Chapter I

TH② 급수

② 급수

(1) 기출의 지형지물

수능이 선택과목 체제로 개편된 2022학년도 이후부터 모든 기출문제를 체계적으로 정리하였습니다. 이를 통해 수험생들이 보다 효율적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

(2) 구성

· 3월 교육청 모의고사
· 4월(5월) 교육청 모의고사
· 7월 교육청 모의고사
· 10월 교육청 모의고사
· 6월 평가원 모의고사
· 9월 평가원 모의고사
· 사관학교 기출문제
· 수능

(3) 김지형의 '출제 등고선' 적용 기준

최근 평가원과 수능에서 출제되는 유형만을 선별하여 최신 지형에 맞는 문제만 정리하였습니다.
· 출제 흐름과 맞지 않는 낙후된 지형(문항) 제거
· 예) 도형(급수), 도형(삼각함수의 극한) 유형 제외
· 출제 패턴을 분석하여 수능에서 반드시 밟고 가야 할 등고선만 반영
이 기출 정리를 통해 출제 지형을 파악하고, 최적의 경로로 고득점에 오를 수 있도록 설계하였습니다.

STEP 1 Plains

3점 **23~27번**

STEP 2 Hills

4점 **중간난이도**

STEP 3 Mountains

4점 **고난이도**

STEP 1 Plains

001 2021년 4월 미적분25

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=5$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

002 2021년 10월 미적분24

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

003 2022년 3월 미적분26

첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

004 2022년 6월 미적분27

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1

③ $\frac{3}{2}$　④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

005 2024년 5월 미적분24

첫째항이 1이고 공차가 d $(d>0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)=\frac{2}{3}$일 때, d의 값은? [3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

006 2024년 6월 미적분25

수열 $\{a_n\}$이 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2+2a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{4}$
② $\frac{19}{4}$
③ $\frac{21}{4}$
④ $\frac{23}{4}$
⑤ $\frac{25}{4}$

007 2022학년도 수능 미적분25

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

008 2023년 4월 미적분25

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

009 2023년 10월 미적분27

모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=4$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$
⑤ $\frac{1}{2}$

010 2023년 9월 미적분26

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$
② $\frac{6}{5}$
③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{3}{2}$

STEP 2 Hills

011 2024년 9월 미적분29

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Essential Questions Aligned with the Latest Trends

012 2024학년도 수능 미적분29

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$, $3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

013 2024년 5월 미적분30

수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases}$$

(α는 양의 상수)라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$이다.

$32 \times (a_3 + p)$의 값을 구하시오. [4점]

014 2024년 7월 미적분29

첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오. [4점]

015 2023년 6월 미적분30

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

Essential Questions Aligned with the Latest Trends

016 2025학년도 수능 미적분29

등비수열 $\{a_n\}$이 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$을 만족시킨다.
부등식 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.
[4점]

MEMO

Chapter Ⅰ. TH② 급수

001	정답 4번
002	정답 3번
003	정답 3번
004	정답 3번
005	정답 3번
006	정답 3번
007	정답 2번
008	정답 4번
009	정답 1번
010	정답 5번
011	정답 57
012	정답 162
013	정답 138
014	정답 12
015	정답 24
016	정답 25

1) ④

정답해설

[출제의도] 급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$

$=\frac{2+3\times 2}{1+0}=8$

2) ③

정답해설

[출제의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+\lim_{n\to\infty}4$

$=0+4=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3-0}=3$

3) ③

정답해설

[출제의도] 수열의 합과 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

수열 $\{b_n\}$은 $n\geq 2$일 때,

$\frac{1}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_k}=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$

에서 $b_n=\dfrac{1}{2n-1}$ 이고 $b_1=1$ 이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\dfrac{1}{2n-1}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

4) ③

정답해설

[출제의도] 급수의 수렴조건을 이해하고 급수의 합을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$a_n=4+(n-1)d$

이때, 급수

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1}-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)=d-3=0$$

그러므로

$d=3$

이때, $a_n=3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

5) ③

정답해설

[출제의도] 급수의 뜻 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)d$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)+\left(\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{dn+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1+\frac{1}{n}}{d+\frac{1}{n}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$$

따라서 $d=3$

6) ③

정답해설

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{2}$ …… ㉠

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{3}{2}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{9}{4}+3$$

$$=\frac{21}{4}$$

7) ②

정답해설

[출제의도] 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r 이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

이때, $a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}$

$=ar^{2n-2}(1-r)$

$=a(1-r)(r^2)^{n-1}$

이므로, 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고, 공비가 r^2 인 등비수열이다.

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서

$-1<r<1$이고,

$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$이고, $r\neq 1$이므로,

$\frac{a}{1+r}=3$ …… ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로,

$$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$$

따라서, ㉠에서 $\frac{a}{1-r}\times 3=6$이므로,

$$\frac{a}{1-r}=2$$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=2$

8) ④

정답해설

[출제의도] 급수의 성질 이해하기

$b_n=a_n-\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$이라 하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$$

$$=0+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$=0+\frac{2}{1+0}=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n+5\times 2^{n+1}}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5\times 2}{1+\frac{3}{2^n}}$$

$$=\frac{2+10}{1+0}=12$$

9) ①

정답해설

[출제의도] 등비급수를 이해하여 급수의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$은 첫째항이 $\frac{a}{3}$, 공비가 $\frac{r}{3}$인

등비급수이고 수렴하므로 $-1<\frac{r}{3}<1$,

$-3<r<3$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$인

등비급수이고 수렴하므로 $-1<\frac{1}{r^2}<1$,

$r^2>1$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

㉠, ㉡에서 $r=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}}=a=4$$

$a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

10) ⑤

정답해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라고 하면 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$에서

$$(1+d)r=1,\qquad r=\frac{1}{1+d}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+b_n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\frac{1}{1-r}$$

$$=\frac{1}{d}+\frac{1}{1-\frac{1}{1+d}}$$

$$=\frac{2+d}{d}=2$$

$\therefore\ d=2$

$r=\frac{1}{1+d}$에서 $d=2$이므로 $\qquad r=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

11) 57

정답해설

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=m+2}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+m+1}\frac{1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

$m=1$일 때 $\qquad a_1=S_1=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}=\frac{3}{2}$

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}=\frac{1}{11}$$

$a_1+a_{10}=\frac{35}{22}$이므로 $\qquad p=22,\ q=35$

$\therefore\ p+q=57$

12) 162

정답해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r_1, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b_1, 공비를 r_2라 하면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r_2}$

이때 수열 $\{a_n b_n\}$은 첫째항이 $a_1 b_1$, 공비가 $r_1 r_2$인 등비수열이고 $-1 < r_1 r_2 < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2}$$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$에서

$$\frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2} = \frac{a_1}{1-r_1} \times \frac{b_1}{1-r_2}$$

$\therefore r_1 + r_2 = 2 r_1 r_2$ …… ㉠

또 수열 $\{|a_{2n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1|$, 공비가 $r_1^{\,2}$인 등비수열이고, 수열 $\{|a_{3n}|\}$은 첫째항이 $|a_1 r_1^{\,2}|$, 공비가 $|r_1^{\,3}|$인 등비수열이며 $0 \leq r_1^{\,2} < 1$, $0 \leq |r_1^{\,3}| < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = \frac{|a_1 r_1|}{1-r_1^{\,2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = \frac{|a_1 r_1^{\,2}|}{1-|r_1^{\,3}|}$$

따라서 $3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$에서

$$\frac{3|a_1 r_1|}{1-r_1^{\,2}} = \frac{7|a_1 r_1^{\,2}|}{1-|r_1^{\,3}|}$$

(ⅰ) $r_1 > 0$일 때

$\frac{3}{1-r_1^{\,2}} = \frac{7r_1}{1-r_1^{\,3}}$에서

$3 - 3r_1^{\,3} = 7r_1 - 7r_1^{\,3}$,

$(2r_1+3)(2r_1-1)(r_1-1) = 0$

$\therefore r_1 = \frac{1}{2}$

즉 ㉠에서 $\frac{1}{2} + r_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times r_2$이므로 이를 만족시키는 r_2는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $r_1 < 0$일 때

$\frac{3}{1-r_1^{\,2}} = \frac{-7r_1}{1+r_1^{\,3}}$에서

$3 + 3r_1^{\,3} = -7r_1 + 7r_1^{\,3}$,

$(2r_1-3)(2r_1+1)(r_1+1) = 0$

$\therefore r_1 = -\frac{1}{2}$

즉 ㉠에서 $\left(-\frac{1}{2}\right) + r_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) r_2$이므로

$r_2 = \frac{1}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1 \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{n-1} + b_1 \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}^n}{b_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{60}$$

$$= \frac{27}{20}$$

따라서 $S = \frac{27}{20}$이므로

$120S = 120 \times \frac{27}{20} = 162$

13) 138

정답해설

[출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 조건 (가)에 의하여 $\frac{a}{1-r} = 4$ …… ㉠

수열 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}1 & (|a_n|<\alpha)\\ -\dfrac{a_n^2}{5} & (|a_n|\geq \alpha)\end{cases}$$

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|<\alpha$라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{m}1=m$의 값이 최소가 되도록

하는 자연수 m의 값은 1이므로 조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{1}b_n=\sum_{n=1}^{1}a_n=a=51$$

㉠에 의하여 $r=-\dfrac{47}{4}<-1$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이

수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_k|\geq \alpha$, $|a_{k+1}|<\alpha$인 자연수 k가 존재한다.

$1\leq n\leq k$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n}=-\dfrac{{a_n}^2}{5}<0$

$n\geq k+1$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n}=1>0$

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m은 k이고

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\frac{ar^k}{1-r}=\frac{1}{64}$$

㉠에 의하여 $r^k=\dfrac{1}{256}$

$$\sum_{n=1}^{k}b_n=\sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{5}{a_n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{k}\left\{-\frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{-\dfrac{5}{a}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^k\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=51$$

$r^k=\dfrac{1}{256}$이므로 $a(r-1)=25r$

㉠에 의하여 $4(1-r)(r-1)=25r$,

$4r^2+17r+4=0$

$-1<r<1$이므로 $r=-\dfrac{1}{4}$, $a=5$

그러므로 $p=k=4$

따라서

$$32\times(a_3+p)=32\times\left\{5\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2+4\right\}=138$$

14) 12

정답해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1=1$이므로 $a_n=r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

$\displaystyle\sum_{n=1}\left(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|\right)=0$에서

$0<r<1$이면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|\right)>0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1<r<0$

$\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고

$\{|a_{3n-1}|\}$은 공비가 $-r^3$인 등비수열이다.

$0<r^2<1$, $-1<-r^3<0$이므로

두 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}a_{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}|a_{3n-1}|$은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|\right)$$

$$=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21|a_2|}{1-(-r^3)}=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21\times(-r)}{1+r^3}=0$$

$20(1-r+r^2)-21(1-r)=0$

$20r^2+r-1=0$

$(5r-1)(4r+1)=0$

정답 및 해설

$-1<r<0$이므로 $r=-\frac{1}{4}$

$a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$\frac{b_n}{a_n}=b_1\times(-4s)^{n-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\times(-4s)^{n-1}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n-1}\left\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\right\}\right]$

(ⅰ) $-1<4s<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}(4s)^{n-1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\right\}=3$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅱ) $4s<-1$ 또는 $4s>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\right\}$은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅲ) $4s=-1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\left\{3\times(-1)^{n-1}\right\}$은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}\left\{3\times(-1)^{n-1}\right\}$은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 발산한다.

(ⅳ) $4s=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n-1}\times(3+b_1)\right\}$

$b_1=-3$일 때,

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$b_1=-3,\ s=\frac{1}{4}$

$b_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=-4$

따라서 $b_1\times\sum_{n=1}b_n=12$

15) 24

정답해설

[출제의도] 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq0$이다.

(ⅰ) $r>1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅱ) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅲ) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$, a_1, $\cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.
(iv) $r<-1$인 경우
a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.
(v) $r=0$인 경우
a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.
따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.
그런데 $b_3=-1$이므로 $a_3 \le -1$이다.
즉, $a_1r^2 \le -1$이다.
그런데 $0<r^2<1$이므로
$a_1 \le -1$
따라서 $b_1=-1$이다.
또한 $a_1 \le -1$이므로 $0<r<1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 따라서 $-1<r<0$이다.

① $a_2=a_1r \le -1$일 때
$r \ge -\dfrac{1}{a_1}>0$이므로 모순이다.
따라서 $a_2=a_1r>-1$이므로
$b_2=a_2=a_1r$

② $b_3=-1$이므로 $a_3=a_1r^2 \le -1$

③ $a_4=a_1r^3 \le -1$일 때
$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r \ge -r>0$ 이므로 모순이다.
즉 $a_4>-1$이므로
$b_4=a_4=a_1r^3$

④ $a_5=a_1r^4 \le -1$일 때 $b_5=-1$ 인데
$b_1+b_3+b_5=-3$
이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.
$b_5=a_5=a_1r^4$

⑤ $a_6=a_4r^2$이고 $a_4>-1$이므로
$a_6>-r^2>-1$
따라서
$b_6=a_6=a_1r^5$
같은 방법으로 생각하면
$b_7=a_7$, $b_8=a_8$, $b_9=a_9$, $\cdots$이므로

$$b_n=\begin{cases} -1 & (n=1,\ n=3) \\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\ge 4) \end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$$
$$=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$$
$$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-3$$
$$\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1$$
$$a_1r^4=r^2-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+\cdots=\frac{a_1r}{1-r^2}=8$$
$$a_1r=8-8r^2=8(1-r^2) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서
$a_1r=-8a_1r^4$ 이므로
$$r^3=-\frac{1}{8}$$
즉 $r=-\dfrac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면
$$-\frac{1}{2}a_1=6,\ a_1=-12$$
따라서 $a_n=-12\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=24$$

16) 25

정답해설

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=10,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{10}{3}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하므로 등비수열

$\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $-1<r<1$

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 $\{|a_n|\}$도

등비수열이므로 등비수열 $\{|a_n|\}$의 공비는

$|r|$이다.

$$\frac{|a_1|}{1-|r|}=10,\ \frac{a_1}{1-r}=\frac{10}{3}$$

(ⅰ) $0\le r<1$일 때

$|a_1|=10-10r,\ a_1=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}r$이므로

$10-10r=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}r$ 또는

$10-10r=-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}r$

$\therefore\ r=1$

그런데 $0\le r<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-1<r<0$일 때

$|a_1|=10+10r,\ a_1=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}r$이므로

$10+10r=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}r$ 또는

$10+10r=-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}r$

$r=-\frac{1}{2}\ (\because\ -1<r<0),\quad a_1=5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=5,\ r=-\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{2n}\left\{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{k(2k-1)}\times a_{m+2k-1}+(-1)^{k(2k+1)}\times a_{m+2k}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2k-2}+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2k-1}\right\}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{k}\right\}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{-\frac{5}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$ 을 만족시키는 자연수

m은 홀수이고, m이 홀수이면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{2^{m-1}}>\frac{1}{700}$$

$2^{m-1}<700$

이므로, 이를 만족시키는 홀수인 자연수 m의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$