정적분으로 정의된 함수

1. 개념 정의

적분구간(위끝, 아래끝) 혹은 피적분함수에 적분변수 이외에 미지수가 포함 → 정적분으로 정의된 함수

예 : $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, $\int_x^{x+a} f(t)dt = F(x+a) - F(x)$ → 적분구간에 미지수

$\int_a^b (x-t)f(t)dt = x\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$ → 피적분함수에 미지수

$\int_a^x (x-t)f(t)dt = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$ → 적분구간과 피적분함수 모두에 미지수

2. 정적분으로 정의된 함수의 미분

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

3. 정적분으로 정의된 함수 구하기

1) 적분구간이 상수인 정적분을 포함한 함수

→ 정적분 값을 k(상수)로 놓고 함수식을 세워서 정적분 계산

예1 : $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + \int_0^2 f(t)dt$ 일 때, $f(1)$을 구하시오.

$\int_0^2 f(t)dt = k$라고 하면 $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + k$, $\int_0^2 f(t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + t^3 - \frac{1}{2}t^2 + kt\right]_0^2 = 10 + 2k$

이 값이 k와 같으므로, $10 + 2k = k \quad \therefore k = -10$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 10 \quad \therefore f(1) = -7$

예2 : $f(x) = x^2 + \int_0^2 (x-t)f(t)dt$ 일 때, $f(1)$을 구하시오.

$f(x) = x^2 + \int_0^2 (x-t)f(t)dt = x^2 + x\int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 tf(t)dt$

$\int_0^2 f(t)dt = a$, $\int_0^2 tf(t)dt = b$라고 하면 $f(x) = x^2 + ax - b$

$\int_0^2 f(t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}at^2 - bt\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2a - 2b = a$

$\int_0^2 tf(t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}at^3 - \frac{1}{2}bt^2\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3}a - 2b = b \qquad \therefore a = 0,\ b = \frac{4}{3}$

$f(x) = x^2 - \frac{4}{3} \quad \therefore f(1) = -\frac{1}{3}$

2) 적분구간에 변수가 포함된 함수

→ ① 위끝=아래끝이 되도록 대입 ② 양변 미분

예1 : $\int_1^x f(t)dt = 2x^4 - x^2 + ax - 5$ (a는 상수) 일 때, $f(a)$를 구하시오.

$x=1$을 대입하면 $\int_1^1 f(t)dt = a-4$ $\therefore a=4$, 양변을 미분하면 $f(x)=8x^3-2x+4$ $\therefore f(2)=64$

예2 : $\int_1^x (x-t)f(t) = -3x^3+4x^2+x-2$일 때, $f(1)$을 구하시오.

양변을 미분하면 $\int_1^x f(t)dt = -9x^2+8x+1$, 양변을 한 번 더 미분하면 $f(x)=-18x+8$ $\therefore f(1)=-10$

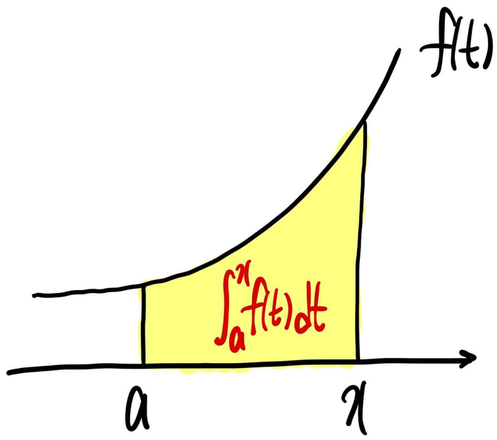
4. 정적분으로 정의된 함수의 극한

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} = f(a) \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{\int_a^{x+a} f(t)dt}{x} = f(a)$$

→ $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$에서 미분계수의 정의로 접근해도 좋고, 로피탈의 정리를 떠올려도 좋음

정적분으로 정의된 함수는 정적분의 기하적 의미를 떠올려, **넓이함수**로 생각할 수 있음

→ 정적분으로 정의된 함수의 미분과 극한이 조금 더 직관적으로 이해됨



x가 Δx만큼 커지면 넓이는 대략 $f(x)\Delta x$만큼 늘어나므로, 넓이함수의 변화율은 $f(x)$

x가 a에 가까이 다가가면 넓이는 대략 $(x-a)f(a)$이므로, $x-a$로 나누었을 때 극한값은 $f(a)$