f, g: 연속, g: 증가.　　　　$0 \le c \le \frac{\pi}{4}$

246. 연속함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $g(x)$가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 상수 $c\left(0 \le c \le \frac{\pi}{4}\right)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$f(|g(x)+c|)=\sin^2 c+\sin^2\{\pi f(x)\}$$
> $$f(|g(x)-c|)=\cos^2 c+\cos^2\{\pi f(x)\}$$
> 이다.
>
> (나) 구간 $\left(\frac{c}{2},\ c\right)$에서 $f''(x)=0$이다.　　직선
>
> (다) 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $g(x)=x-a_k$이고,
> 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g'(x)=g'(x+c)$이다.
>
> (단, $k=1,\ 2$이고, $-\frac{\pi}{2} \le a_1 < a_2 \le \frac{\pi}{2}$이다.)　g'이 $-$에서 c주기

$k=2$일 때, $\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} f(x)g(x)dx+\sum_{i=1}^{8} f(-ci)$의 최댓값은 M이다.

$M+\left|\frac{\pi^2}{a_1a_2}\right|$의 값을 구하시오. [4점] [2018년 랑카 30번]

$g(\alpha)=\frac{c}{2}$, $f\left(\frac{c}{2}\right)=\cos^2 c+\cos^2\{\pi f(\alpha)\}$　　$0 \le \sin^2 c \le \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}c\right)=\sin^2 c+\sin^2\{\pi f(\alpha)\}$　　$\frac{1}{2} \le \cos^2 c \le 1$

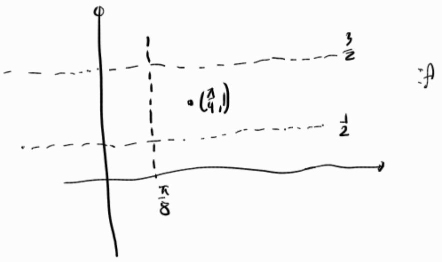
$g(\beta)=\frac{3}{2}c$, $f\left(\frac{5}{2}c\right)=\cos^2 c+\cos^2\{\pi f(\beta)\}$

(다) ⇒ g의 치역 $=\mathbb{R}$. $g(\square)=0$ ⇒ $2f(c)=2$, $f(c)=1$

$f(-x+a_k-c)=\sin^2 c+\sin^2\{\pi f(x)\}$

(가) ⇒ f의 치역 $\subset \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
$\subset \left[0, \frac{3}{2}\right]$

⇒ 치역 $\subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ⋯ ㉠



$f(c)=1$ ⇒ $f(\square)=\underset{=\frac{3}{2}}{\cos^2 c+1}$, $f(\square)=\sin^2 c=\frac{1}{2}$

+㉠ ⇒ $c=\frac{\pi}{4}$

$g(\alpha)=\frac{c}{2}$ ⇒ $f\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{2}+\cos^2\{\pi f(\alpha)\}$, $f\left(\frac{3}{2}c\right)=\frac{1}{2}+\sin^2\{\pi f(\alpha)\}$

$\cos^2\{\pi f(\alpha)\}=\sin^2\{\pi f(\beta)\}$, $\sin^2\{\ \}=\cos^2\{\ \}$

$g(\beta)=-\frac{c}{2}$, $f\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sin^2\{\pi f(\beta)\}$, $f\left(\frac{3}{2}c\right)=\frac{1}{2}+\cos^2\{\pi f(\beta)\}$

$(s,t)=(0,1),(1,0)$ or $\tan^2\{\pi f(\alpha)\}=\cot^2\{\pi f(\beta)\}$

$g(\alpha)=0$ 이면, $\sin^2\{\pi f(\alpha)\}=\cos^2\{\pi f(\alpha)\}=\frac{1}{2}$　$\pi f(\alpha)=\frac{3}{4}\pi$ or $\frac{5}{4}\pi$

$-\frac{\pi}{4} \le g(x) \le \frac{\pi}{4}$ 범위에서 $f(g(x)+c)+f(-g(x))=2$,

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $(c, 1)$ ⇒ $\left(\frac{\pi}{8}, 중점\right)$에서 대칭 ⋯ ㉡
점대칭

$g \ge \frac{\pi}{4}$에서는 $f(g+c)+f(g-c)=2$,

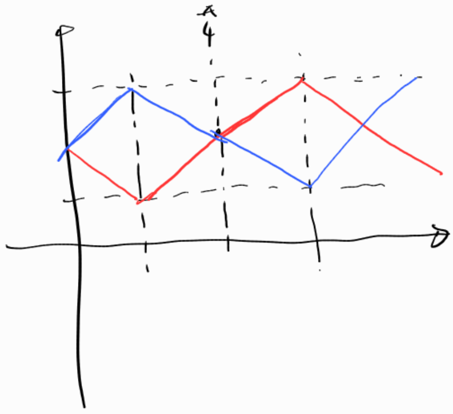
$f(x+\frac{\pi}{2})=2-f(x)$ at $x \ge 0$

$f(\text{ㄷ}) \Rightarrow \{f(\frac{\pi}{4}), \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$g \le 0$에서는 $|\ |$의 대칭성

$\Rightarrow g \ge \frac{\pi}{4}$와 같음.

$f(x)$:



$\Rightarrow f(0)=1$, $f(g(0)+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

$f(|g(0)-\frac{\pi}{4}|)=\frac{3}{2}$

$|\ | \le \frac{3}{4}\pi$

$-\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{1}{4}\pi$

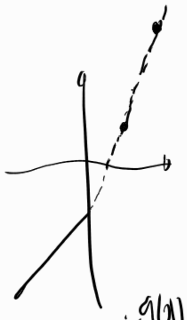
$f(|x|)=\frac{3}{2}$, $f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$

$|x|$와 $|x+\frac{\pi}{2}|$의 차이는 $\frac{\pi}{2}$ 이해 $\Rightarrow$ 차이는 $\frac{\pi}{2}$,

$x=0$ or $-\frac{\pi}{2}$,

$a_1=0$, $a_2=\frac{\pi}{2}$

$k=2 \Rightarrow$



: $g(x)$

(|○| 는 이동한 거리)

길이 $L(\frac{\pi}{4})$ 구간 $\Delta g = p$

$\Rightarrow |k \Delta \sin^2(x)| = 2$, $|\Delta f(g-\square)| = \frac{\pi}{2}$

$\Delta g = p = 2n$, 이때 $n \ge 2$ 이상이면 (가) 최소극점수 세고 가정.

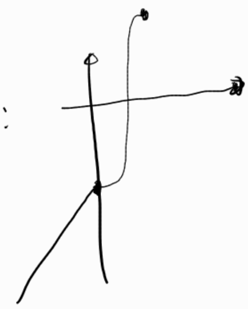
$\Rightarrow g(x)-2x$는 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 주기

$|\pi(f(x)$ 거리$)|=2$,

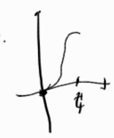
$f(g(x)+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \sin^2(2x)$

(i)

g:



$\sin^2 x$:



(ii)

$\Rightarrow$ Maximize

$\rightarrow$ g: