### 6.1.8 2021년

**탐구문제** **6.1.19** (2022학년도(2021년 11월 시행) 수능 미적분 29번).

**29.** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

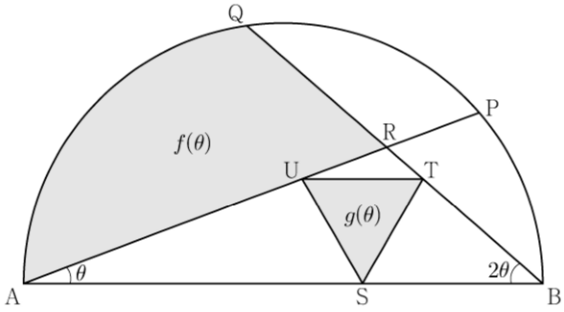
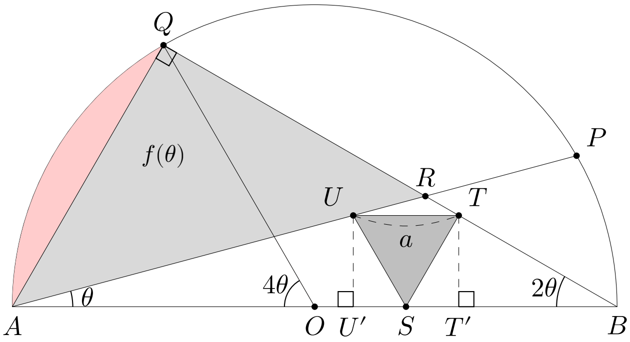



그림 6.37: 2022학년도(2021년 11월 시행) 수능 미적분 29번




원의 중심을 $O$라 하자. $f(\theta)$를 정확히 구하는 방법과 $f(\theta), \triangle ARQ$ 넓이 차이가 $\theta^3$에 비례하기 때문에 무시하고 $f(\theta) \approx \triangle ARQ$로 구하는 방법이 있다.

- $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \triangledown OAQ + \triangle OQB - \triangle ARB.$$

$\triangle ARB$를 구하기 위해서는 $\overline{AR}$이 필요하다. $\angle ARB = \pi - 3\theta$이므로 sine법칙에 의해

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{AR}}{\sin 2\theta} \quad \longrightarrow \quad \overline{AR} = \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}.$$

$$\begin{aligned}
\triangledown OAQ &= \frac{1}{2} \times 4\theta = 2\theta, \\
\triangle OQB &= \frac{1}{2} \times \sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2} \times \sin(4\theta), \\
\triangle ARB &= \frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{AB} \times \sin\theta = \frac{2\sin 2\theta \sin\theta}{\sin 3\theta}, \\
f(\theta) &= 2\theta + \frac{1}{2} \times \sin(4\theta) - \frac{2\sin 2\theta \sin\theta}{\sin 3\theta} \approx 2\theta + 2\theta - \frac{4}{3}\theta = \frac{8}{3}\theta.
\end{aligned}$$

- $f(\theta) \approx \triangle ARQ$: $\angle ARQ = 3\theta, \overline{AQ} = 2\sin 2\theta, \overline{QR} = \frac{\overline{AQ}}{\tan 3\theta} = \frac{2\sin 2\theta}{\tan 3\theta}$.

$$f(\theta) \approx \triangle ARQ = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times 2\sin 2\theta \times \frac{2\sin 2\theta}{\tan 3\theta} \approx \frac{1}{2} \times 4\theta \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\theta.$$

- 정삼각형 $STU$의 한변 길이를 $a$라 두자. $a$를 구하기 위해서 두가지 방법을 생각할 수 있다.

$$\overline{AS} + \overline{BS} = 2, \qquad \overline{AU'} + a + \overline{BT'} = 2.$$

이 두가지 방법 중, 근사가 더 간단히 처리되는 것은 전자의 방법이다.

- $\overline{AS}+\overline{BS}=2$: $\triangle AUS, \triangle BTS$ 에서 sine 법칙을 적용하여 각각 $\overline{AS}, \overline{BS}$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{\overline{US}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AS}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)} \quad\longrightarrow\quad \overline{AS}=\frac{a\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}{\sin\theta}\approx\frac{\sqrt{3}a}{2\theta}.$$

$$\frac{\overline{BS}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{TS}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)} \quad\longrightarrow\quad \overline{BS}=\frac{a\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}{\sin 2\theta}\approx\frac{\sqrt{3}a}{4\theta}.$$

$$\overline{AS}+\overline{BS}=2 \quad\longrightarrow\quad 2\approx\frac{\sqrt{3}a}{2\theta}+\frac{\sqrt{3}a}{4\theta}=\frac{3\sqrt{3}a}{4\theta} \quad\longrightarrow\quad a\approx\frac{8\theta}{3\sqrt{3}}.$$

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\approx\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8\theta}{3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2.$$

- 문제에서 주어진 극한을 구해보자.

$$\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}\approx\frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2}{\theta\times\frac{8}{3}\theta}=\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

- $\overline{AU'}+a+\overline{BT'}=2$: $\triangle AUU', \triangle BTT'$ 에서 $\overline{UU'}=\overline{TT'}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 가 된다.

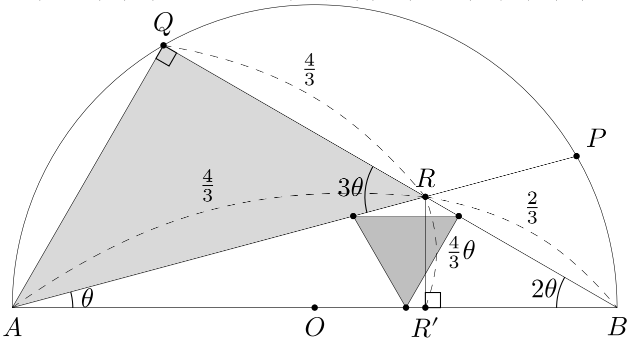
$$\overline{AU'}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\tan\theta}, \qquad \overline{BT'}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\tan 2\theta}.$$

$$2=\overline{AU'}+a+\overline{BT'}=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2\tan\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan 2\theta}\right) \quad\longrightarrow\quad a=\frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2\tan\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan 2\theta}}.$$

여기서 분모에 1 이 있어, 근사 처리에서 어떻게 처리해야 하는 지를 결정해야 한다. $\theta$ 가 0 에 가까워지면 분모는 아주 큰 값이 되므로 상수할 1 은 무시해도 된다. 따라서

$$a=\frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2\tan\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan 2\theta}}\approx\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2\theta}+\frac{\sqrt{3}}{4\theta}}=\frac{8\theta}{3\sqrt{3}}.$$

근사를 적극적으로 활용하면, 다음과 같이 축약해서 풀 수도 있다.




$$\begin{aligned}
f(\theta) &\approx \triangle ARQ=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times 3\theta=\frac{8}{3}\theta,\\
\overline{RR'} &\approx \frac{4}{3}\theta\approx \text{정삼각형 높이},\\
a &\approx \frac{2}{\sqrt{3}}\times\overline{RR'}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\theta,\\
g(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\approx\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\theta\right)^2=\frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2\\
\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)} &\approx \frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2}{\frac{8}{3}\theta^2}=\frac{2}{9}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$