공통							
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
②	①	②	④	④	⑤	④	②
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
③	①	③	①	⑤	②	③	3
17.	18.	19.	20.	21.	22.		
5	54	124	27	78	123		

1. ②

$$\sqrt[4]{\frac{3}{16}}\times 3^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{3}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}=\frac{3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}}{2}=\frac{3}{2}$$

2. ①

$$f(x)=x^3-4x^2+8 \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2-8x$$

에서

$$f'(-1)=11$$

3. ②

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하면

$$a_n=3\times r^{n-1} \;\Rightarrow\; a_2+\frac{a_5}{a_3}=3r+r^2=10$$
$$\Rightarrow\; r=2\,(\because\; r>0)$$

따라서

$$a_2=3\times 2=6$$

4. ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속
$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속
$\Rightarrow \lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$
$\Rightarrow a^2+3a=-a-4 \;\Rightarrow\; a=-2$

5. ④

$$\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta=-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow\; \sin\theta=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow\; \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow\; \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because\; 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

6. ⑤

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하자.

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2-4t \Rightarrow v(t)=x'(t)=t^2-2t$$
$$\Rightarrow a(t)=v'(t)=2t-2$$

따라서

$$a(k)=2k-2=8 \Rightarrow k=5$$

7. ④

k의 네제곱근 중 실수인 것이 $k^{\frac{1}{4}}$, $-k^{\frac{1}{4}}$이므로

$$\beta=k^{\frac{1}{4}},\ \alpha=-k^{\frac{1}{4}}\ (\because \alpha<\beta)$$
$$\Rightarrow \beta-\alpha=2k^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{2}\,k$$
$$\Rightarrow k^{\frac{1}{4}}\times k^{-1}=2^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

8. ②

두 점 A, B는
직선 $x=t$와 두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점
$\Rightarrow \mathrm{A}(t,\ t^2)$, $\mathrm{B}(t,\ f(t))$
$\Rightarrow \overline{\mathrm{AB}}=|t^2-f(t)|=t^2-f(t)\ (\because f(t)<0)$

삼각형 OAB에서 선분 AB를 밑변으로 하면
이 삼각형의 높이는 t이므로

$$g(t)=\frac{1}{2}t\{t^2-f(t)\}$$
$$\Rightarrow g'(t)=\frac{1}{2}\{t^2-f(t)\}+\frac{1}{2}t\{2t-f'(t)\}$$

따라서

$$g(1)=\frac{1}{2}\{1-f(1)\}=2 \Rightarrow f(1)=-3$$
$$g'(1)=\frac{1}{2}\{1-f(1)\}+\frac{1}{2}\{2-f'(1)\}=4 \Rightarrow f'(1)=-2$$

9. ③

수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 $a_5=0$
$\Rightarrow a_n=d(n-5)\,(d>0)$이고
$a_2<a_4<0<a_6<a_8<a_{10}$

따라서

집합 A의 음수인 원소의 합 $=a_2+a_4=-2$
$$\Rightarrow -3d-d=-4d=-2$$
$$\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$

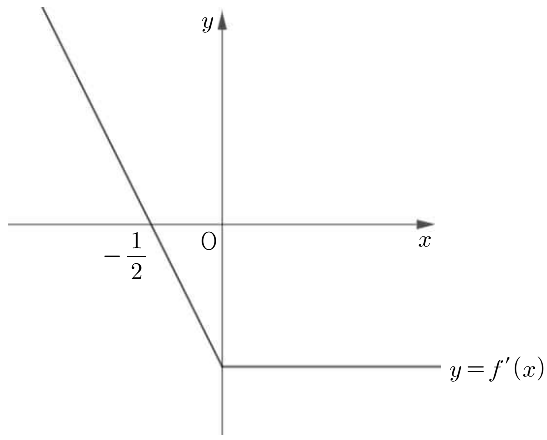
집합 A의 양수인 원소의 합 $=a_6+a_8+a_{10}$
$$=d+3d+5d=9d=\frac{9}{2}$$

10. ①

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(|t|-t-1)dt$$
$$\Rightarrow f'(x)=|x|-x-1=\begin{cases}-2x-1 & (x<0)\\ -1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

주어진 조건에 의하여

$x<k$에서 $f'(x)\geq 0$
$x>k$에서 $f'(x)\leq 0$ $\cdots$ (1)



위의 그래프와 (1)을 참고하여 $k=-\frac{1}{2}$를 얻고,

$$f(-2k)=f(1)=\int_{-1}^{1}(|t|-t-1)dt$$
$$=\int_{-1}^{0}(-2t-1)dt+\int_{0}^{1}(-1)dt=-1$$

11. ③

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)}{h}-\frac{f(x+3h)}{x+h}\right\}=2 \qquad \cdots \text{※}$$

ⓐ ⓑ

을 만족시키는 x의 조건을 구하자.

(i) $x\neq0$인 경우

$h\to0$일 때 ⓑ가 수렴하므로 ⓐ도 수렴해야 함
$\Rightarrow$ $h\to0$일 때 ⓐ의 분자가 0으로 수렴해야 함
$\Rightarrow$ $f(x)=0$ $\cdots$ ①

즉

$$\text{※} \Rightarrow \lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)}{h}-\frac{f(x+3h)}{x+h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)}{h}-\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=2 \ (\because ①)$$

따라서 $x\neq0$인 경우 ※을 만족시키려면

$f(x)=0$이고 $f'(x)=2$ $\cdots$ (1)

이어야 한다.

(ii) $x=0$인 경우

$$\text{※} \Rightarrow \lim_{h\to0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0+3h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-\frac{f(0+3h)-f(0)}{h}\right\}$$
$$=f'(0)-3f'(0)=-2f'(0)=2$$

따라서 $x=0$인 경우 ※을 만족시키려면

$f'(0)=-1$ $\cdots$ (2)

이어야 한다.

※을 만족시키는 x의 개수가 2이고,
(1)을 만족시키는 x의 개수는 최대 1개이므로

$x=0$인 경우도 ※을 만족 $\cdots$ ②
$\Rightarrow$ (2)에 의하여 $f'(0)=-1$

또한

방정식 ※의 모든 실근의 합이 4
$\Rightarrow$ ②에 의하여 모든 실근은 $x=0$, $x=4$
$\Rightarrow$ (1)에 의하여 $f(4)=0$, $f'(4)=2$

따라서

$f'(0)=-1$, $f(4)=0$, $f'(4)=2$
$\Rightarrow$ $f(x)=\frac{3}{8}x^2-x-2$ $\Rightarrow$ $f(8)=14$

12. ①

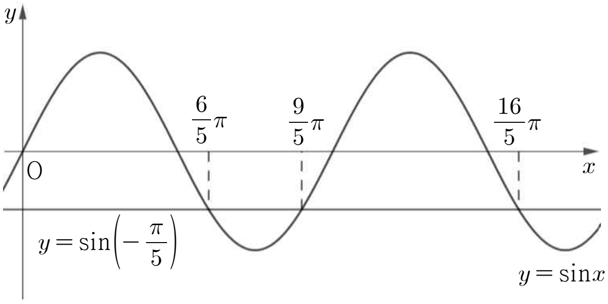
$$\cos\frac{7}{10}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{10}\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

두 닫힌구간 $[\alpha_k,\ \alpha_{k+1}]$, $[\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2}]$에서

함수 $f(x)=\sin x$의 최솟값 $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$이 -1보다 크므로

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \text{ 또는 } b=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

임을 알 수 있다.

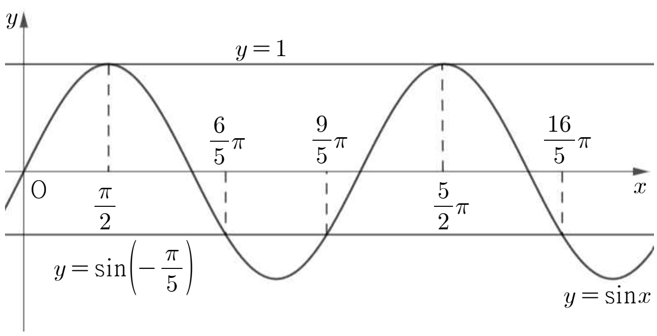


위의 그래프를 참고하면
두 닫힌구간 $[\alpha_k,\ \alpha_{k+1}]$, $[\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2}]$에서 함수

$f(x)=\sin x$의 최솟값이 $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$로 동일하려면

$$a=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right),\ b=1$$

이어야 함을 알 수 있다.

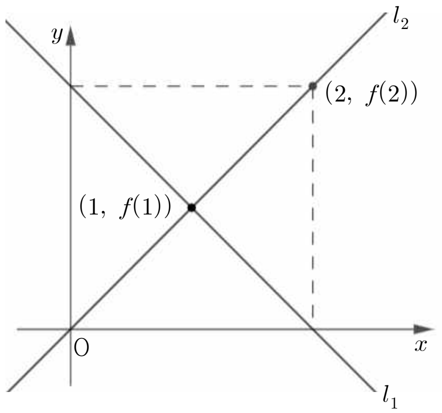


위의 그래프를 참고하면 $k=3$에서 $\alpha_k+\alpha_{k+1}$가 최소이며

$$\alpha_k+\alpha_{k+1}\text{의 최솟값} = \alpha_3+\alpha_4=\frac{9}{5}\pi+\frac{5}{2}\pi=\frac{43}{10}\pi$$

13. ⑤

$f'(1)\neq 0$, $f'(2)\neq 0$에서
조건에 의하여 $f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$이므로
문제에서의 두 접선 l_1, l_2의 상황을 그래프로 나타내면
다음과 같다.



위의 그림을 고려하여 다음 두 사실을 얻는다.

(i) 세 점 O, $(1,\ f(1))$, $(2,\ f(2))$ 모두
직선 l_2 위의 점이다.

(ii) $f'(1)=-f'(2)$
($f(1)<0$, $f(2)<0$인 경우도 같은 사실을 얻는다.)

즉,

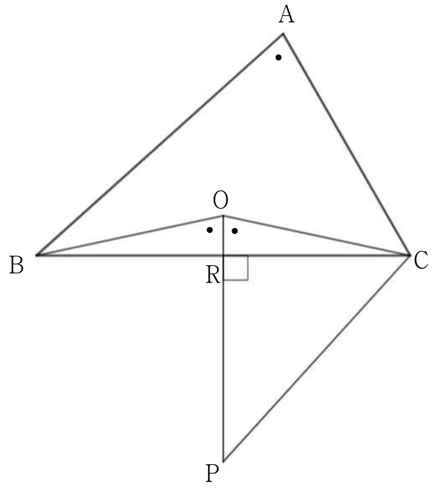
(i) $\Rightarrow$ l_2가 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이고
$f(0)=0$이므로 실수 $a(a\neq 0)$에 대하여
$f(x)=x(x-1)(x-2)^2+ax$

(ii) $\Rightarrow$ $f(x)=x(x-1)(x-2)^2+ax$에서
$f'(1)=1+a$, $f'(2)=-a$
$\Rightarrow$ $f'(1)=-f'(2)$에서 $a=-\frac{1}{2}$

따라서

$$f(x)=x(x-1)(x-2)^2-\frac{1}{2}x \Rightarrow f(4)=46$$

14. ②



삼각형 ABC와 삼각형 OPC는 서로 닮음 … ※

$\Rightarrow$ $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{POC}$

이고

O가 삼각형 ABC의 외심

$\Rightarrow$ $\angle \mathrm{BOC} = 2\angle \mathrm{BAC}$

이므로

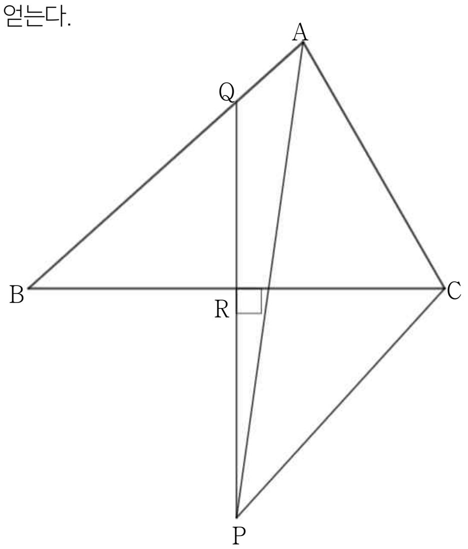
$\angle \mathrm{BOC} = 2\angle \mathrm{POC}$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{OP}}$

$\Rightarrow$ 두 선분 BC, OP의 교점 R에 대하여

$\overline{\mathrm{BR}} = \overline{\mathrm{RC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} = 12$ … ①

를 얻는다.



$\angle \mathrm{QPC} = \angle \mathrm{ABC}$ ($\because$ ※)

$\angle \mathrm{BRQ} = \angle \mathrm{PRC} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \frac{4}{5}$, ①을 이용하여

두 삼각형 BRQ, PRC에서

$\overline{\mathrm{BQ}} = 15$, $\overline{\mathrm{RQ}} = 9$, $\overline{\mathrm{RP}} = 16$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{BQ}} = 5$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}} + \overline{\mathrm{RP}} = 25$

또한

$\angle \mathrm{BRQ} = \frac{\pi}{2} - \angle \mathrm{ABC}$

$\Rightarrow$ $\angle \mathrm{AQP} = \frac{\pi}{2} + \angle \mathrm{ABC}$

$\Rightarrow$ $\cos(\angle \mathrm{AQP}) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\angle \mathrm{AQP}) = \frac{4}{5}$

즉, 삼각형 AQP에서

$\overline{\mathrm{AQ}} = 5$, $\overline{\mathrm{PQ}} = 25$, $\cos(\angle \mathrm{AQP}) = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{5^2 + 25^2 + 2\times 5\times 25\times \frac{3}{5}} = 20\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AP}} = 20\sqrt{2}$, $\sin(\angle \mathrm{AQP}) = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ 사인법칙에 의하여

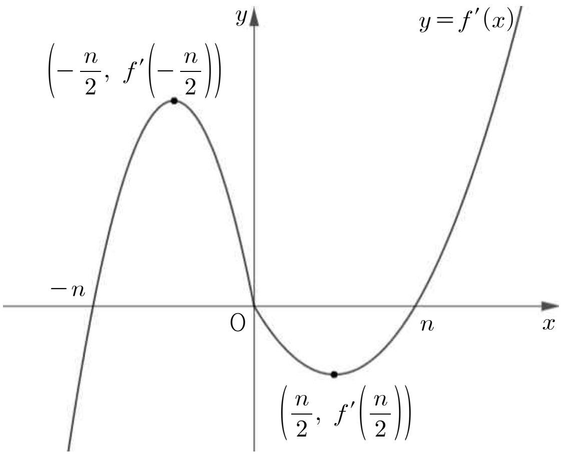
삼각형 AQP의 외접원의 반지름의 길이

$= \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$

15. ③

$$f(x)=\begin{cases}-x^3-\dfrac{3}{2}nx^2 & (x<0)\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}nx^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}-3x^2-3nx & (x<0)\\ x^2-nx & (x\ge 0)\end{cases}$$



이때,

$g(x)=f(x)-f'(6)x$가 $x=k$에서 극소
$\Rightarrow\ g'(x)=f'(x)-f'(6)$가 $x=k$의 근방에서
음 → 양으로 부호 변화
$\Rightarrow\ x=k$의 근방에서
$f'(x)<f'(6)\ \to\ f'(x)>f'(6)$
으로 변화

임을 고려하면

$6<\dfrac{n}{2}$이면 $g(x)$가 구간 $(6,\ \infty)$에서 극솟값을 가짐

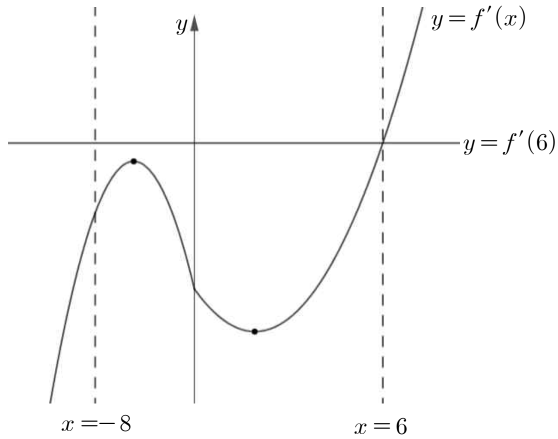
$\Rightarrow\ 6\ge\dfrac{n}{2}$이고 $1\le n\le 12$ ⋯ ①

임을 얻는다.

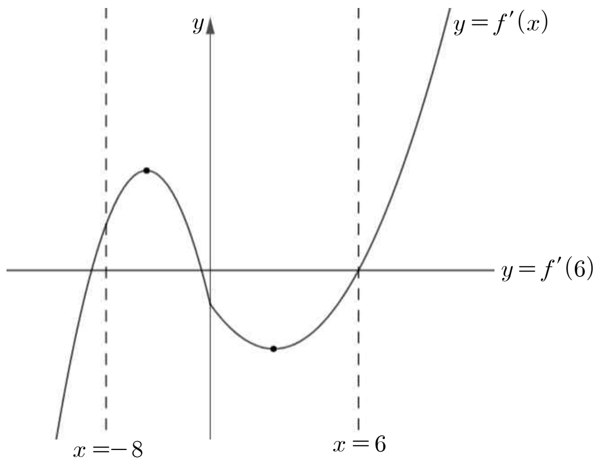
$1\le n\le 12\ \Rightarrow\ -8\le-\dfrac{n}{2}$

이므로 함수 $g(x)$가 두 구간 $(-8,\ 6)$, $(6,\ \infty)$에서 극솟값을 갖지 않는 경우는 다음의 두 가지 경우이다.

(i) 구간 $(-8,\ 6)$에서 $f'(x)\le f'(6)$인 경우



(ii) 구간 $\left(-8,\ -\dfrac{n}{2}\right)$에서 $f'(x)\ge f'(6)$인 경우



즉,

(i) $\Rightarrow\ f'\left(-\dfrac{n}{2}\right)\le f'(6)$

$\Rightarrow\ \dfrac{3}{4}n^2\le 36-6n\ \Rightarrow\ (n+12)(n-4)\le 0$

$\Rightarrow\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(ii) $\Rightarrow\ f'(-8)\ge f'(6)$

$\Rightarrow\ -64+8n\ge 12-2n\ \Rightarrow\ n\ge\dfrac{38}{5}$

$\Rightarrow\ n=8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

(∵ ①)

따라서 모든 n의 개수는 $4+5=9$

16. 3

$\log_2(x+13)-\log_2(x-2)=4$

(진수 조건: $x+13>0$, $x-2>0$)

$\Rightarrow \log_2\dfrac{x+13}{x-2}=\log_2 16$

$\Rightarrow \dfrac{x+13}{x-2}=16 \Rightarrow x=3$

(이때 진수 조건 만족)

17. 5

$f'(x)=-3x^2+6x+8$, $f(0)=1$

$\Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2+8x+1$

$\Rightarrow f(-2)=5$

18. 54

$$\sum_{k=1}^{4}(a_k+k^2)=\sum_{k=1}^{4}a_k+\sum_{k=1}^{4}k^2$$
$$=\sum_{k=1}^{4}a_k+30=50$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{4}a_k=20$$

$$\sum_{k=5}^{8}(a_k+k)=\sum_{k=5}^{8}a_k+\sum_{k=5}^{8}k$$
$$=\sum_{k=5}^{8}a_k+26=60$$
$$\Rightarrow \sum_{k=5}^{8}a_k=34$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{4}a_k+\sum_{k=5}^{8}a_k=20+34=54$$

19. 124

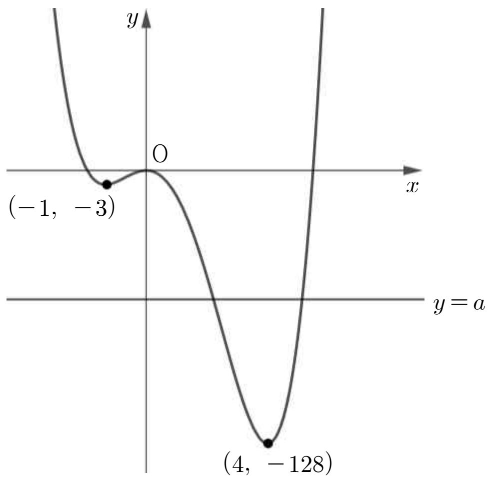
$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$이라 두면

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4(x+1)x(x-4)=0$

$\Rightarrow x=-1$, $x=4$에서 극소,

$x=0$에서 극대

임을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위 그래프를 참고하면 조건을 만족시키려면

두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표가 모두 양수이거나 모두 음수

$\Rightarrow -128<a<-3$

이고, 구하는 정수 a의 개수는 124

20. 27

점 A의 x좌표를 α라 하면

점 A는 두 함수 $y=2^x$, $y=-3x$의 교점
$\Rightarrow$ A$(\alpha,\ -3\alpha)$이고 $2^\alpha=-3\alpha$ $\cdots$ ①

이고, $\alpha<0$을 얻는다. 또한,

점 A와 점 B의 x좌표가 같고
점 B는 곡선 $y=-3\log_2(-x)$ 위의 점
$\Rightarrow$ B$\left(\alpha,\ -3\log_2(-\alpha)\right)$

이므로

$$\text{선분 AB의 길이} =\left|-3\alpha+3\log_2(-\alpha)\right| =3\left|\log_2(-\alpha)-\alpha\right| \quad \cdots ②$$

이때, ①에서

$$2^\alpha=-3\alpha \Rightarrow \alpha=\log_2(-3\alpha) =\log_2 3+\log_2(-\alpha)\ (\because\ \alpha<0)$$

이므로 이를 ②에 대입하면

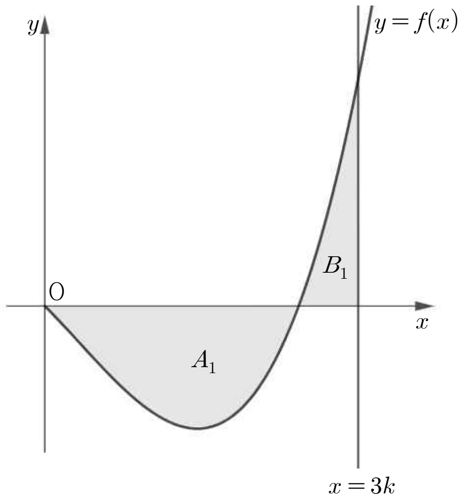
$$\text{선분 AB의 길이}=3\left|\log_2(-\alpha)-\log_2 3-\log_2(-\alpha)\right| =3\log_2 3=k$$

따라서

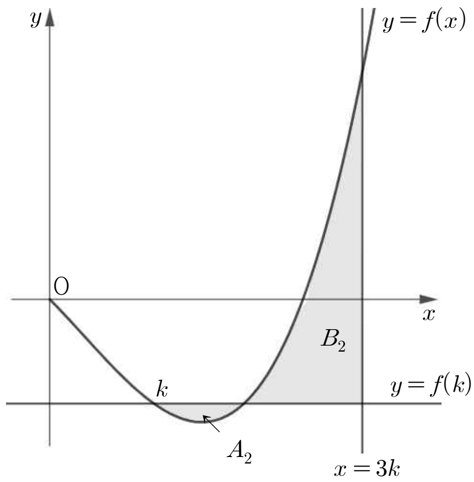
$$2^k=2^{3\log_2 3}=27$$

21. 78

$$A_1+A_2=B_1+B_2 \Rightarrow A_1-B_1=B_2-A_2 \quad \cdots ①$$



$$A_1-B_1=-\int_0^{3k} f(x)dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{3k} =-\frac{45}{4}k^4+\frac{9}{2}k^2$$



$$\frac{1}{2}<k<1 \Rightarrow f'(k)=k^2-1<0$$

이므로 위의 그림을 참고하면

$$B_2-A_2=\int_k^{3k}\{f(x)-f(k)\}dx =\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_k^{3k} =\frac{34}{3}k^4-2k^2$$

따라서 ①에서

$$-\frac{45}{4}k^4+\frac{9}{2}k^2=\frac{34}{3}k^4-2k^2$$
$$\Rightarrow 271k^2=78$$

22. 123

$$a_{n+1}=\begin{cases}|2a_n| & (n\in A) & \cdots (1)\\ a_n-3 & (n\not\in A) & \cdots (2)\end{cases}$$

에서

$a_5=1$이고 $a_6<0$이려면 $n=5$일 때 (2)의 상황
$\Rightarrow\ 5\not\in A$
$\Rightarrow\ a_3\ge 0,\ a_4\ge 0$ $\cdots$ ①

이므로 a_2의 부호에 따라 경우를 나누자.

(i) $a_2<0$

$a_2<0\ \Rightarrow\ 2\in A,\ 3\in A,\ 4\in A$

이므로 ①과 $a_2<0$을 이용하여 $a_5=1$부터 역추적 하면

$$a_5=1\ \Rightarrow\ a_4=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a_3=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ a_2=-\frac{1}{8}$$

이때,

$a_2=-8<0$이므로 $n=1$일 때 (2)의 상황
$\Rightarrow\ a_2=a_1-3\ \Rightarrow\ a_1=\dfrac{23}{8}$
($a_1\ge 0$이므로 $1\not\in A$를 만족)

(ii) $a_2\ge 0$

(a) $a_1\ge 0$

①, $a_2\ge 0$
$\Rightarrow\ 1\not\in A,\ 2\not\in A,\ 3\not\in A,\ 4\not\in A$

이므로 ①과 $a_2\ge 0,\ a_1\ge 0$을 이용하여
역추적하면

$$a_5=1\ \Rightarrow\ a_4=4\ \Rightarrow\ a_3=7\ \Rightarrow\ a_2=10\ \Rightarrow\ a_1=13$$

(b) $a_1<0$

①, $a_2\ge 0$
$\Rightarrow\ 1\in A,\ 2\in A,\ 3\in A,\ 4\not\in A$

이므로 ①과 $a_2\ge 0,\ a_1<0$을 이용하여
역추적하면

$$a_5=1\ \Rightarrow\ a_4=4\ \Rightarrow\ a_3=2\ \Rightarrow\ a_2=1\ \Rightarrow\ a_1=-\frac{1}{2}$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$a_1=\frac{23}{8},\ a_1=13,\ a_1=-\frac{1}{2}$$

이고, 모든 a_1의 값의 합 S는

$$S=\frac{23}{8}+13-\frac{1}{2}=\frac{123}{8}\ \Rightarrow\ 8S=123$$

미적분							
23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
①	④	②	⑤	③	③	30	9

23. ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2-(n+2)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n^2+2n+1)-(n^2+4n+4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-2n-3}=-\frac{1}{2}$$

24. ④

$$f'(x)=e^{2x}+e^{-2x} \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$
$$f(\ln 2)=2-\frac{1}{8}+C=2 \;\Rightarrow\; C=\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{8}$$

따라서

$$f(\ln\sqrt{2})=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

25. ②

$\mathrm{A}(a,\ b)$라 하자.

A가 곡선 $\pi\sin(x+y)=x$와 직선 $x+y=\dfrac{\pi}{6}$의 교점

$\Rightarrow\ \pi\sin(a+b)=a,\ a+b=\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\ \pi\sin\dfrac{\pi}{6}=a$에서 $a=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ a+b=\dfrac{\pi}{6}$에서 $b=-\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$, 또한 $\cdots$ ①

$\pi\sin(x+y)=x$

$\Rightarrow\ \pi\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)\cos(x+y)=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\pi\cos(x+y)}-1$

따라서 점 A에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}-1=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}-1 \qquad \cdots ②$$

①, ②를 이용하여 구하는 접선의 방정식은

$$y=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}-1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{3}$$

$x=0$을 대입하면 구하는 y절편은

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}-1\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

26. ③

구하는 입체도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\frac{\ln 2x+\ln 4x}{x\ln x}dx&=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\frac{2\ln x+3\ln 2}{\ln x}dx\\&=\int_1^2\frac{2t+3\ln 2}{t}dt\ \ (\ln x=t\text{로 치환})\\&=\int_1^2\left(2+\frac{3\ln 2}{t}\right)dt\\&=\left[2t+3\ln 2\times\ln t\right]_1^2\\&=\left(4+3(\ln 2)^2\right)-2=2+3(\ln 2)^2\end{aligned}$$

27. ③

$$f(x)=x^2+ax+b$$

라 하자.

$$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}f'\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=\frac{1-\ln x}{x^2}\left(\frac{2\ln x}{x}+a\right) \quad \cdots ①$$

이때,

$g(x)$가 극값을 갖는 x가 3개

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\left(\frac{2\ln x}{x}+a\right)=0$을 만족시키는 x가 3개

$\Rightarrow \frac{2\ln x}{x}+a=0$을 만족시키는 x가 2개 이상 $\cdots$ ②

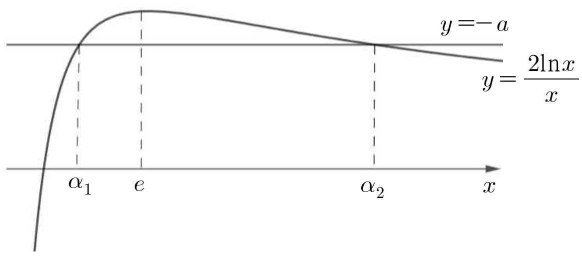
②를 해결하기 위해 $y=\frac{2\ln x}{x}$의 개형을 간단히 파악하자.

$$y=\frac{2\ln x}{x} \Rightarrow y'=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}=0$$

$\Rightarrow x=e$에서 극대

따라서

$\frac{2\ln x}{x}+a=0$을 만족시키는 x가 2개



위의 그래프와 ①의 부호를 고려하여

$g(x)$는 $x=\alpha_1,\ \alpha_2$에서 극소, $\cdots$ ③

$x=e$에서 극대 $\cdots$ ④

를 얻는다.

문제의 조건과 ③ $\Rightarrow \frac{2\ln\alpha}{\alpha}=\frac{2\ln 2\alpha}{2\alpha}=-a$

$\Rightarrow \ln\alpha^2=\ln 2\alpha$에서 $\alpha=2,\ a=-\ln 2$

$\Rightarrow f(x)=x^2-(\ln 2)x+b$

문제의 조건과 ④ $\Rightarrow g(e)=\frac{1}{e^2}-\frac{\ln 2}{e}+b=\frac{1}{e^2}$

$\Rightarrow b=\frac{\ln 2}{e}$

따라서

$$f(x)=x^2-(\ln 2)x+\frac{\ln 2}{e} \Rightarrow f(0)=\frac{\ln 2}{e}$$

28. ③

$$g(x)+g(\sin x)=8f(\sin x) \quad \cdots ※$$

에서

※에 $x=0$ 대입 $\Rightarrow 2g(0)=8f(0)$

$\Rightarrow f(0)=0$ ($\because\ g(0)=0$) $\cdots$ ①

※에 $x=\frac{\pi}{2}$ 대입 $\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)+g(1)=8f(1)$

$\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)=8f(1)$ ($\because\ g(1)=0$) $\cdots$ ②

부분적분을 이용하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)g(x)\cos dx$$

$$=\left[f(\sin x)g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)g(x)dx$$

$$=8\{f(1)\}^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(\sin x)g(x)dx=4 \quad (\because\ ①,\ ②)$$

$\cdots$ ③

치환적분과 부분적분을 이용하여

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)g'(\sin u)\cos u du$$

($x=\sin u$로 치환)

$$=\left[f(\sin u)g(\sin u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u f'(\sin u)g(\sin u)du$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u f'(\sin u)g(u)du=16 \quad (\because\ ①,\ ②)$$

두 적분값을 더하여

$$4+16=8\{f(1)\}^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(\sin x)\{g(x)+g(\sin x)\}$$

$$=8\{f(1)\}^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\cos x f'(\sin x)f(\sin x) \quad (\because\ ※)$$

$$=8\{f(1)\}^2-\left[4\{f(\sin x)\}^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=8\{f(1)\}^2-4\{f(1)\}^2 \quad (\because\ ①,\ ②)$$

$$=4\{f(1)\}^2$$

$$\Rightarrow \{f(1)\}^2=5$$

따라서 ③에서

$$40-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(\sin x)g(x)dx=4$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(\sin x)g(x)dx=36$$

29. 30

$a_1=a$라 하자.

문제의 두 급수에서 $a \neq 0,\ r \neq 0$을 얻는다.

$|a_1|=|a_2|,\ a_n+a_{n+2}=0$임을 이용하면 수열 $\{a_n\}$은 다음의 두 경우가 가능하다.

$\{a_n\} : a,\ a,\ -a,\ -a,\ a,\ a,\ \cdots$ $\cdots$ (1)

$\{a_n\} : a,\ -a,\ -a,\ a,\ a,\ -a,\ \cdots$ $\cdots$ (2)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}\times r^{2n})=1$

(1), (2) 두 경우 모두

$\{a_{2n-1}\times r^{2n}\} : ar^2,\ -ar^4,\ ar^6,\ -ar^8,\ \cdots$

$\Rightarrow$ 이 수열은 첫째항이 ar^2이고 공비가 $-r^2$인 등비수열

$\Rightarrow$ 이 수열의 급수가 수렴하므로 $-1<r^2<1$

$\Rightarrow -1<r<1$

$\cdots$ ②

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}\times r^{2n})=\dfrac{ar^2}{1+r^2}=1$

$\Rightarrow a=\dfrac{1+r^2}{r^2}$ $\cdots$ ③

(ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(a_k\times r^k)=2$

(1)의 경우

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(a_k\times r^k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}\times r^{2k-1}+a_{2k}\times r^{2k})$임을 활용하여 $b_n=a_{2n-1}\times r^{2n-1}+a_{2n}\times r^{2n}$이라 하면

(1)을 참조하여

$\{b_n\}$은 첫째항이 $ar+ar^2$이고 공비가 $-r^2$인 등비수열

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(a_k\times r^k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\dfrac{ar+ar^2}{1+r^2}=2$

$\Rightarrow r=1$ ($\because$ ③) $\Rightarrow$ ②에 모순

(2)의 경우

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(a_k\times r^k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}\times r^{2k-1}+a_{2k}\times r^{2k})$임을 활용하여 $c_n=a_{2n-1}\times r^{2n-1}+a_{2n}\times r^{2n}$이라 하면

(2)을 참조하여

$\{c_n\}$은 첫째항이 $ar-ar^2$이고 공비가 $-r^2$인 등비수열

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(a_k\times r^k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\dfrac{ar-ar^2}{1+r^2}=2$

$\Rightarrow r=\dfrac{1}{3},\ a=10$ ($\because$ ③)

(i), (ii)에서

$r=\dfrac{1}{3},\ a_1=10 \Rightarrow \dfrac{a_1}{r}=30$

30. 9

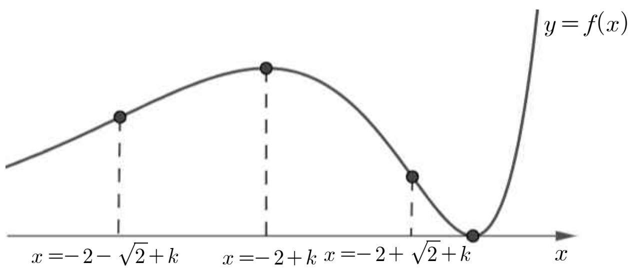
$f(x)=e^x(x-k)^2$에서

$f'(x)=e^x(x-k)^2+2e^x(x-k)=0 \Rightarrow x=k-2$ 또는 k

$f''(x)=e^x(x-k)^2+4e^x(x-k)+2e^x=0$

$\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}+k$

를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$\frac{f(x)-f(a)-|f(x)-f(a)|}{2}\le f'(a)(x-a) \qquad \cdots ※$$

에서

(i) $f(x)\ge f(a)$

※ $\Rightarrow 0\le f'(a)(x-a)$

$x<a$에서 부등식을 생각하고 있으므로 $x-a<0$이다. 즉,

※ $\Rightarrow 0\ge f'(a)$

(ii) $f(x)<f(a)$

※ $\Rightarrow f(x)-f(a)\le f'(a)(x-a)$
$\Rightarrow f(x)\le f'(a)(x-a)+f(a)$

즉, 곡선 $y=f(x)$의 그래프보다 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 더 위에 있다.

(i), (ii)를 종합하여 다음의 두 결과를 얻는다.

구간 $(t,\ a)$에서 $f(x)\ge f(a)$이고 $0\ge f'(a)$이다. $\cdots$ (1)

구간 $(t,\ a)$에서 $f(x)<f(a)$이고 곡선 $y=f(x)$의 그래프보다 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 더 위에 있다.$\cdots$ (2)

(a) $a\le -2-\sqrt{2}+k$

$x<a$에서 $f(x)$는 증가
$\Rightarrow$ (1) 성립이 불가능하므로 (2)가 성립해야 함
$\Rightarrow$ $x<a$에서 $f(x)$가 아래로 볼록하므로
(2) 성립 불가능

(b) $-2-\sqrt{2}+k<a\le -2+k$

$t=-2-\sqrt{2}+k$라 두면
구간 $(t,\ a)$에서 $f(x)$가 증가하고 위로 볼록
$\Rightarrow$ (2)가 성립

(c) $-2-k<a\le k$

$t=-2+k$라 두면 구간 $(t,\ a)$에서 $f(x)$가 감소
$\Rightarrow$ (1)이 성립

(d) $k<a$

$k<x<a$에서 $f(x)$는 증가
$\Rightarrow$ (1) 성립이 불가능하므로 (2)가 성립해야 함
$\Rightarrow$ $k<x<a$에서 $f(x)$가 아래로 볼록하므로
(2) 성립 불가능

따라서 모든 a의 값의 범위는

$-2-\sqrt{2}+k<a\le k$

이고 a가 정수이므로

$a=k-3,\ k-2,\ k-1,\ k$

를 얻는다.

$k-3+k-2+k-1+k=30 \Rightarrow k=9$