#9

comment & review point

♬관찰 상황의 세팅

함수와 상수의 관계로 바라볼 것인지 함수와 직선의 관계로 바라 볼 것인지 생각을 해 보고 싶다

~> $f'(x)=x^2+2kx-4k$의 경우 k에 의해 범위가 계속 바뀌니까 조금 귀찮다

~> $x^2=-2k(x-2)$의 경우, $y=x^2$도 아는 함수고, $y=-2k(x-2)$ 또한, $(2,0)$을 찍어놓고 기울기를 휘청휘청 보면 되니까 좀 쉽다.

문제를 풀 때, 세팅을 어떻게 가져갈지 잘 생각해보라.

풀이

주어진 상황을 comment에서와 같이, 정리하면 다음과 같다

"$(2,0)$~{$(1,1)$~$(3,9)$}" 까지 기울기를 관찰했을 때 그 값이 $-2k$ 이제 최대최소를 구해보면,

$-2M=\dfrac{1-0}{1-2}$, $-2m=\dfrac{9-0}{3-2}$ $\quad \therefore M-m=5$

동형 기출 문항

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때,

$a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

#10

comment & review point

♬ 도형문제 풀이에서의 설계

도형문제를 풀 때, 손가는대로 하지말고, 무엇을 구하고 무엇을 아는지를 판단 한 후, 문제풀이가 끝났을 때, 계산을 시작하자

1. $\triangle ABD$랑 $\triangle ACD$ 외접원 넓이 비를 앎.~> $\overline{AD}$가 공유 되고 있으니, $\angle ABC$와 $\angle ACB$, $\angle ACD$ 의 사인값 비를 앎
2. 1.에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 길이 비를 알고 $\overline{AB}$의 길이가 5로 주어져 있으니, $\overline{AC}$의 실제값을 앎
~~(아직 계산을 안하는게 포인트)~~
3. $\overline{AD}$알려면 이제 $\cos\angle ACD$ 만 알은 되는데, $\triangle ABC$는 $\overline{AB}, \overline{AC}, \cos\angle BAC$를 아니까 SAS로 결정되어 있어서 어떤 값이던 구할수 있으니 끝났음 이제 계산 시작

풀이

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\angle ABC} : \frac{\overline{AD}}{\sin\angle ACD} = \frac{5}{\sqrt{3}} : 1$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC} : \frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB} = 1 : 1 \qquad \therefore AC = \sqrt{3}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\times\overline{AC}\cos\angle BAC \qquad \therefore \overline{BC} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\angle CAD = -\cos\angle acb = -\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AC}\times\overline{BC}} \qquad \therefore \cos\angle ACD = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$\frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{\overline{AD}} = \cos\angle ACD \qquad \therefore \overline{AD} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

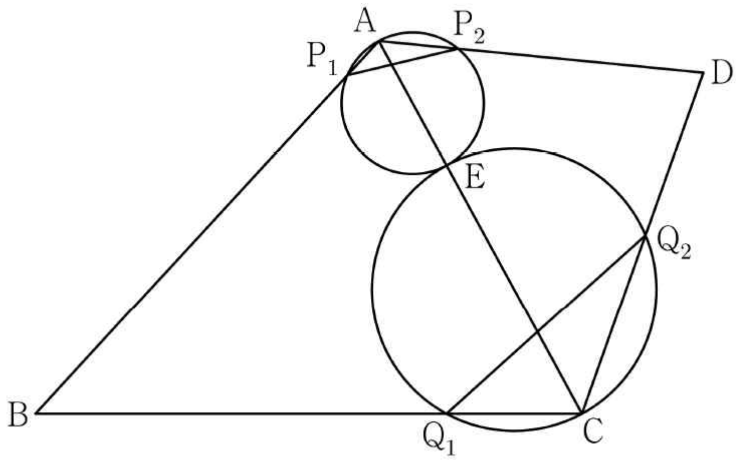
동형 기출 문항

그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \overline{\mathrm{CD}}=2,\ \cos(\angle \mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle \mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AE를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}:\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$)



#11

comment & review point

♬ 연속성 미분가능성은 인지가 난도

옛날처럼 미불미불 미가미불 불연불연 연불연 (~~흑마법 주술도 아니고..~~) 외워서 푸는 풀이의 시대는 저물었다 ..
애초에가 함수가 연속이나 미분가능한건 특별한 조건이기에, "연속성을 잘 이용하기" 가 포인트 이다.
이 때, 계산은 점 위주로 한다

♬ 관찰대상 초점화

문제를 무엇으로 풀지 정하고 설계하자 이 문제는 $|f(x)|$의 연속성으로 문제를 푸는것이니 $f(x)=$ ~~~ 로 정리하는게 맞아보인다

풀이

$f(x)\begin{cases} x^2-g(x) & |x|\geq 4 \\ x-g(x) & |x|<4 \end{cases}$ 이때 $|x|=4$ 에서의 연속성만 관찰하면 되고, $|x|=4$ 에서,
$x\neq x^2$ 이므로,
$f(4-)+f(4+)=f(-4-)+f(-4+)=0 \quad \therefore g(x)=\dfrac{1}{2}x+8 \quad (\because g(4)=10, g(-4)=6)$

$\therefore f(10)=87$

동형 기출 문항

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x < 0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x > 0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고

$\lim_{x \to 0-} g(x) - \lim_{x \to 0+} g(x) = 6$ 일 때, $f(0)$의 값은?

#12

comment & review point

할말 없음

$S_n - S_{n-1} = a_n$할 때, $n=1$이랑 아닐 때 구분 주의

풀이

b_n이 등차수열 이므로, $n \geq 2$에서, $a_n = d(n+5)$ ... ♥

$\sum_{n=1}^{6} a_n = 84, b_9 = 15$ 를 ♥의 d와 a_1으로 정리하고 연립하면, $a_1 = -6, d = 2$ ... ♠

♠의 사실을 통하여 $\sum_{n=1}^{8} \frac{14}{a_n a_{n+1}}$ 을 계산하면, $\frac{1}{12}$임

동형 기출 문항

$a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? (2025학년도 수능 12번)

#13

comment & review point

못풀면...

풀이

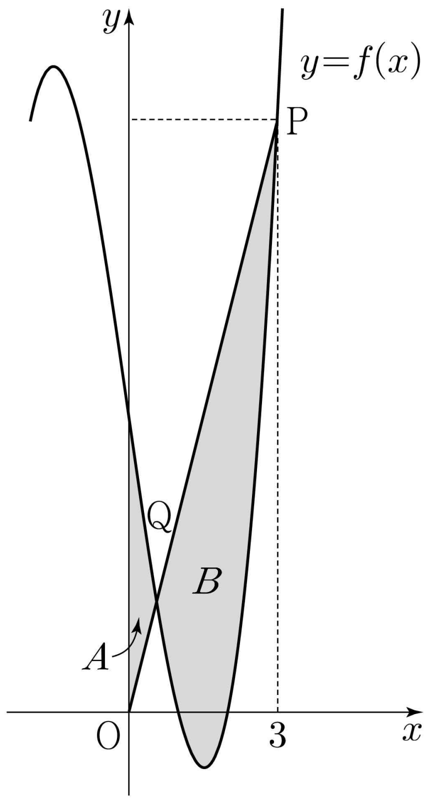
$$\int_0^3 (x)(x-1)(x-4)dx = \frac{27}{8}$$

동형 기출 문항

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $P(3, f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A,
곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은?



#14

comment & review point

♬ case찾기의 논리

case찾기 문제를 할 때는 연역적으로 일단 할수 있는 것을 한다. 그 뒤로 뭐가 안보이면 특수,극단,일반 case를 찾아보도록 하자

풀이

양수 범위에서, $f(x)$의 최대최소는

최대의 경우 사인 반주기를 다 먹기전까지는 점점 커지다 1찍고 1유지

최소의 경우 0이였다가 반주기 이후 -1 찍고 -1 유지 이다.

음수 범위에서, $f(x)$의 최대최소는 최대의 경우 $x=-t$ 최소의 경우 $x=0$이다. $(\because a<-\frac{1}{2})$

한편, $f(x)$의 전체 최솟값이 $f(0)$ 이라면, $g(1)-g(2)$의 값이 각 구간에서 최댓값을 빼는것과 동치인데, $f(-2)=1$ 이므로 $g(1)-g(2)=0$ 이다.

따라서, $f(0)$의 값은 -1보다는 크고, 따라서, $g(1)=\frac{1}{2}$ 이다, $(\because g(2)=0)$

$g(1)=1+(f(0)=-\frac{1}{2})$ $\quad \therefore a=-\frac{3}{4}$

따라서, $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{7}{6}, t_3=\frac{8}{3}$ 이다.

동형 기출 문항

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여

구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고,

구간 $[t,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은
>
> $\{t \mid 0 \le t \le 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오.

#15

comment & review point

♬ 삼차함수의 잘 알려진 사실들 & 미지수의 개수를 느껴가며 식을 세우자

box 조건을 잘 째려보면 다음과 같이 한마디로 정리할 수 있다.

“$x=\frac{1}{3}$에서의 극값은 $-\frac{1}{3}$이 아니고 다른 극값은 $x=t$에서 함숫값이 $y=-t$이다. ”

이제 미지수가 하나 남았고 $f(0)=0$임이 주어져 있으므로 확신을 가지고 식을 세우자

(삼차함수의 세근이 변곡점의 3배임을 이용하자)

● ~~신봉선 모양 함수 ㄴㅇㄱ 도 있지만.. 당연 답이 아닐 듯 하다..~~

풀이

$$\begin{cases} f(x)-(-k)=(x-k)^2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right) \\ f(0)=0 \end{cases} \qquad \therefore k=-1 \text{ or } 0 \text{ or } 2$$

이를 바탕으로, $f(2)$의 값을 계산해보면, $k=-1$일 때, 최댓값 10을 가진다.

동형 기출 문항

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

#20

comment & review point

♬ 유리식으로서의 이해

지수 로그 식은 그 자체로서 의미가 떨어진다.. 고로, 좌표들을 전부 유리식으로 잡아놓고 대입을 마지막에 한다. 이때, 각 좌표들의 관계는 도형의 관점에서 표현하는 것이 좋다

유리식으로 전부 표현했다면, 이제 대입으로 마무리 하도록 하자!

풀이

$y=a^{2x}$ 와 $\frac{1}{2}\log_a(x-3)-3$ 은 $y=x-3$에 대하여 대칭이다

이를 통해 점들을 각각

$A(p, p-3)\,B(q+3, q)\,C(p, q)\,D(q+3, p-3)$으로 잡아보자.

위 결과를 각각의 함수에 대입하면,

$a^{2p}=q,\quad a^{p}=q+3,\quad a^{q+3}=q$ 이를 적당히 잘 연립하면, $a^{p}=3, p=6, q=9$ 이다.

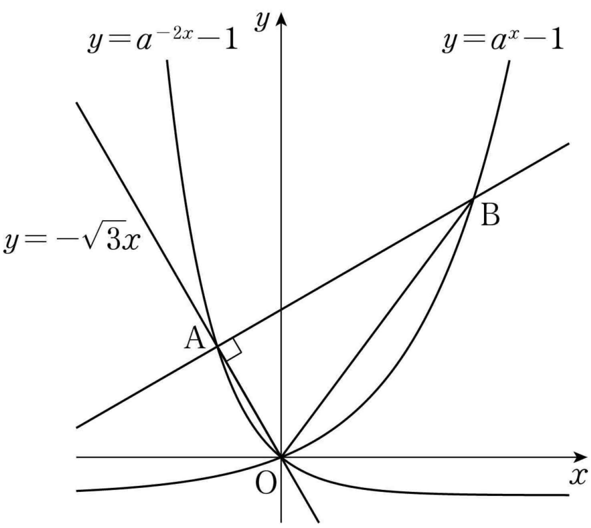
동형 기출 문항

그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^{x}-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제1사분면에서 만나는 점 B라 하자.

$\overline{\mathrm{OA}}$: $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}$: $\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



#21

comment & review point

♬ 제한된 조건의 활용 (feat. 부호 조건의 활용!)

♬ 정수 조건의 활용

♬ 세밀한 조건 (근을 가짐? 양에서 음? 음에서 양?)

(가)와 (나)의 식을 쳐다보면, $x=1$에서 부호가 달라짐을 알 수 있다. 이를 통하여, $f(x)$가 $x=1$에서 근을 가짐을 알 수 있고, (다) 조건의 극한식의 꼴 때문에 $f(2)=0$임도 매우 쉽게 알 수 있다.
이제, 정수조건도 연립방정식의 미지수를 제어할 수 있는 한 장치라는걸 떠올려주며 계산을 시작하자
이때, 정수조건으로 제어하는 경우 $f(x)$가 $x=1$에서 근을 가짐과 음에서 양으로 가는건 다르다는걸 느끼며 계산하자

풀이

위에서 설명했듯이 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$로 잡을 수 있다.
한편,

♬ 정수 조건을 이용하기 위하여 위 식을 전개하면, a도 정수임을 당연하게 알 수 있다.

♬ $f(x)$가 $x=1$근방에서 음에서 양 으로 가기 때문에, $a \geq 2$이다

♬. (다) 식을 정리하면, $-5 < f'(2) < 4$

위 세가지 사실을 정리하면 a는 2~6의 정수임을 알 수 있다.
이 사실을 바탕으로 $f(5)$의 최대최소를 구하면, 36과 -12이다.

동형 기출 문항

딱히 생각나는게 없는걸 보아 좋은 문제인 듯 함

#22

comment & review point

♬ 정수조건의 활용

♬ startingpoint 잡기

문제를 잘 읽어보면, 구하는 값은 a_1 이지만, $a_3=a_6$임을 이용해야 하기에, $n=3$부터 추론을 시작함을 알 수 있다. 이때, 2로 나누는 상황이 많아봐야 3번이고 마지막은 분수꼴 나와도 너저분 하지 않으니 $a_3=4k+\spadesuit$ 꼴로 표현하면 예쁘다는것도 보이면 좋을 듯 하다.

풀이

a_3	a_4	a_5	a_6	k값
$4k$	$4k+3$	$2k+2$	$2k+7$	out
$4k-1$	$2k$	$2k+4$	$2k+9$	5
$4k-2$	$4k+1$	$2k+1$	$k+1$	1
$4k-3$	$2k-1$	k	$k+5\,(k:\text{ㅉ})$ $\frac{k+1}{2}\,(k:\text{ㅎ})$	1

위 표를 잘 참고하면 a_3의 값으로 가능한 값들은 1, 2, 19 이다.

이제 각각의 실제 숫자로 역추적을 한다면

$a_3=1$을 만드는 $a_1=1$

$a_3=2$를 만드는 $a_1=2, 5$

$a_3=19$를 만드는 $a_1=36, 73$ 으로 정해진다. 따라서 a_1의 값의 합은 117이다.

동형 기출 문항

모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n=0\text{ 또는 }|a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

(나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

#

선택과목은 의미가 조금 떨어져요,,,

3모범위라....