Chapter

I

TH① 경우의 수 (순열)

1 경우의 수 (순열)

(1) 기출의 지형지물

수능이 선택과목 체제로 개편된 2022학년도 이후부터 모든 기출문제를 체계적으로 정리하였습니다. 이를 통해 수험생들이 보다 효율적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

(2) 구성

- 3월 교육청 모의고사
- 7월 교육청 모의고사
- 6월 평가원 모의고사
- 사관학교 기출문제
- 4월(5월) 교육청 모의고사
- 10월 교육청 모의고사
- 9월 평가원 모의고사
- 수능

STEP 1 Plains

3점 23~27번

STEP 2 Hills

4점 중간난이도

STEP 3 Mountains

4점 고난이도

STEP 1 Plains

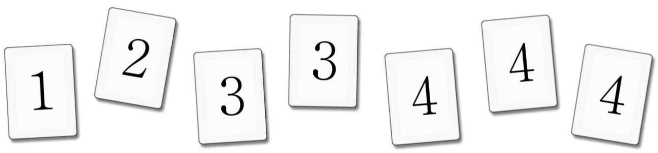
001 2021년 3월 확통27

숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 185

③ 190 ④ 195

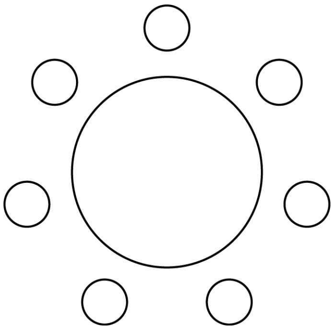
⑤ 200



002 2022년 3월 확통25

A 학교 학생 5명, B 학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B 학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)[3점]

① 320　② 360　③ 400　④ 440　⑤ 480



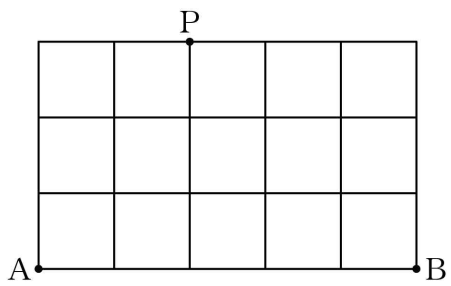
003 2022년 3월 확통26

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.)[3점][2022년 3월 확통26]

① 200　② 210

③ 220　④ 230

⑤ 240



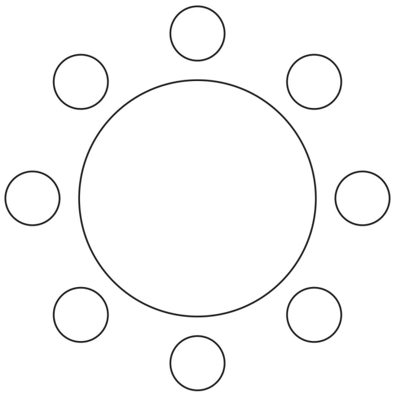
004 2022년 4월 확통26

학생 A를 포함한 4명의 1학년 학생과 학생 B를 포함한 4명의 2학년 학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.

(나) A와 B는 이웃한다.

① 48 ② 54
③ 60 ④ 66
⑤ 72

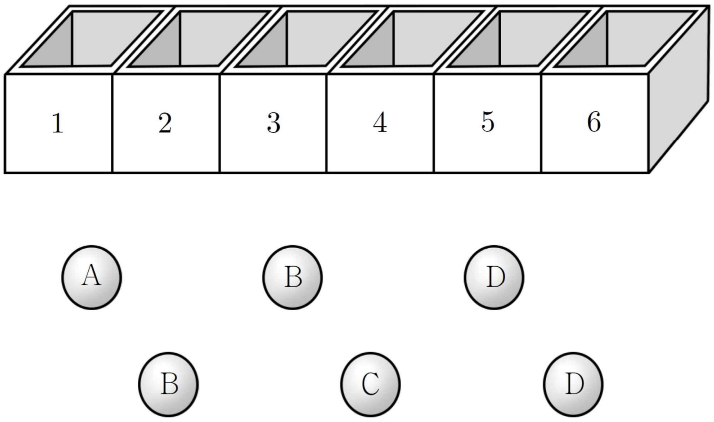


005 2022년 4월 확통27

그림과 같이 A, B, B, C, C, D의 문자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 상자가 있다. 각 상자에 한 개의 공만 들어가도록 6개의 공을 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)[3점]

(가) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공은 문자 A 또는 문자 B가 적힌 공이다.

(나) 문자 B가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수 중 적어도 하나는 문자 C가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수보다 작다.



① 80　② 85
③ 90　④ 95
⑤ 100

006 2022년 7월 확통26

세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 135 ② 140
③ 145 ④ 150
⑤ 155

007 2022년 10월 확통26

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [3점]

(가) $a \times b \times c \times d = 8$

(나) $a + b + c + d < 10$

① 10 ② 12
③ 14 ④ 16
⑤ 18

008 2023년 3월 확통26

서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120 ② 130
③ 140 ④ 150
⑤ 160

009 2023년 4월 확통24

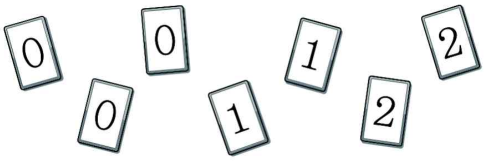
전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=5$, $A\cap B=\varnothing$을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점][2023년 4월 확통24]

① 168 ② 174
③ 180 ④ 186
⑤ 192

010 2023년 7월 확통27

숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14 ② 15
③ 16 ④ 17
⑤ 18



011 2023년 10월 확통25

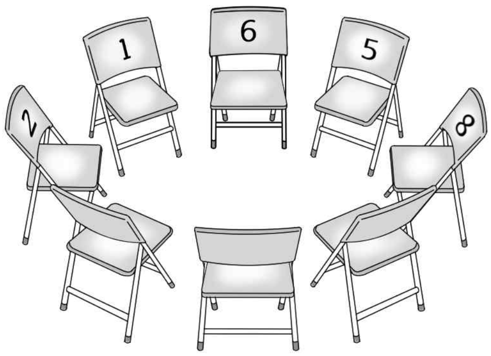
숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7 이하인 자연수의 개수는? [3점][2023년 10월 확통25]

① 45 ② 47
③ 49 ④ 51
⑤ 53

012 2023년 10월 확통27

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 의자가 있다. 이 8개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 두 수가 서로소가 되도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)[3점]

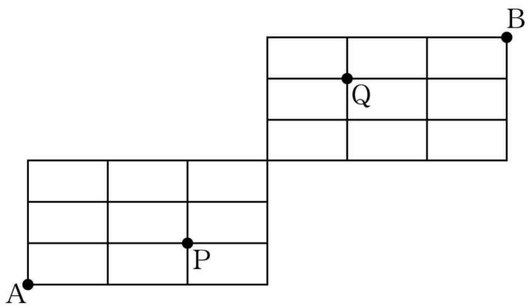
① 72　　② 78
③ 84　　④ 90
⑤ 96



013 2024년 3월 확통26

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 갈 때, P지점을 지나면서 Q지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]

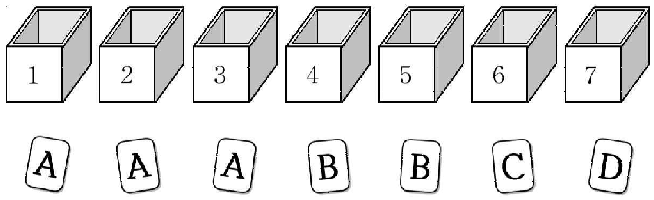
① 72　　② 81　　③ 90　　④ 99　　⑤ 108



014 2024년 3월 확통27

그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다. 각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 144　② 168
③ 192　④ 216
⑤ 240



015 2024년 5월 확통26

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수는? [3점]

(가) $f(1)+f(2)=4$

(나) 1은 함수 f의 치역의 원소이다.

① 145
② 150
③ 155
④ 160
⑤ 165

016 2024년 5월 확통27

다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [3점]

(가) $a\times b\times c\times d=108$

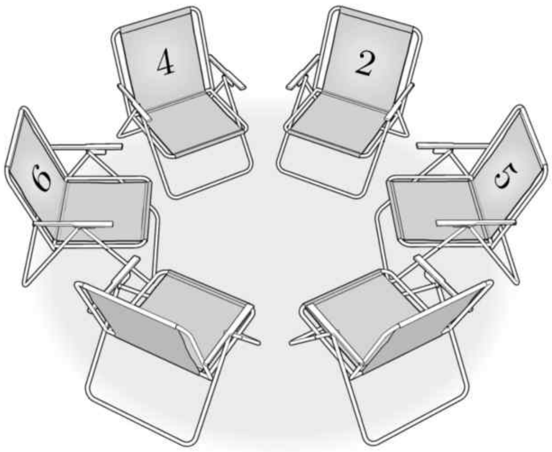
(나) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 서로 같은 수가 있다.

① 32
② 36
③ 40
④ 44
⑤ 48

017 2024년 6월 확통27

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72　　② 78　　③ 84　　④ 90　　⑤ 96



018 2024년 7월 확통27

세 문자 P, Q, R 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> 나열된 8개의 문자 중에서 세 문자 P, Q, R의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때 $1 \leq p < q < r$이다.

① 440 ② 448
③ 456 ④ 464
⑤ 472

STEP 2 Hills

019 2021년 3월 확통28

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

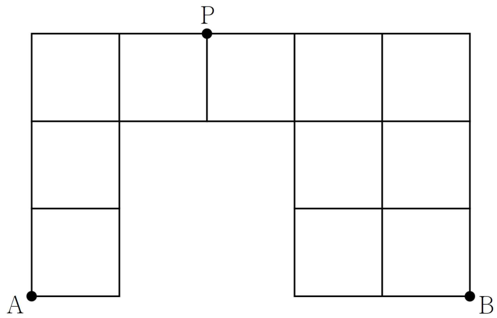
(가) $f(2)<f(3)<f(4)$
(나) $f(1)>f(3)>f(5)$

① 100 ② 102
③ 104 ④ 106
⑤ 108

020 2021년 4월 확통28

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는?[4점]

① 78 ② 82
③ 86 ④ 90
⑤ 94

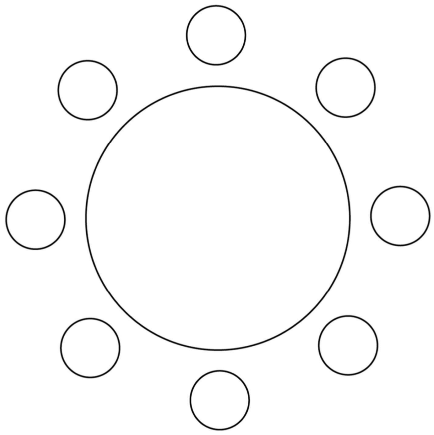


021 2021년 4월 확통29

두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)[4점]

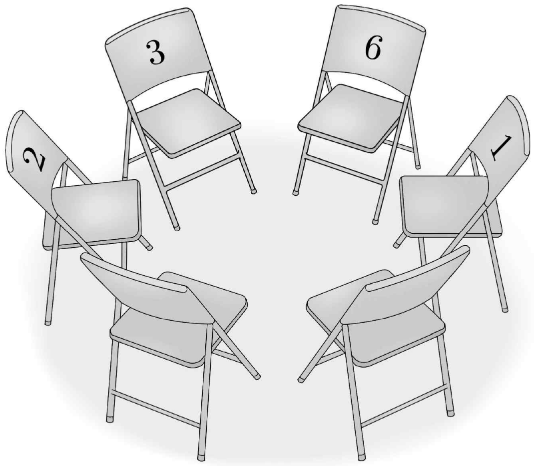
(가) A와 B는 이웃한다.

(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



022 2021년 6월 확통29

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)[4점]



023 2021년 10월 확통29

숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

024 2022년 4월 확통29

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

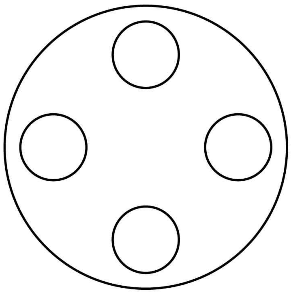
025 2023년 3월 확통28

원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)[4점]

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.

(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3이하이다.

① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540



026 2023년 3월 확통29

숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

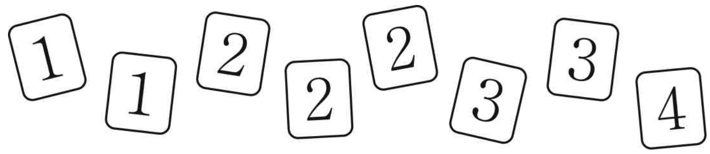
(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.

(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

027 2023년 4월 확통28

숫자 $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4$가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 264 ② 268
③ 272 ④ 276
⑤ 280



028 2023년 6월 확통28

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$ 는 홀수이다.

(나) $f(2) < f(4)$

(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128
② 132
③ 136
④ 140
⑤ 144

029 2024년 3월 확통28

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

(가) $ab^2c = 720$

(나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

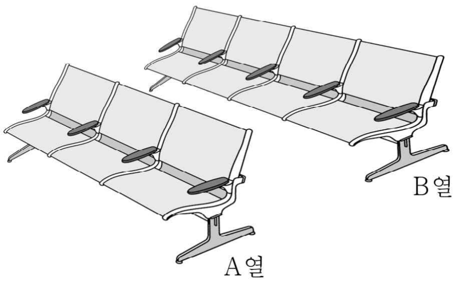
030 2024년 5월 확통28

그림과 같이 A열에 3개, B열에 4개로 구성된 총 7개의 좌석이 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명 모두가 이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은? (단, 한 좌석에는 한 명의 학생만 앉는다.) [4점]

(가) A열의 좌석에는 서로 다른 두 학년의 학생들이 앉되, 같은 학년의 학생끼리는 이웃하여 앉는다.

(나) B열의 좌석에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는다.

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{16}{105}$ ③ $\frac{6}{35}$ ④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{22}{105}$



STEP 3 Mountains

031 2021년 3월 확통30

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점][2021년 3월 확통30]

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.

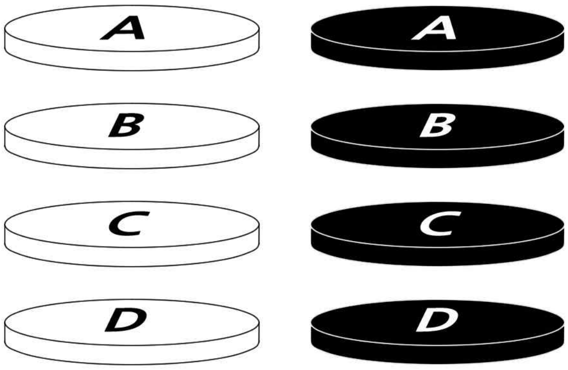
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

032 2022년 3월 확통30

흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.)[4점]

(가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.

(나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



033 2022년 4월 확통30

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow Y$의 개수를 구하시오. [4점][2022년 4월 확통30]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ 는 짝수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

034 2023년 4월 확통30

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

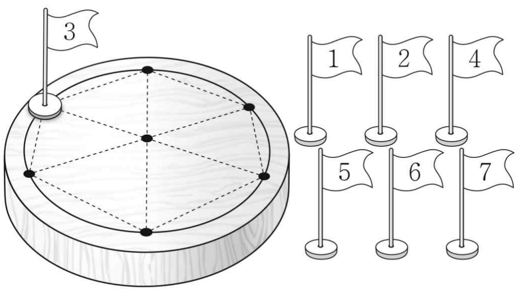
(가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
(나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

035 2024년 5월 확통30

그림과 같이 원판에 반지름의 길이가 1인 원이 그려져 있고, 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점과 원의 중심이 표시되어 있다. 이 7개의 점에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 깃발 7개를 각각 한 개씩 놓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

깃발이 놓여 있는 7개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 세 꼭짓점에 놓여 있는 깃발에 적힌 세 수의 합은 12 이하이다.



036 2023년 7월 확통30

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(7)-f(1)=3$

(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \leq f(n+2)$이다.

(다) $\frac{1}{3}|f(2)-f(1)|$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

MEMO

정답 및 해설

Chapter Ⅰ. TH① 경우의 수

001	정답 5번
002	정답 5번
003	정답 1번
004	정답 5번
005	정답 1번
006	정답 4번
007	정답 4번
008	정답 5번
009	정답 5번
010	정답 5번
011	정답 5번
012	정답 1번
013	정답 4번
014	정답 3번
015	정답 5번
016	정답 3번
017	정답 1번
018	정답 2번
019	정답 3번
020	정답 5번
021	정답 288
022	정답 48
023	정답 150
024	정답 115
025	정답 5번
026	정답 120
027	정답 1번
028	정답 5번
029	정답 2번
030	정답 2번
031	정답 57
032	정답 708

정답 및 해설

033 정답 720

034 정답 188

035 정답 40

036 정답 150

1) ⑤

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$ 이다.

□에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2가 적힌 2장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

${}_6P_2-5\times2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

2) ⑤

정답해설

[출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A 학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=24$

A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=480$

3) ①

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$ 이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

4) ⑤

정답해설

[출제의도] 원순열 이해하기

조건 (가)에서 4명의 1학년 학생과 4명의 2학년 학생은 원 모양의 탁자에 교대로 둘러앉아야 한다.

4명의 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(4-1)!=6$

조건 (나)에서 A와 B는 이웃하므로 학생 B가 앉는 경우의 수는 2

학생 B를 제외한 3명의 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2\times6=72$

5) ①

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서

(i) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 A가 적힌 공인 경우

조건 (나)에서 남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는
3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓고
5개의 문자 D, D, X, X, X를 일렬로 나열한 후 X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 B, B, C또는 B, C, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!\times3!}\times2=20$

(ⅱ) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 B가 적힌 공인 경우
남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는 5개의 문자 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+60=80$

6) ④

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

(ⅰ) 한 개의 문자를 3개 선택하는 경우
$_3C_1\times\frac{5!}{3!}=60$

(ⅱ) 두 개의 문자를 각각 2개씩 선택하는 경우
$_3C_2\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$

따라서 경우의 수는 $90+60=150$

7) ④

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

조건 (가)를 만족시키는 네 자연수는
1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2
이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는
1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

(ⅰ) 네 자연수 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 네 자연수 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $12+4=16$

8) ⑤

정답해설

[출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

주머니 A에 넣을 3개의 공을 선택하는 경우의 수는 $_6C_3=20$

남은 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는
$_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는 $20\times8=160$

9) ⑤

정답해설

[출제의도] 중복순열 이해하기

전체집합 U의 6개의 원소 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 5개를 정하는 경우의 수는
$_6C_5=6$

$A\cap B=\varnothing$에서 두 집합 A, B의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $_2\Pi_5=32$

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
$6\times32=192$

10) ⑤

정답해설

주어진 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면 11, 2와 2, 2는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.

(ⅰ) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하지 않는 경우
$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!2!}=6$

(ⅱ) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하는 경우

$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$을 이웃하게 넣는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

남은 자리에 2, 2를 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

그러므로 $4\times3=12$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $6+12=18$

11) ⑤

정답해설

[출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_3=2\times3^3=54$

이때 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222뿐이므로 구하는 자연수의 개수는

$54-1=53$

12) ①

정답해설

[출제의도] 원순열을 이해하여 의자를 배열하는 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수가 서로소가 되려면 짝수가 적힌 의자끼리는 서로 이웃하면 안 되고 3과 6이 적힌 의자도 서로 이웃하면 안 된다.

홀수가 적힌 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

홀수가 적힌 의자들의 사이사이에 있는 4개의 자리 중 3이 적힌 의자와 이웃하지 않는 자리에 6이 적힌 의자를 배열하고, 남은 3개의 자리에 나머지 3개의 의자를 배열하는 경우의 수는

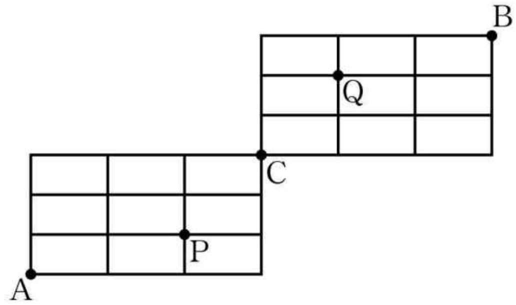
${}_2C_1\times3!=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$

13) ④

정답해설



오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!1!}=3$

마찬가지 방법으로 P지점에서 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{1!2!}=3$

A지점에서 P지점을 지나 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$ …… ㉠

마찬가지 방법으로 C지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!3!}=20$

C지점에서 Q지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A지점에서 P지점을 지나 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같으므로 9

C지점에서 B지점까지 Q지점을 지나지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수는

$20-9=11$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 구하는 경우의 수는

$9\times11=99$

14) ③

정답해설

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적힌 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.
(ⅰ) 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우
홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4\times 3 = 12$
선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{3!}=1$
나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!1!1!}=12$이므로
$12\times 1\times 12 = 144$
(ⅱ) 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우
홀수가 적힌 상자 3개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3 = 4$
선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{3!}=1$
나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!1!1!}=12$이므로
$4\times 1\times 12 = 48$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$144+48=192$

15) ⑤

정답해설

[출제의도] 중복순열 이해하기

$f(1)+f(2)=4$를 만족시키는 경우는 $f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=f(2)=2$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$의 3가지이다.
(ⅰ) $f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$인 경우
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3 = 64$
그러므로 함수 f의 개수는 $2\times 64 = 128$
(ⅱ) $f(1)=f(2)=2$인 경우
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 적어도 하나는 1이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.
그러므로 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 64-27=37$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 함수 f의 개수는
$128+37=165$

16) ③

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

$108 = 2^2\times 3^3$이므로 조건을 만족시키는 a, b, c, d 중 2개의 수가 서로 같거나 3개의 수가 서로 같아야 한다.
(ⅰ) 2개의 수가 서로 같은 경우
$108 = 2\times 2\times 3\times 9 = 3\times 3\times 2\times 6 = 6\times 6\times 1\times 3$의 3가지이다.
이 각각에 대하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
곱해진 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
그러므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times 12 = 36$
(ⅱ) 3개의 수가 서로 같은 경우
$108 = 3\times 3\times 3\times 4$의 1가지이다.
순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!}=4$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $36+4=40$

17) ①

정답해설

정답 및 해설

전체 경우의 수는
$(6-1)!=120$ ⋯⋯ ㉠
수의 합이 11 이 되는 순서쌍은 (5, 6) 이므로
5, 6이 이웃하게 원형으로 배열하는 경우의 수는 5, 6을 하나로 보고 배열하는 경우의 수와 같으므로
$(5-1)!\times 2!=48$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는
$120-48=72$

18) ②

정답해설

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)은 $(1, 2, 5)$ 또는 $(1, 3, 4)$이다.

(i) 순서쌍 (p, q, r)이 $(1, 2, 5)$인 경우 8개의 문자 P, Q, Q, R, R, R, R, R을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{8!}{2!\times 5!}=168$

(ii) 순서쌍 (p, q, r)이 $(1, 3, 4)$인 경우 8개의 문자 P, Q, Q, Q, R, R, R, R을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{8!}{3!\times 4!}=280$

따라서 (i), (ii)에 의하여
$168+280=448$

19) ③

정답해설

[출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) $f(3)=4$ 또는 $f(3)=10$ 인 경우
$f(3)=4$ 이면 $f(2)=f(5)=2$ 이고, $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
$f(3)=10$ 이면 $f(1)=f(4)=12$ 이고, $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
그러므로 구하는 함수의 개수는
$2\times {}_4\Pi_2=32$

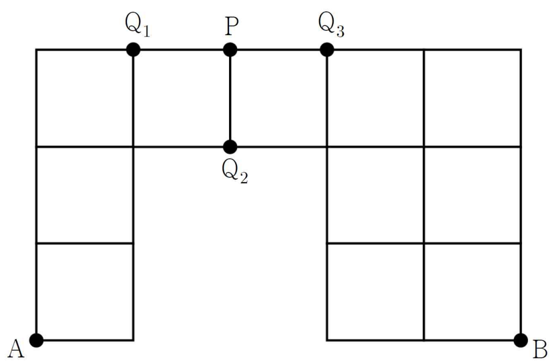
(ii) $f(3)=6$ 또는 $f(3)=8$ 인 경우
$f(3)=6$ 이면 $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
$f(3)=8$ 이면 $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2 개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.
그러므로 구하는 함수의 개수는
$2\times {}_2\Pi_2\times {}_3\Pi_2=72$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는
$32+72=104$

20) ⑤

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제 해결하기



그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면
A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는 Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고
P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는 Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.

그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $A \to Q_1 \to P \to Q_2 \to B$의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 24$$

(ⅱ) $A \to Q_1 \to P \to Q_3 \to B$의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 40$$

(ⅲ) $A \to Q_2 \to P \to Q_3 \to B$의 순서로 이동하는 경우

$$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 30$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는

$24 + 40 + 30 = 94$

21) 288

정답해설

[출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(ⅰ) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우

A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$,
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로
구하는 경우의 수는

$24 \times 2! \times 2! = 96$

(ⅱ) C가 A또는 B중 한 명과 이웃하는 경우

D 또는 E중 한 명과 C, A, B의 총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로
구하는 경우의 수는

$24 \times {}_2C_1 \times 2! \times 2! = 192$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$96 + 192 = 288$

22) 48

정답해설

[출제의도] 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

이때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(ⅰ) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2! = 2$

그러므로 이 경우의 수는

$24 \times 2 = 48$

(ⅱ) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
그러므로 이 경우의 수는
$24\times2=48$
(iii) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게 배열되는 경우
2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!=4$
그러므로 이 경우의 수는
$6\times4=24$
(i)~(iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는
$48+48-24=72$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-72=48$

23) 150
정답해설
[출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 자연수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.
(i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우
4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
(ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우
4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가
$\frac{4!}{2!}=12$이므로
(ii)의 경우의 수는 $2\times12=24$
(iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우
4 개의 숫자를 나열하는 경우의 수가
$\frac{4!}{3!}=4$이므로
(iii)의 경우의 수는 $2\times4=8$
(iv) 2, 2, 3, 3 을 나열하는 경우
4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
(i) (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1 인 경우의 수는
$12+24+8+6=50$
일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times50=150$

24) 115
정답해설
[출제의도] 중복순열을 활용하여 문제해결하기
구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만든 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.
(i) 숫자 0, 1, 2중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1또는 2이므로
만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2 … ㉠
남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\prod_4 = 3^4 = 81$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2 \times 81 = 162$

(ⅱ) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\prod_5 = 2^5 = 32$

(ⅲ) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2이므로 만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1… ㉢

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\prod_4 = 2^4 = 16$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$1 \times 16 = 16$

(ⅳ) 숫자 0, 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

자연수 22222의 1개다.

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$162 - (32 + 16 - 1) = 115$

25) ⑤

정답해설

[출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키려면 한 접시에는 빵을 2개 담고, 나머지 세 접시에는 빵을 1개씩 담아야 한다. 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는 $_5C_2 = 10$

2개의 빵이 담긴 접시를 A, 1개의 빵이 담긴 세 접시를 각각 B, C, D라 하자.

(ⅰ) 접시 A에 사탕을 담지 않는 경우

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담고 나머지 접시에 사탕 1개를 담는 경우의 수는

$_3C_2 = 3$

(ⅱ) 접시 A에 사탕 1개를 담는 경우

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 2개씩 담는 경우의 수는 $_3C_2 = 3$

접시 B, C, D 중 2개에 사탕을 1개씩 담고 나머지 접시에 사탕 2개를 담는 경우의 수는

$_3C_2 = 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 접시 A, B, C, D에 사탕을 담는 경우의 수는

$3 + 3 + 3 = 9$

접시 A, B, C, D를 원 모양의 식탁에 놓는 원순열의 수는

$(4-1)! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 9 \times 6 = 540$

26) 120

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키도록 선택한 6개의 수를 각각

1, 2, 3, a, b, c (a, b, c는 3 이하의 자연수) 라 하자.

$3 \le a+b+c \le 9$에서

$9 \le 1+2+3+a+b+c \le 15$

이므로 조건 (나)를 만족시키려면

$1+2+3+a+b+c = 12$

$a+b+c = 6$

(ⅰ) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 1, 2, 3인 경우

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(ⅱ) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 2, 2, 2인 경우

6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

정답 및 해설

$\frac{6!}{4!}=30$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$90+30=120$

27) ①

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

8장의 카드에서 7장의 카드를 택하는 경우는 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 또는 3장 선택되는 경우이다.

(i) 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 선택된 경우

짝수 2, 2, 2, 4가 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

짝수가 적힌 4장의 카드를 □로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 세 곳에 홀수가 적힌 3장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨□∨

홀수가 적혀 있는 3장의 카드는

1, 3, 3이 적힌 카드이거나 1, 1, 3이 적힌 카드이므로

홀수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_5C_3\times2\times\frac{3!}{2!}=60$

구하는 경우의 수는 $4\times60=240$

(ii) 짝수가 적혀 있는 카드가 3장 선택된 경우

짝수가 적혀 있는 3장의 카드는

2, 2, 2가 적힌 카드이거나 2, 2, 4가 적힌 카드이므로

짝수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $1+\frac{3!}{2!}=4$

이 각각에 대하여 짝수가 적힌 3장의 카드를 □로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 그림과 같이 ∨로 표시된 네 곳에 홀수가 적힌 4장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨

홀수 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

구하는 경우의 수는 $4\times6=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$240+24=264$

28) ⑤

정답해설

[출제의도] 중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 모두 홀수이다.

(i) 함수 f의 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 $_3C_1=3$

이때 $f(2)=2$, $f(4)=4$이므로 구하는 함수 f의 개수는 3

(ii) 함수 f의 치역에 홀수가 2개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 $_3C_2=3$

① 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

② 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $_2\Pi_3-2=6$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2\times2=4$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times(2\times2+6\times4)=84$

(iii) 함수 f의 치역에 홀수가 3개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는 $_3C_3=1$

① 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수

수는 3

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

② 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2 \times ({}_2\Pi_3 - 2) = 18$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

③ 집합 $\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}$의 원소의 개수가 3이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3! = 6$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$1 \times (3 \times 1 + 18 \times 2 + 6 \times 3) = 57$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

구하는 함수 f의 개수는

$3 + 84 + 57 = 144$

29) ②

정답해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$이다.

(ⅰ) $b=1$인 경우

$ac = 2^4 \times 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로

$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로

2^4이 a 또는 c의 약수이고

3^2이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_3 = 8$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는

$30 - 8 = 22$

(ⅱ) $b=2$인 경우

$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $2^2 \times 3^2 \times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^2 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로

2^2이 a 또는 c의 약수이고

3^2이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는 ${}_2\Pi_3 = 8$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $18 - 8 = 10$

(ⅲ) $b=3$인 경우

$ac = 2^4 \times 5$이므로 a, c는 $2^4 \times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로

$(4+1) \times (1+1) = 5 \times 2 = 10$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^4이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는 ${}_2\Pi_2 = 4$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $10 - 4 = 6$

(ⅳ) $b=4$인 경우

$ac = 3^2 \times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅴ) $b=6$인 경우

$ac = 2^2 \times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅵ) $b=12$인 경우

조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.
(ⅰ)~ (ⅵ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$22+10+6+2+2=42$

30) ②

정답해설

[출제의도] 확률을 이용하여 추론하기

총 7명의 학생이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉는 경우의 수는 $7!$

A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉거나 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 사건을 X, A열의 좌석에 3학년 학생들이 이웃하여 앉는 사건을 Y라 하자.

(ⅰ) A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉거나 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우
조건 (나)에 의하여 3학년 학생 3명 모두 B열의 좌석에 앉을 수 없으므로 3학년 학생 중 1명은 반드시 A열의 좌석에 앉아야 한다.
A열의 좌석에 이웃하여 앉는 학생들의 학년을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1$
이 정해진 학년의 두 학생이 A열의 두 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times2!$
A열의 남은 한 좌석에 앉을 3학년 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1$
그러므로 A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
${}_2C_1\times(2\times2!)\times{}_3C_1=24$
$\cdots\cdots$ ㉠
B열에는 1, 2학년 중 A열에 앉지 않은 한 개 학년의 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉아야 한다.
이제 남은 2개 학년의 학생들이 앉는 자리를 △, □라 하면 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는 상황은
△□△□, □△□△
의 2가지이다.
이 각각에 대하여 2개 학년의 학생 두 명씩 총 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 $2!\times2!$
그러므로 B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 $2\times(2!\times2!)=8$
$\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\mathrm{P}(X)=\dfrac{24\times8}{7!}$

(ⅱ) A열의 좌석에 3학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우
A열의 좌석에 앉을 3학년 학생 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
선택된 3학년 학생 2명이 A열의 두 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times2!$
A열의 남은 한 좌석에 앉을 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1$
그러므로 A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
${}_3C_2\times(2\times2!)\times{}_4C_1=48$
$\cdots\cdots$ ㉢
A열에 학생 3명이 앉은 후 남은 4명의 학생은 1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 1명으로 구성되거나 1학년 2명, 2학년 1명, 3학년 1명으로 구성된다. 어느 경우라도 학년이 같은 학생이 2명이므로 남은 4명의 학생들이 조건 (나)를 만족시키면서 B열의 4개의 좌석에 앉는 경우의 수는 같다.
4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 조건과 상관없이 앉는 경우의 수는 $4!$
이 4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 앉되 같은 학년의 학생 2명이 이웃하면서 앉는 경우의 수는 $2\times3!$
그러므로 B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 $4!-2\times3!=12$
$\cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에 의하여 $\mathrm{P}(Y)=\dfrac{48\times12}{7!}$
이때 두 사건 X와 Y는 서로 배반사건이므로

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)$$
$$=\frac{24\times8}{7!}+\frac{48\times12}{7!}$$
$$=\frac{16}{105}$$

31) 97

정답해설

[출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(ⅰ) 1, 2, 3 에서만 선택한 후 나열하는 경우
1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는
$_3\Pi_4-{}_2\Pi_4=3^4-2^4=65$

(ⅱ) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는 $2\times({}_4C_2-3)=6$이고, □에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 $2^2=4$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$

(ⅲ) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1, 1, 4를 나열하는 경우는 11□4, 4□11 이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2\times2=4$ 이다.
1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $4+4=8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$65+24+8=97$

32) 708

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(ⅰ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우
4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 $_4C_2=6$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

(ⅱ) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우
4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 $_4C_1=4$
Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는
$_3C_2=3$
Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 $_2\Pi_2=4$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
그러므로 구하는 경우의 수는
$4\times3\times4\times12=576$

(ⅲ) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우
각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는
$_2\Pi_4=16$
D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$36+576+96=708$

33) 720

정답해설

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

함수 $f: X\to X$의 개수는
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수와 같다.
조건 (가)에서
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 홀수의 개수를 n이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$이다.

(ⅰ) $n=0$일 때
치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=2$일 때
조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로

같으면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고 홀수인 두 함숫값이 서로 다르면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개다.

(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3 \cdots$ ㉠

치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

문자 a, a, b, c, c또는 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times 2!} + \dfrac{5!}{2!\times 2!} = 60 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$3 \times 60 = 180$

(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6 \cdots$ ㉢

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!} = 20 \quad \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$6 \times 20 = 120$

(a), (b)에 의하여 $180 + 120 = 300$

(ⅲ) $n = 4$ 일 때

짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서 치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인 원소는 1개다.

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6 \cdots$ ㉤

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

문자 a, b, b, b, c 또는 문자 a, a, b, b, c 또는 a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!} \times \dfrac{5!}{2!\times 2!} + \dfrac{5!}{3!} = 70 \quad \cdots$ ㉥

㉤, ㉥에 의하여

$6 \times 70 = 420$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

구하는 함수 f 의 개수는 $300 + 420 = 720$

34) 188

정답해설

[출제의도] 중복순열을 활용하여 문제해결하기

문자열 aaa와 이웃한 자리를 △, 문자열 aaa와 이웃하지 않는 자리를 □로 나타내면

조건 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는

aaa△□□□, △aaa△□□, □△aaa△□, □□△aaa△, □□□△aaa의 5가지이고

조건 (나)에 의하여 △에 나열될 수 있는 문자는 b 또는 c이다.

(ⅰ) aaa△□□□일 때

(a) △에 b가 나열된 경우

3개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3 = 27$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$aaabbba$, $aaabbbb$, $aaabbbc$, $aaabaaa$,

$aaabccc$의 5가지이다.
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$27-5=22$
(b) △에 c가 나열된 경우
(a)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 22
(a), (b)에 의하여 만들 수 있는 문자열의 개수는
$22+22=44$
(ⅱ) △aaa△□□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$
이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은 $baaabbb$, $baaaccc$, $caaabbb$, $caaaccc$의 4가지이다.
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9-4=32$
(ⅲ) □△aaa△□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=9$
그러므로 만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9=36$
(ⅳ) □□△aaa△일 때
(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 32
(ⅴ) □□□△aaa일 때
(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 44
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는
$44+32+36+32+44=188$

35) 40

정답해설

[출제의도] 원순열을 활용하여 문제해결하기

문제에서 깃발을 놓는 상황은 1부터 7까지의 숫자 중 하나를 원의 중심에 놓고, 나머지 6개의 숫자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 것과 같다.
이제 원의 중심에 놓인 깃발에 적힌 수를 c라 하자.
(ⅰ) $c=1$인 경우
나머지 6개의 숫자는 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.
6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 11 이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 2, 3, 4 중 두 개이어야 하고, 7과 이웃하지 않는 세 수는 어떤 수이어도 조건을 만족시킨다.
2, 3, 4 중 두 개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$
7과 이웃하는 두 수를 a, b라 할 때, 7, a, b를 하나로 보고 나머지 세 수와 합친 4개의 수를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!$
이 각각에 대하여 a, b가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_3C_2\times(4-1)!\times2!=36$
(ⅱ) $c=2$인 경우
나머지 6개의 숫자는 1, 3, 4, 5, 6, 7이다.
6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 10 이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 1, 3이어야 한다.
또한 5, 6은 서로 이웃할 수 없으므로 4는 5와 6 사이에 배열되어야 한다.
7의 양 옆에 1, 3을 배열하는 경우의 수는 $2!$
4의 양 옆에 5, 6을 배열하는 경우의 수는 $2!$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2!\times2!=4$
(ⅲ) $c=3$인 경우
나머지 6개의 숫자는 1, 2, 4, 5, 6, 7이다.
6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 9

이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 1, 2이어야 한다.

이때 6은 4, 5 중 하나의 수와 반드시 이웃할 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $c \geq 4$인 경우

c를 제외한 6개의 숫자 중 가장 큰 수를 k라 하면 $c+k \geq 11$이다.

k와 이웃하는 두 수가 동시에 1 이하일 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는

$36+4=40$

36) 150

정답해설

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1),\ f(7))$은

$(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 7)$

조건 (나)에 의하여

$f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$

이고 $f(2) \leq f(4) \leq f(6)$

조건 (다)에 의하여 $|f(2)-f(1)|$과 $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 값은 모두 3의 배수인 자연수이다.

(ⅰ) $f(1)=1,\ f(7)=4$인 경우

$f(3)+f(5)=4$ 또는 $f(3)+f(5)=7$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는 $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 4)$

$f(1)=1$이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=4$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2$,

$f(2)=7$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_4\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=10+1=11$

그러므로 $3\times 11=33$

(ⅱ) $f(1)=2,\ f(7)=5$인 경우

$f(3)+f(5)=5$ 또는 $f(3)+f(5)=8$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는 $(2,\ 3),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4)$

$f(1)=2$이므로 $f(2)=5$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

그러므로 $3\times 6=18$

(ⅲ) $f(1)=3,\ f(7)=6$인 경우

$f(3)+f(5)=6$ 또는 $f(3)+f(5)=9$ 또는 $f(3)+f(5)=12$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는 $(3,\ 3),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (6,\ 6)$

$f(1)=3$이므로 $f(2)=6$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$

그러므로 $4\times 3=12$

(ⅳ) $f(1)=4,\ f(7)=7$인 경우

$f(3)+f(5)=10$ 또는 $f(3)+f(5)=13$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는 $(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 7)$

$f(1)=4$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=1$이면 순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_2$

$f(2)=7$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_7\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=28+1=29$

그러므로 $3\times 29=87$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$33+18+12+87=150$