 경우를 나눈 후

안되는 케이스는 연역적으로 미리미리 아웃시킨다면 어렵지 않은 문제입니다 ~~(3덮 14번 적중이네,,, 설마,,,)~~

풀이

문제의 상황을 표로 정리하면 아래와 같다

x의 부호	a의 부호	M값	m값	케이스
양수	관계없음	2	0	♣
음수	양수	0	$-a$	♥
	음수	$-a$	0	♠

♣이면서 ♥인 경우 $M-m=4$ 이고, <표>를 참고하면 , $a=2$

♣이면서 ♠인 경우 $M-m=4$ 이고, <표>를 참고하면, $a=-4$

따라서, a의 곱은 −8이다

(답:3번)

(*이때, a의 ♠에서 절댓값이 2보다 작으면 늘 $M-m=2$로 고정됨을 미리 알고 연역적으로 out)

#14

comment & review point

♬ 관찰상황의 세팅 & 정적분으로 나와있을때는 넓이가 아닌 함수로 바라볼 것.

문제를 바라보는 세가지의 세팅중, 접선의 의미가 명백하게 주어져 있으므로, 함수vs접선의 세팅으로

보는게 합리적이여 보인다 그럼 주어진 함수가 어떤 상황에서도 증가함수 라고 읽히므로

box조건이 공통접선을 이야기하고 있음을 쉽게 알 수 있다

풀이

comment를 잘 바라보면, box에서 주어진 적분과 부등식을 아래와 같이 표현 가능하다.

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)-(f'(a)(t-a)+f(a))dt \geq 0\,(x_2 > x_1)$ 이때, $g(t)=f(t)-(f'(a)(t-a)+f(a))$라고

두면 주어진 적분과 부등식을, $G(x_2) \geq G(x_1)$이라고 놓을 수 있다.

따라서 실수 전체의 집합에서 $g(t)=f(t)-(f'(a)(t-a)+f(a))$가 늘 양수이고 $f(x)$가 어떤 점의

접선보다 늘 위에 있어야 한다고 문제가 읽히는데, 그런점이 두 개 임과 동시에 부등식영역도 두 개다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1,3$에서 공통접선을 가지고,

이를 반영하여 식을 세우면 , $f(x)=mx+n+(x+1)^2(x-3)^2$ $f(1)=15, f'(1)=1$

이를 연산하면 $m=1, n=-2$ 이므로, $f(4)=27$이다.

(답: 5번)

#15

comment & review point

♫ case찾기 문제의 연역성

풀이

문제에서 $f(x)$가 실수 전체 집합에서 일대일 대응인데, 지수함수가 음의 무한대는 가질 수 없으므로,

로그함수의 점근선이 포함되어야 한다. 이때 진수조건이 끼어있으므로,

$p=0$

이때, $f(0)=3$이므로, 로그의 오른쪽 뚫려있는 도착점은 3이다.

$a=3-\log_2 3$

한편, 음수 범위에서는 [3,4) 를 치역으로 가지므로, q부터 진행되는 함숫값이 무조건 4부터 시작된다.

$q=3$

이를 바탕으로, $f(\frac{3}{2})=2$

(답: 2번)

#21

comment & review point

♬ 스타팅 포인트 찾기와 case찾기 문제, 정수조건의 이용

연역적으로 갈 수 있는길을 걸어가자~♬

풀이

문제의 상황을 나열하면 아래와 같습니다

<table>
<tr><td>n</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a_n</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">10</td><td>40</td><td>120</td><td>240</td><td>240 ♠</td></tr>
<tr><td rowspan="2">k</td><td rowspan="2">$3k$</td><td rowspan="2">$6k$</td><td>$6k$ ♥</td></tr>
<tr><td>1,2 ♣</td></tr>
</table>

♠의 경우 두 규칙중 n으로 나누는 규칙을 거듭 이용하면 됩니다.

이때 $a_1 = 240$

♥와 ♣의 경우, 3보다 작은 k를 가정하면 되는데 위 경우 a_2와 a_3의 값은 확정됩니다.

이때, k의 범위는, $1 \le k < 3$

♥의 경우 $6k$가 $6k$로 오면 되는데, 이 경우 범위를 만족하는 a_1은

$a_1 = 6,7,8,...17$

한편, ♣의 경우 a_1이 1,2가 되더라도 $6k$가 10인 경우 k가 범위를 만족하기만 하면 되기 때문에 ♣의 경우도 성립 함을 알 수 있습니다. ($k = \frac{5}{3}$)

$a_1 = 1,2$

위 사실들을 종합하면 a_1값의 총합은 381입니다.

(답:381)

#22

comment & review point

♫ 미분가능성은 하자 point를 위주로 관찰한다

미불-미불 꼴이 나왔고 이 경우 미불점이 일치해야 미분 가능할 가능성이 생기기에,

$x=0$과 $x=2$에서 문제를 관찰하자.

풀이

연속성의 경우 $x=0$에서만 관찰하면 됨을 알 수 있다.

$x=0$에서 $-f(0)=f(0)-8$ 따라서, $f(0)=4$이다.

미분가능성의 경우 $x=0,\ x=2$에서 관찰하면 된다.

$x=0$에서 $-f'(0)=f'(0)$ 따라서, $f'(0)=0$이다.

$x=2$에서 함수가 미분가능할 수 있는 가능성을 만들어야 하기에, $f(2)=0$

이때, 미분가능하다는 조건을 사용하려면, $|f'(2)|=8$

한편, $f'(2)=8$ 인 경우, 최고차항의 계수가 양수이고, 2를 제외한 양의 실근이 무조건 생기므로 모순.

따라서 $f'(2)=-8$ 위 사실들을 종합하면, $f(x)=-x^2+x+4$이다.

(답:154)

#28

comment & review point

♬ 함수의 극한과 수열의 극한의 맹점!! 둘이 어떻게 다를까?

수열이란, 정의역이 자연수인 함수이다. 이에, 함수의 극한은 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x+1)$이지만,

수열의 극한에서는 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값이 수렴한다고 다른표현의 극한이 성립하는 것은 아니다.

풀이

$g(x)$를 $|x|=1$을 기준으로 나눠서 $g(x)$를 작성하면,

$|x|>1 \quad g(x)=2x^2$

$x=-1 \quad g(x)=\dfrac{2\pm1+f(-1)}{2\pm1}$

$|x|<1 \quad g(x)=f(x)$

$x=1 \quad g(x)=1$

이때, $x=-1$에서 $g(x)$의 값이 확정되어야 하므로, $f(-1)=0$, $g(-1)=1$이다.

이때, $g(x)$가 자연수 k랑 만나는점이 오직 2개가 되어야 하므로, 주어진 삼차함수의 극댓값이 2이고,

이를 바탕으로 $f(x)$를 구하면 $f(x)=3\sqrt{3}(x^3-x)$이다.

(답:$9\sqrt{3}$)

#30

comment & review point

♬ 그냥 풀면 됨 자연수 조건 잘 쓰자

풀이

~~학교 끝나는 시간 맞춰 배포하려면... 29번 적을시간이,,,미안해요,,,~~

마지막 문제고 시간이 없어서 간략하게만 작성해 보겠습니다..

$f(x)$의 정의를 잘 살피면!! $f(x)$가 정수점에서만 극값을 가짐을 쉽게 알수 있습니다!

이때 a_n이 등비수열인데 공비가 만약에 $|r|>1$이면, 주어진 극한값이 발산해버리므로

$|r|<1$입니다. 이를 바탕으로 주어진 극한식을 정리해 보면, $\frac{a_1 r}{1+r}=\frac{81}{4}$이고,

이때, $a_1=\frac{81}{4}, r=\frac{2}{3}$이여야, $a_3=9, a_4=6, a_5=4$가 되면서.. 주어진 조건을 만족할 수 있어요!!

따라서 $a_7=\frac{16}{9}$

(답: 25)