우 일 신 又 日 新

매일
조금씩
새로워지기를
바라며

파본형
월간
N제

thinkers' Group for better thinking

25년 2월호

공통/수학1

삼각함수 30제

정답 및 해설지

매일 조금씩 새로워지기를 바라며

우일신又日新

파본형 월간 N제

25년 2월호

공통/수학1

삼각함수 30제

※ 정답 및 해설은 문제 하단에 적힌
넘버링 기준으로 작업되어 있습니다.

▶ 4회 정답

01 (9번)	02 (10번)	03 (11번)	04 (12번)	05 (13번)	06 (14번)	07 (15번)	08 (20번)	09 (21번)	10 (22번)
③	②	④	②	⑤	②	④	85	216	50

▶ 5회 정답

11 (9번)	12 (10번)	13 (11번)	14 (12번)	15 (13번)	16 (14번)	17 (15번)	18 (20번)	19 (21번)	20 (22번)
⑤	④	③	②	③	⑤	⑤	6	6	12

▶ 6회 정답

21 (9번)	22 (10번)	23 (11번)	24 (12번)	25 (13번)	26 (14번)	27 (15번)	28 (20번)	29 (21번)	30 (22번)
②	①	②	⑤	③	④	③	10	31	216

01

정답 ③

방정식의 형태를 변형하면

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin x - \cos x - 2 = 0$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin x(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$$

이므로 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x = \cos x$

이때 $0 \le x < 2\pi$ 이므로

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin x = \cos x \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합은 $\dfrac{5}{2}\pi$ 이다.

$$\therefore\ \frac{5}{2}\pi$$

02

정답 ②

각 변환을 통해 부등식의 형태를 변형하면

$$\tan\frac{3}{8}\pi \times \sin x \le \cos\frac{7}{8}\pi \qquad \leftarrow \frac{3}{8}\pi = \theta \text{로 치환!}$$

$$\Leftrightarrow\ \tan\theta \times \sin x \le \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \qquad \leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

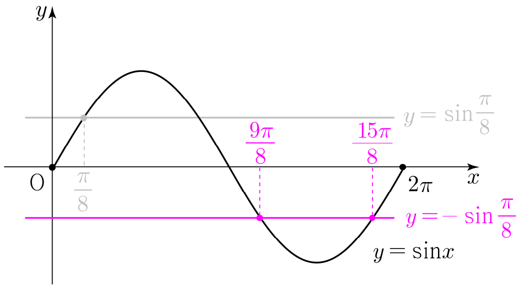
$$\Leftrightarrow\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin x \le -\sin\theta \qquad \leftarrow \sin\theta > 0,\ \cos\theta > 0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin x \le -\cos\theta \qquad \leftarrow \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \sin x \le -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \sin x \le -\sin\frac{\pi}{8}$$

이므로 $\sin x \le -\sin\dfrac{\pi}{8}$ 의 해는 $\dfrac{9}{8}\pi \le x \le \dfrac{15}{8}\pi$ 이다.



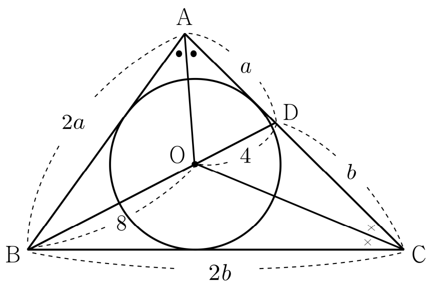
따라서 $\alpha=\dfrac{9}{8}\pi$, $\beta=\dfrac{15}{8}\pi$ 이므로 $\beta-\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{3}{4}\pi$

03

정답 ④

점 O 는 삼각형 ABC 의 내심이고, 내심은 각의 이등분선의 교점이므로 각의 이등분선임을 활용하여 각 선분의 길이를 구해보자.

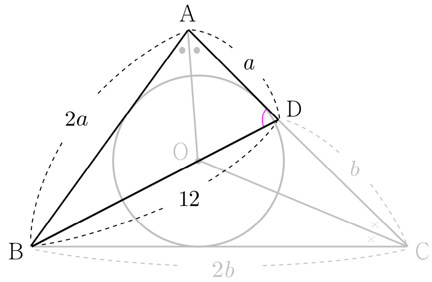


삼각형 ABD 에서 각의 이등분선의 성질에 의해

$$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{OB}:\overline{OD}\ \rightarrow\ \overline{AB}:\overline{AD}=2:1$$
$$\rightarrow\ \overline{AB}=2a,\ \overline{AD}=a$$

이고, 삼각형 CBD 에서 각의 이등분선의 성질에 의해

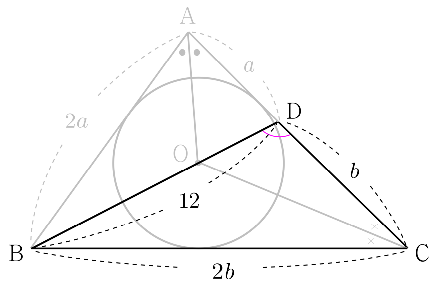
$$\overline{CB}:\overline{CD}=\overline{OB}:\overline{OD}\ \rightarrow\ \overline{CB}:\overline{CD}=2:1$$
$$\rightarrow\ \overline{CB}=2b,\ \overline{CD}=b$$



삼각형 ADB 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle ADB)=\frac{a^2+12^2-(2a)^2}{2\times a\times 12}\ \rightarrow\ a=6$$

$(\because\ \cos(\angle ADB)=\frac{1}{4})$



삼각형 CDB 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle CDB)=\frac{b^2+12^2-(2b)^2}{2\times b\times 12}\ \rightarrow\ b=8$$

$(\because\ \cos(\angle CDB)=-\frac{1}{4})$

따라서 선분 AC 의 길이는 $a+b=14$ 이다.

$\therefore\ 14$

04

정답 ②

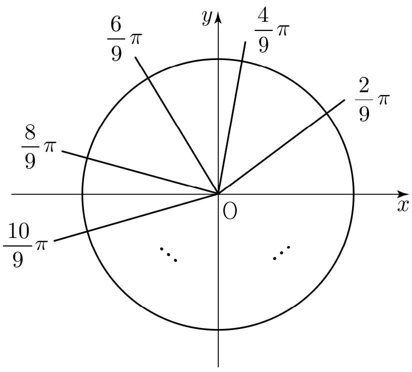
부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right) < 0$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하기 위해 각

$$\frac{2}{9}\pi,\quad \frac{4}{9}\pi,\quad \cdots$$

를 나타내는 동경을 각각 나타내보자.



코사인(cos) 값은 x좌표이므로

$$\cos\frac{2}{9}\pi > 0,\quad \cos\frac{4}{9}\pi > 0,$$

$$\cos\frac{6}{9}\pi > 0,\quad \cos\frac{8}{9}\pi < 0,\quad \cdots$$

분모를 모두 9로 표현하는 일관성을 유지하기 위해 약분 X

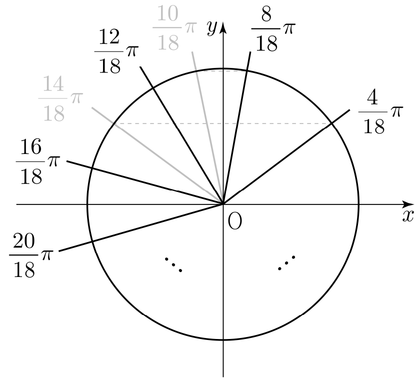
임을 알 수 있다. 이때

$$\sum_{k=1}^{3} \cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right) = \cos\frac{2}{9}\pi + \cos\frac{4}{9}\pi + \cos\frac{6}{9}\pi$$

$$\sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right) = \cos\frac{2}{9}\pi + \cos\frac{4}{9}\pi + \cos\frac{6}{9}\pi + \cos\frac{8}{9}\pi$$

$$\vdots$$

의 값의 부호를 판단하기 위해 동경의 대칭성을 활용하자.



→ 동경의 대칭성을 활용하기 위해 분모를 모두 18로 통분!

위의 그림과 같이

$$\left(\cos\frac{4}{9}\pi=\right)\cos\frac{8}{18}\pi = -\cos\frac{10}{18}\pi,$$

$$\left(\cos\frac{2}{9}\pi=\right)\cos\frac{4}{18}\pi = -\cos\frac{14}{18}\pi$$

이고,

$$\cos\frac{16}{18}\pi < \cos\frac{14}{18}\pi < \cos\frac{12}{18}\pi < \cos\frac{10}{18}\pi$$

모두 음수임에 주의! 즉, 절댓값으로 따지면

$$\left|\cos\frac{16}{18}\pi\right| > \left|\cos\frac{14}{18}\pi\right| > \left|\cos\frac{12}{18}\pi\right| > \left|\cos\frac{10}{18}\pi\right|$$

이므로

$$\cos\frac{4}{18}\pi + \cos\frac{8}{18}\pi + \cos\frac{12}{18}\pi > 0,$$

$$= \cos\frac{2}{9}\pi + \cos\frac{4}{9}\pi + \cos\frac{6}{9}\pi \left(= \sum_{k=1}^{3}\cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right)\right)$$

$$\cos\frac{4}{18}\pi + \cos\frac{8}{18}\pi + \cos\frac{12}{18}\pi + \cos\frac{16}{18}\pi < 0$$

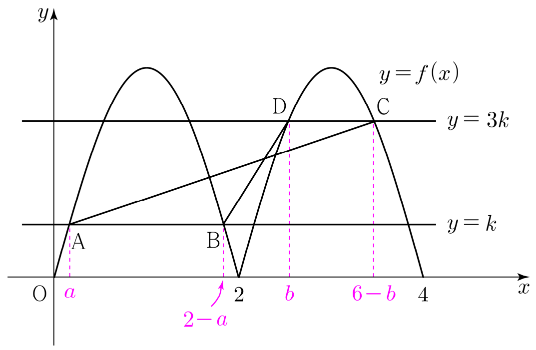
$$= \cos\frac{2}{9}\pi + \cos\frac{4}{9}\pi + \cos\frac{6}{9}\pi + \cos\frac{8}{9}\pi \left(= \sum_{k=1}^{4}\cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right)\right)$$

이다. 따라서 부등식 $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2}{9}k\pi\right) < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

$\therefore\ 4$

05

정답 ⑤



두 점 A, B는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, 두 점 C, D의 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각

$$\mathrm{A}\,(a,\,k),\quad \mathrm{B}\,(2-a,\,k),\quad \mathrm{C}\,(6-b,\,3k),\quad \mathrm{D}\,(b,\,3k)$$

로 두면

$$\left|3\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right| = k \quad\rightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) = \frac{k}{3} \quad\cdots\ ㉠$$

$$\left|3\sin\left(\frac{\pi}{2}b\right)\right| = 3k \quad\rightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}b\right) = -k \quad\cdots\ ㉡$$

이 성립한다. 이때 $3\tan(\angle\mathrm{CAB})+\tan(\angle\mathrm{BDC})=0$ 에서

$\tan(\angle\mathrm{CAB})$ = (직선 AC의 기울기),
$\tan(\angle\mathrm{BDC})$ = − (직선 BD의 기울기)

이므로

$$\begin{aligned} & 3\tan(\angle\mathrm{CAB})+\tan(\angle\mathrm{BDC})=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\times\frac{3k-k}{(6-b)-a}+(-1)\times\frac{3k-k}{b-(2-a)}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6k}{(6-b)-a}=\frac{2k}{b-(2-a)} \quad \leftarrow k \text{ 약분 후, 식 정리!} \\ \Leftrightarrow\ & a+b=3 \qquad\cdots\ ㉢ \end{aligned}$$

이때 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하면
(㉢에서 $b=3-a$를 ㉡에 대입한 후, ㉠과 연립!)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}a\right)=\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

따라서 $k=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ $\left(=3\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right)$이다.

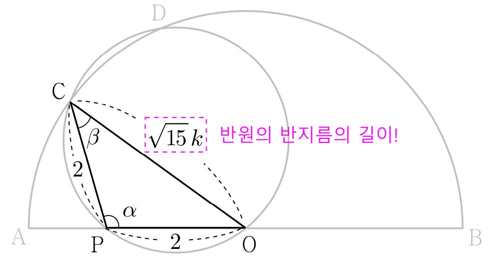
$$\therefore\ \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

06

정답 ②

원의 반지름의 길이와 반원의 반지름의 길이의 비가 $2:\sqrt{15}$이므로 원의 반지름의 길이 R_1, 반원의 반지름의 길이 R_2에 대하여 $R_1=2k$, $R_2=\sqrt{15}\,k$라 하고, $\angle\mathrm{OPC}=\alpha$, $\angle\mathrm{OCP}=\beta$라 하자.

Step 1 삼각형 OCP에서 사인/코사인 법칙



삼각형 OCP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin\alpha}=2R_1 \ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{15}\,k}{\sin\alpha}=4k$$

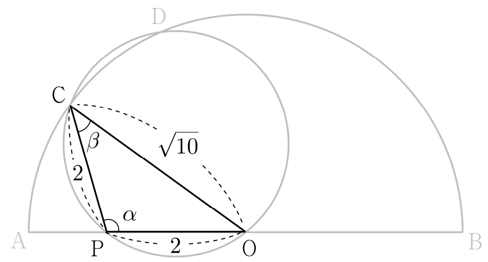
$$\rightarrow\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4},\quad \cos\alpha=-\frac{1}{4}$$

(α는 둔각!)

삼각형 OCP에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}(\sqrt{15}\,k)^2&=2^2+2^2-8\cos\alpha\\&=10\end{aligned}$$

이므로 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.



이때 $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구하기 위해 삼각형 OCP에서 사인법칙을 한 번 더 활용해주면

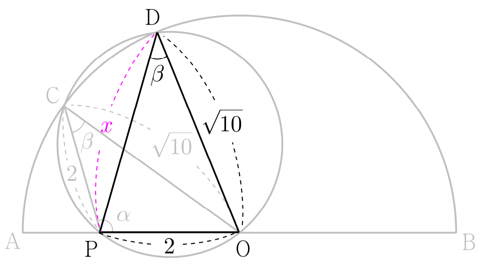
$$\frac{\sqrt{10}}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\beta} \ \rightarrow\ \sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{4},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

(이등변삼각형임을 활용해도 도출 가능!)

Step 2 삼각형 ODP 에서 코사인법칙

원주각의 성질에 의해

$$\angle\mathrm{OCP} = \angle\mathrm{ODP} \quad \rightarrow \quad \angle\mathrm{ODP} = \beta$$



삼각형 ODP 에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned} 2^2 &= x^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2\times x \times \sqrt{10}\cos\beta \\ &= x^2 - 5x + 10 \end{aligned}$$

이므로 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 3$

이때 $(x=)\ \overline{\mathrm{DP}} > \overline{\mathrm{CP}}$ 이므로 $x = 3$ 이다.

$\therefore\ 3$

07

정답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를 각각

$$f(x) = a|\sin\pi x| + b\sin\pi x, \quad g(x) = \tan\frac{\pi}{2}x$$

로 두자.

Step 1 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프를 통해 점 추론

열린구간 $(0, 3)$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $g(x)$ 의 그래프를 그려보자. 함수 $f(x)$ 는

$$\begin{aligned} f(x) &= a|\sin\pi x| + b\sin\pi x \\ &= \begin{cases} (b+a)\sin\pi x & (\sin\pi x \geq 0) \\ (b-a)\sin\pi x & (\sin\pi x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

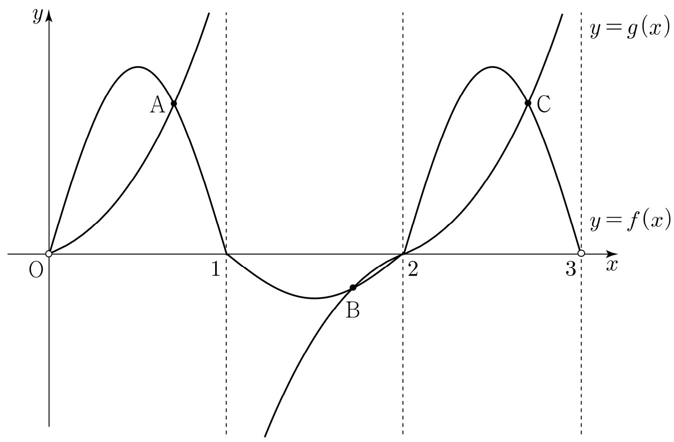
↓ 구간 $(0, 3)$ 에 맞게 범위 적용!

$$= \begin{cases} (b+a)\sin\pi x & (0 < x < 1 \text{ 또는 } 2 < x < 3) \\ (b-a)\sin\pi x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이고, 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \tan\frac{\pi}{2}x \quad \text{: 주기 } 2\text{ !}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 (대략) 다음과 같다.

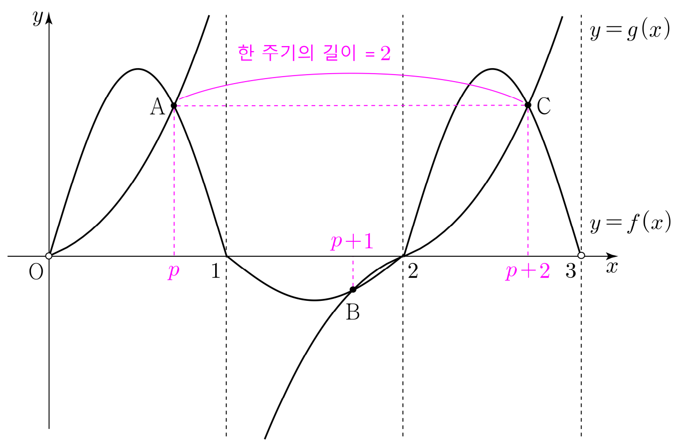


세 점 A, B, C 가 x 축 위에 있지 않은 점이므로 유일하게 결정됨!

이때 선분 AC 의 길이는 $y=g(x)$ 의 한 주기의 길이이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = 2$ 이다. 또한, 조건 (나)에서 점 B 의 x 좌표는 점 A 의 x 좌표보다 1 만큼 크므로 점 A 의 x 좌표를 p 로 두면 세 점 A, B, C 의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(p,\ \tan\frac{\pi}{2}p\right),$$
$$\mathrm{B}\left(p+1,\ \tan\frac{\pi}{2}(p+1)\right),$$
$$\mathrm{C}\left(p+2,\ \tan\frac{\pi}{2}(p+2)\right)$$

이다.

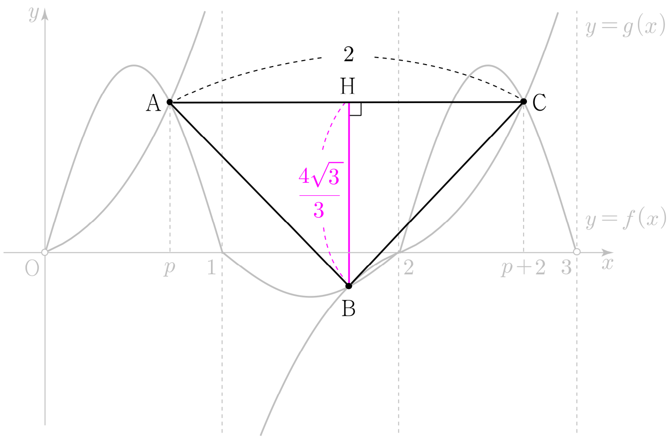


Step 2 **삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$**

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H로 두면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH} \quad \leftarrow \overline{AC}=2$$
$$= \overline{BH}$$

이므로 $\overline{BH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다.



$$\underbrace{\tan\frac{\pi}{2}p}_{\text{(점 A의 } y\text{좌표)}} - \underbrace{\tan\frac{\pi}{2}(p+1)}_{\text{(점 B의 } y\text{좌표)}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{2}p + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}p} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{2}p = \sqrt{3} \qquad \cdots \text{(Remark 참고)}$$

이므로 $p=\frac{2}{3}$ 이고, 두 점 A, B의 좌표는

$A\left(\frac{2}{3}, \sqrt{3}\right)$, $B\left(\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 이다. 즉,

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad b+a=2 \quad \cdots ㉠$$
$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad b-a=\frac{2}{3} \quad \cdots ㉡$$

에서 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 $a\times b=\frac{8}{9}$

$\therefore \frac{8}{9}$

* Remark

사실

$$\tan\frac{\pi}{2}p + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}p} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

을 풀면 $\tan\frac{\pi}{2}p = \sqrt{3}$ 또는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

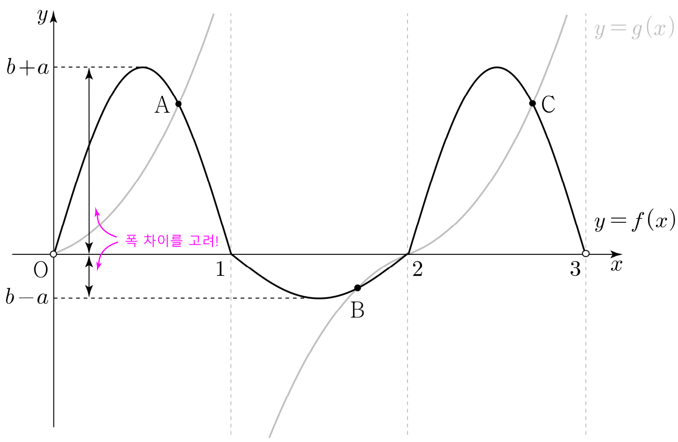
이때 $\tan\frac{\pi}{2}p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 경우, $p=\frac{1}{3}$ 이고,

두 점 A, B의 좌표는 $A\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(\frac{4}{3}, -\sqrt{3}\right)$ 이고

이를 대입해서 계산하면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$ 이므로

a가 양수라는 조건에 모순!

그리고 사실 직접 계산해보지 않아도 다음 그림과 같이 그래프로 생각해보면 당연히 $\tan\frac{\pi}{2}p = \sqrt{3}$ 이어야 한다는 사실을 알 수 있다.



점 A의 y좌표의 절댓값이 점 B의 y좌표의 절댓값보다 커야 한다!

08

정답 85

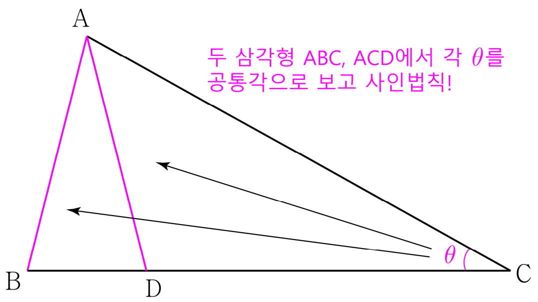
$\overline{BD} : \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2 : 4$ 이므로

$$\overline{BD} = k, \quad \overline{AB} = 2k, \quad \overline{AC} = 4k$$

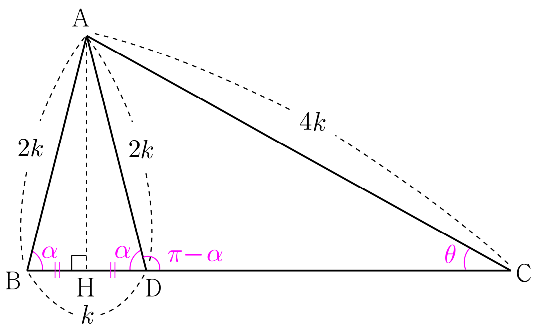
로 두자.

Step 1 **k 의 값 구하기**

이때 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이와 삼각형 ACD 의 외접원 C 의 넓이가 모두 64π 이므로 두 원의 반지름의 길이는 모두 8 이고, $\overline{AB} = \overline{AD}$ $(=2k)$ 이다. ($\angle ACB$ 가 공통이므로!)



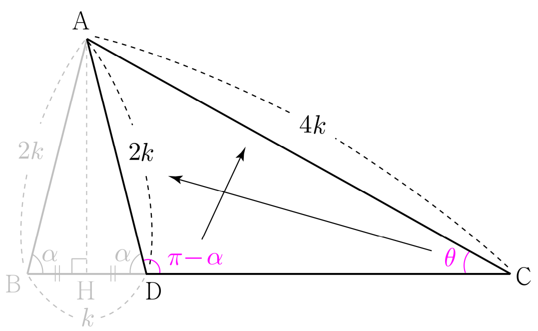
즉, 삼각형의 길이를 표현해보면 다음과 같다.



점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H, $\angle ABD = \alpha$ 로 두면 $\angle ADB = \alpha$, $\angle ADC = \pi - \alpha$ 이고,

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(코사인법칙을 안쓰고 직각삼각형 ABH 에서 바로 도출!)

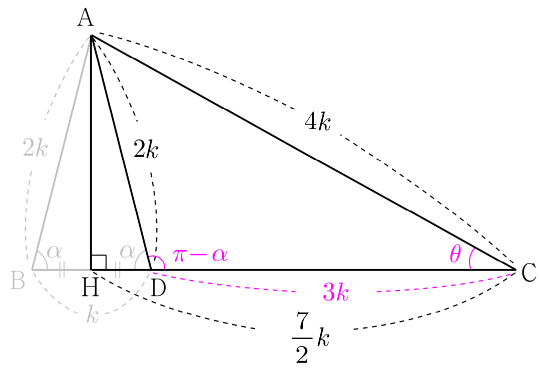


삼각형 ACD 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{4k}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{2k}{\sin\theta} = 16 \leftarrow \sin(\pi-\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이므로 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $k = \sqrt{15}$ 이다.

Step 2 **삼각형 CDP 의 넓이가 최대가 되는 순간**

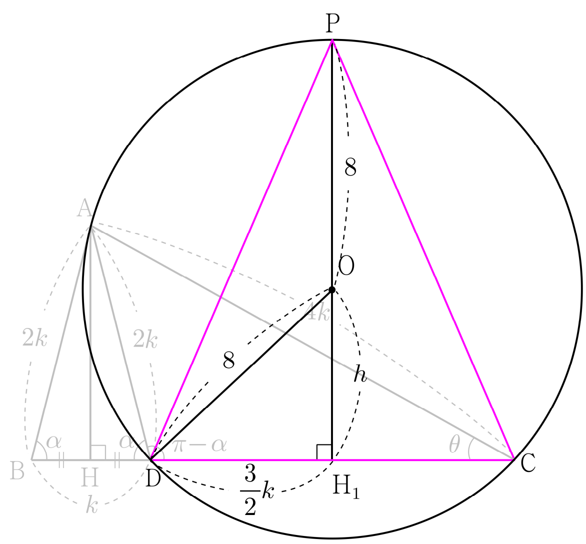


$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ 에서 $\cos\theta = \dfrac{7}{8}$ 이므로

$$\overline{CH} = 4k \times \cos\theta \;\rightarrow\; \overline{CH} = \frac{7}{2}k$$

$$\rightarrow\; \overline{CD} = 3k \quad \left(\because\ \overline{DH} = \frac{k}{2}\right)$$

다음 그림과 같이 삼각형 ACD 의 외접원 C 의 중심을 O 라 할 때, 외접원 위의 점 P 에 대하여 삼각형 CDP 가 최대가 되는 순간은 직선 OP 가 선분 CD 와 수직인 순간이다.



점 P 에서 선분 CD 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{OH_1}} = h$ 로 두자. 삼각형 $\mathrm{ODH_1}$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$8^2 = \left(\frac{3}{2}k\right)^2 + h^2 \;\rightarrow\; h = \frac{11}{2} \quad (\because\ k = \sqrt{15})$$

따라서 삼각형 CDP 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 3k\times(8+h)=\frac{81}{4}\sqrt{15}$$

이므로 $p+q=85$ 이다.

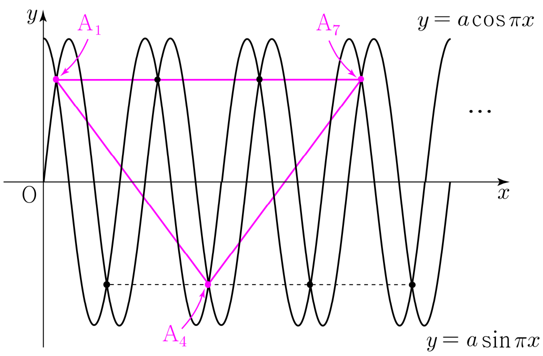
$\therefore$ 85

09

정답 216

사인/코사인 함수의 주기성과 대칭성에 의해 어떤 자연수 k에 대하여 $A_1A_7A_k$가 정삼각형이 되도록 하는 k의 값은

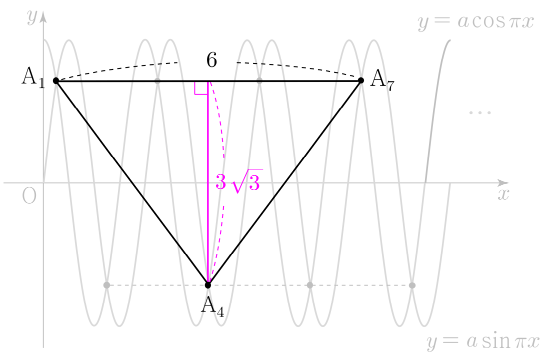
$k=4$ 일 수 밖에 없다.



이때 선분 A_1A_7의 길이는 삼각함수의 세 주기의 길이와 일치하므로

$\overline{A_1A_7}=6$ 임을 알 수 있다.

즉, 정삼각형 $A_1A_7A_4$의 높이는 $3\sqrt{3}$ 이어야 한다.



이때 점 A_1의 좌표가 $A_1\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$이므로

($a\cos\pi x=a\sin\pi x$ 에서 x 의 값을 구할 수 있음!)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=3\sqrt{3}\ \rightarrow\ a=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

따라서 $a^2\times k^2=216$ 이다.

$\therefore$ 216

10

정답 50

Step 1 방정식을 만족시키기 위한 조건

함수 $f(x)=-x^2+\frac{a}{8}x$ 의 대칭축은 $x=\frac{a}{16}$ 이므로 방정식

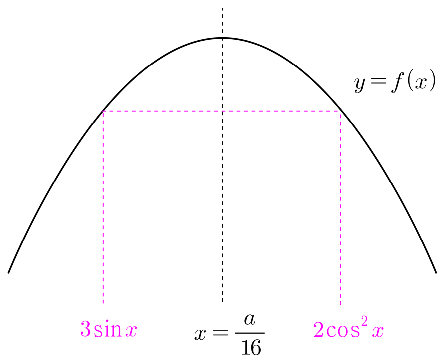
$$f(3\sin x)=f\left(2\cos^2 x\right)$$

을 만족시키는 x 의 값은

$$\underline{3\sin x=2\cos^2 x}\quad \text{또는}\quad \underline{3\sin x+2\cos^2 x=\frac{a}{8}}$$

당연한 소리!　　같지 않더라도 축에 대하여 대칭이면 됨!

(그림 참고)



Step 2 케이스 분류를 통한 구체적인 실근 개수 추론

(1) $3\sin x=2\cos^2 x$ 인 경우

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $3\sin x=2\cos^2 x$ 은

$$\begin{aligned}3\sin x=2\cos^2 x\ &\Leftrightarrow\ 3\sin x=2\left(1-\sin^2 x\right)\\ &\Leftrightarrow\ (2\sin x-1)(\sin x+2)=0\\ &\Leftrightarrow\ \sin x=\frac{1}{2}\ \ \underline{\text{또는 }\sin x=-2}\end{aligned}$$

만족시키는 x 의 값이 존재하지 않음!

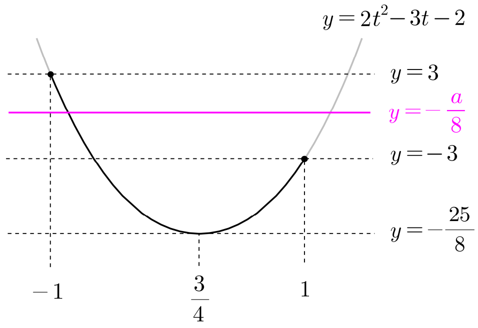
이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 뿐이다. (실근 1개 확보!)

(2) $3\sin x+2\cos^2 x=\frac{a}{8}$ 인 경우

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $3\sin x+2\cos^2 x=\frac{a}{8}$ 은

$$3\sin x+2\cos^2 x=\frac{a}{8} \iff 2\sin^2 x-3\sin x-2=-\frac{a}{8}$$

이므로 $\sin x=t$ (단, $-1\le x\le 1$)로 치환한 후, 곡선 $y=2t^2-3t-2$ 와 직선 $y=-\frac{a}{8}$ 의 교점의 개수를 관찰하자.



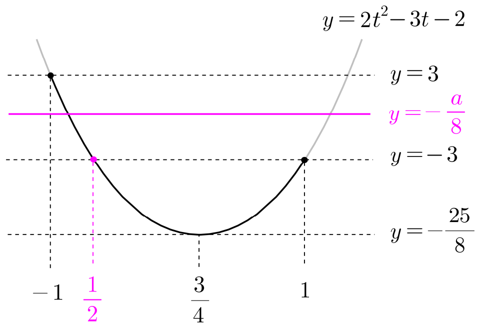
이때 (1)에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 라는 실근이 1개 확보되어 있으므로 조건을 만족시키기 위해선 (2)에서

① 교점의 개수가 1개이거나

② 교점의 개수가 2개이고, 교점에 $x=\frac{\pi}{6}$ 가 포함되어 있거나

이 케이스도 고려해줘야함! 주의!

$x=\frac{\pi}{6}$ 일 때, $t=\frac{1}{2}\left(=\sin\frac{\pi}{6}\right)$의 위치를 파악해보면



따라서 방정식 $f(3\sin x)=f(2\cos^2 x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값의 범위는

$$\underline{-3\le-\frac{a}{8}\le 3},\quad -\frac{a}{8}=-\frac{25}{8}$$

총 실근의 개수가 3이 되는 것처럼 보여도,
중근으로 인해 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

에서 $-24\le a\le 24$, $a=25$ 이므로 정수 a의 개수는 50이다.

$\therefore\ 50$

11

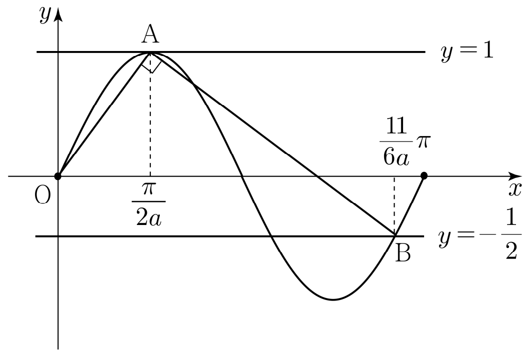
정답 ⑤

함수 $f(x)=\sin ax\ \left(0\le x\le\frac{2\pi}{a}\right)$에 대하여

$$f(x)=1 \quad\to\quad x=\frac{\pi}{2a}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2} \quad\to\quad x=\frac{7}{6a}\pi,\ \frac{11}{6a}\pi$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 $A\left(\frac{\pi}{2a},1\right)$, $B\left(\frac{11}{6a}\pi,-\frac{1}{2}\right)$이다.



$\angle OAB=\frac{\pi}{2}$ 이므로

(직선 OA의 기울기)×(직선 AB의 기울기)$=-1$

$$\iff \frac{1}{\frac{\pi}{2a}}\times\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{8}{6a}\pi}=-1$$

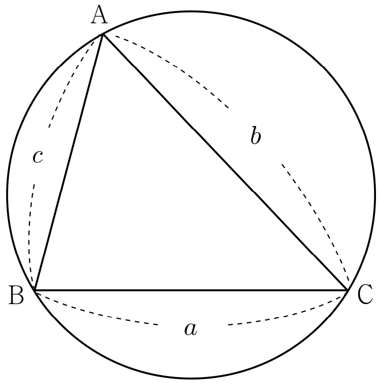
$$\iff a^2=\frac{4}{9}\pi^2$$

이므로 양수 a의 값은 $a=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

$\therefore\ \frac{2}{3}\pi$

12

정답 ④



조건 (가)에서 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 1 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$$

이때 조건 (나)에서 삼각형 ABC 의 넓이가 1 이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin C = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{abc}{4} = 1 \quad \left(\because \ \sin C = \frac{c}{2}\right)$$
$$\rightarrow \quad abc = 4$$

따라서

$$\frac{a}{\sin A} \times \frac{b}{\sin B} \times \frac{c}{\sin C} = 8$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin A \times \sin B \times \sin C = \frac{1}{2}$$

이므로

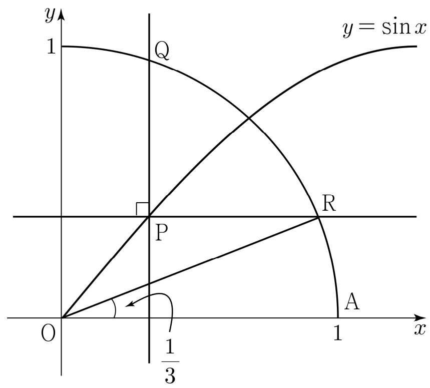
$$\begin{aligned} &\sin(A+B) \times \sin(B+C) \times \sin(C+A) \\ &= \sin(\pi - C) \times \sin(\pi - A) \times \sin(\pi - B) \\ &= \sin A \times \sin B \times \sin C \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore \ \frac{1}{2}$$

13

정답 ③



호 AR 의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이므로 ($l = r\theta$ 활용)

$$\angle \mathrm{AOR} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \mathrm{R}\left(\cos\frac{1}{3},\ \sin\frac{1}{3}\right)$$

점 P 는 y 좌표가 $\sin\frac{1}{3}$ 인 곡선 $y = \sin x$ 위의 점이므로

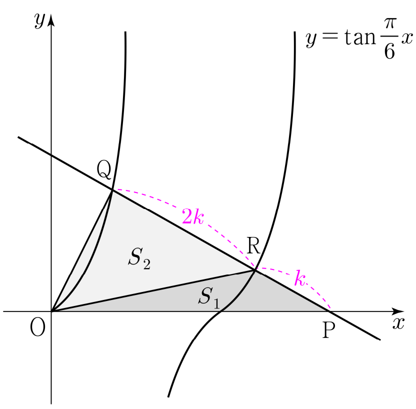
$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \sin\frac{1}{3}\right)$이고, 점 Q 는 x 좌표가 $\frac{1}{3}$ 인 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$이다.

따라서 직선 OQ의 기울기는 $2\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore \ 2\sqrt{2}$$

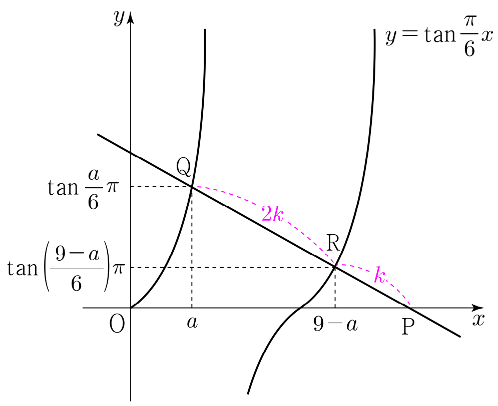
14

정답 ②



조건 (나)에서 $S_2 = 2S_1$ 이므로 두 삼각형 OPR, OQR 의 넓이의 비가 1 : 2 이다. 이때 두 삼각형의 높이가 같으므로 밑변의 길이 비도 1 : 2 임을 알 수 있다. 즉, $\overline{\mathrm{PR}} : \overline{\mathrm{QR}} = 1 : 2$

조건 (가)에서 두 점 Q, R의 x좌표의 합이 9이므로 점 Q의 x좌표를 a, 점 R의 x좌표를 $9-a$로 두자.



$$\overline{\mathrm{PR}} : \overline{\mathrm{QR}} = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{9-a}{6}\right)\pi : \tan\frac{a}{6}\pi = 1 : 3$$

$$\Leftrightarrow 3\tan\left(\frac{9-a}{6}\right)\pi = \tan\frac{a}{6}\pi$$

$$\tan\left(\frac{9-a}{6}\right)\pi = \tan\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{a}{6}\pi\right) = \frac{1}{\tan\frac{a}{6}\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\tan\frac{a}{6}\pi} = \tan\frac{a}{6}\pi$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{a}{6}\pi = \sqrt{3}$$ (양수여야 함!)

이므로 $a=2$이다. 즉, 두 점 Q, R의 좌표는

$$\mathrm{Q}(2,\ \sqrt{3}),\quad \mathrm{R}\left(7,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{15}(x-2) + \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad x\text{절편} : k = \frac{19}{2}$$

$$\therefore \frac{19}{2}$$

15

정답 ③

Step 1 방정식 해석

주어진 방정식

$$\sin^3\left(\frac{\pi x}{k}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) \quad \cdots ㉠$$

의 형태를 변형하면

$$\sin^3\left(\frac{\pi x}{k}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)\left\{\sin^2\left(\frac{\pi x}{k}\right) - 1\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) - 1\right\}\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) + 1\right\} = 0$$

즉, 주어진 방정식은

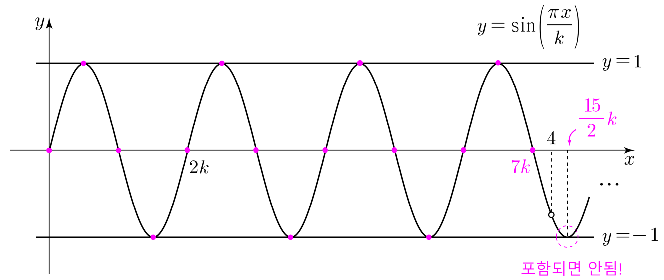
$$\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) = 0,\ -1,\ 1$$ ← $y=\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)$의 그래프를 그려서 판단하자!

을 만족시키는 $x\ (0 \le x < 4)$의 값이다.

Step 2 함수 $y=\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)$의 그래프를 통해 조건 해석

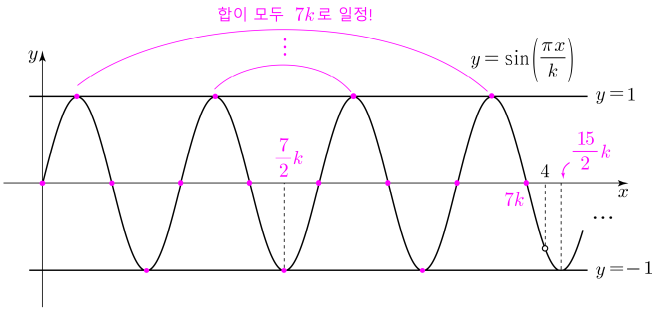
$$y = \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$ ← 주기는 $2k$!

의 그래프는 다음과 같다.



조건 (가)에 의해 $0 \le x < 4$일 때, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 15이기 위해선

$$\underbrace{7k < 4 \le \frac{15}{2}k}_{\text{등호 주의!}} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{15} \le k < \frac{4}{7} \quad \cdots ㉡$$



이때 조건 (나)를 활용하기 위해 방정식 ㉠의 서로 다른 모든 실근의 합을 구해보면

$$(\text{모든 실근의 합}) = 7k\times 7+\frac{7}{2}k=\frac{105}{2}k$$

이다. ㉡에 의해 $28\le\frac{105}{2}k<30$ 이고, $\frac{105}{2}k$가 자연수이므로 가능한 경우는

$$\frac{105}{2}k=28 \rightarrow k=\frac{56}{105}$$
$$\frac{105}{2}k=29 \rightarrow k=\frac{58}{105}$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 양수 k의 값의 합은

$$\frac{56}{105}+\frac{58}{105}=\frac{38}{35}$$

이다.

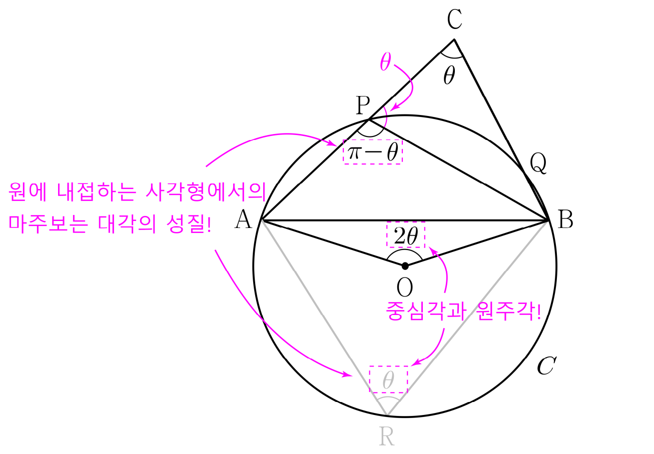
$$\therefore \frac{38}{35}$$

16

정답 ⑤

Step 1 삼각형 BPC는 $\overline{BP}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

$\angle AOB=2\times\angle ACB$이므로 $\angle ACB=\theta$, $\angle AOB=2\theta$로 두자.

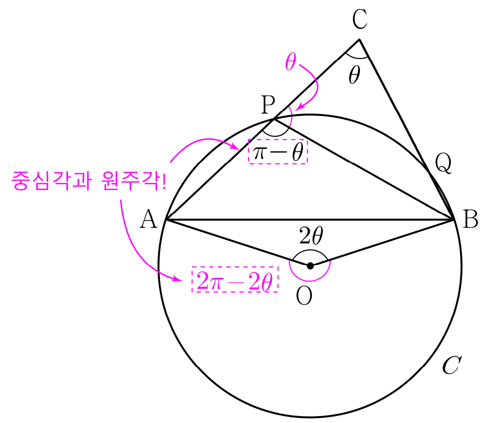


(길이가 더 긴) 호 AB 위의 임의의 점 R에 대하여

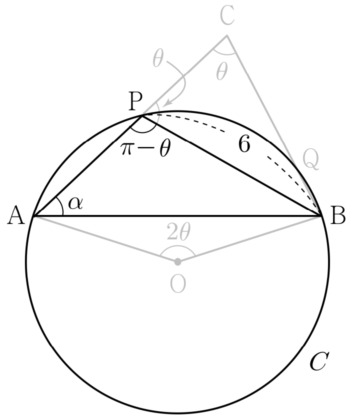
$\angle ARB=\theta$ (원주각) $\rightarrow$ $\angle APB=\pi-\theta$ (대각의 합은 π)

이므로 $\angle BPC=\theta$이다. 즉, 삼각형 BPC는 $\overline{BP}=\overline{BC}=6$인 이등변삼각형이다.

* Remark ($\angle APB=\pi-\theta$임을 찾는 다른 방법)



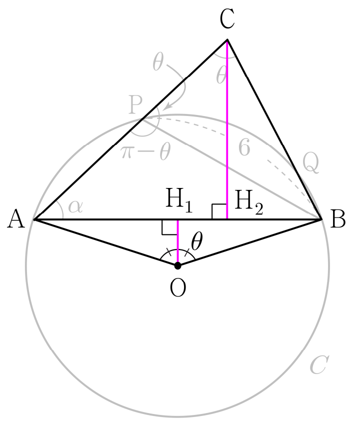
Step 2 **$\sin\theta$, $\cos\theta$ 의 값 구하기**



$\angle BAP = \alpha$ 로 두면 삼각형 ABP 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin\alpha} = 8 \leftarrow \overline{BP} = 6$$

이므로 $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\overline{AB} = 8\sin\theta$ 이다.



점 O 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H_1,

점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

(△ ABC 의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH_2}$

(△ AOB 의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH_1}$

→ 넓이의 비가 15 : 4 !

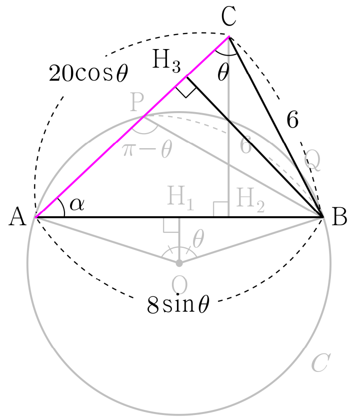
이므로

$$\overline{CH_2} : \overline{OH_1} = 15 : 4 \rightarrow \overline{CH_2} = 15\cos\theta$$

$(\because \overline{OH_1} = 4\cos\theta)$

이때 직각삼각형 ACH_2에서 삼각비에 의해

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CH_2}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = 20\cos\theta$$



점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H_3라 하면

삼각형 ABH_3에서 $\overline{AH_3} = 8\sin\theta\cos\alpha$ 이고,

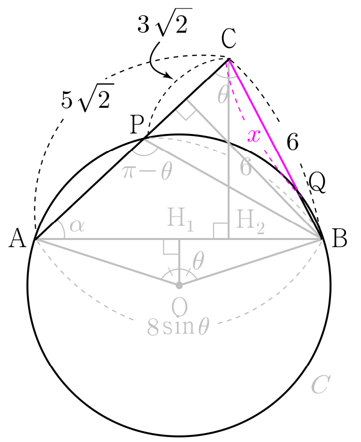
삼각형 CBH_3에서 $\overline{CH_3} = 6\cos\theta$ 이므로

$$20\cos\theta = \underbrace{2\sqrt{7}\sin\theta}_{\overline{AH_3}} + \underbrace{6\cos\theta}_{\overline{CH_3}} \rightarrow \tan\theta = \sqrt{7}$$

즉, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Step 3 **선분 PQ 의 길이 구하기**

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $\overline{CP} = 3\sqrt{2}$ $(= 12\cos\theta)$, $\overline{CA} = 5\sqrt{2}$ 이다.



$\overline{CQ} = x$ 로 두면 할선 정리에 의해

$$\overline{CP} \times \overline{CA} = \overline{CQ} \times \overline{CB} \rightarrow 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 6x$$

$$\rightarrow x = 5$$

삼각형 CPQ 에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= 5^2+(3\sqrt{2})^2-2\times5\times3\sqrt{2}\times\cos\theta\\ &=28\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{7}$ 이다.

$\therefore\ 2\sqrt{7}$

17

정답 ⑤

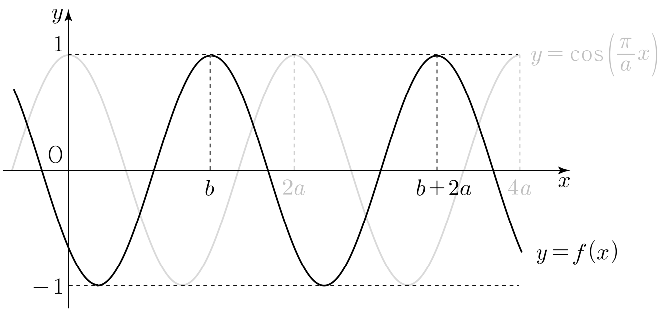
Step 1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

$$f(x)=\cos\left\{\frac{\pi}{a}(x-b)\right\}$$

: $y=\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동!

주기는 $2a$!

에서 $0<b\le 2a$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

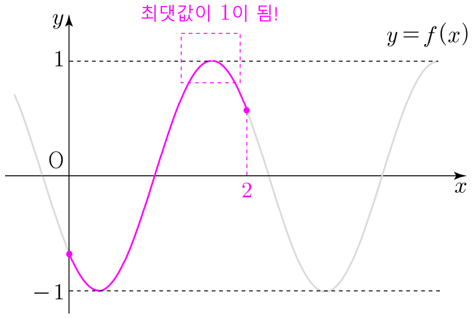


$0\le x\le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 -1 이 되도록 평행이동을 시켜줘야 한다. 이때 b의 값의 범위가 $0<b\le 2a$ 이므로 최대 한 주기까지 평행이동할 수 있다.

주기!

Step 2 $0\le x\le 2$ 에서 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 -1

$0\le x\le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 -1 이려면 다음과 같이 함숫값이 1 이 되는 순간이 $0\le x\le 2$ 에 있으면 안된다.



즉, $0\le x\le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값이 -1 이려면

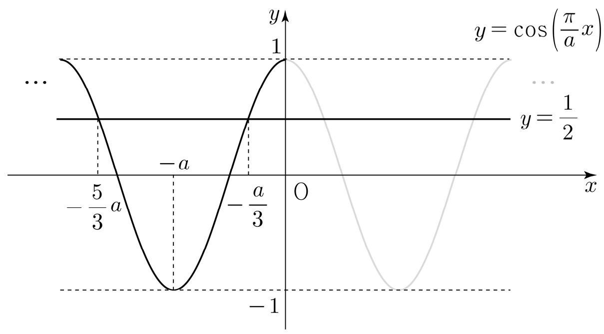
$$f(0)=\frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad f(2)=\frac{1}{2}$$

이어야 한다. (케이스 분류 시작!)

(1) $f(0)=\frac{1}{2}$ 인 경우

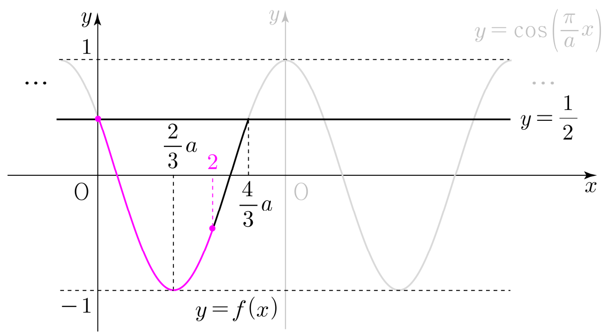
다음 그림과 같이 함수 $y=\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x좌표는 $-\frac{a}{3}$ 또는 $-\frac{5}{3}a$

b가 양수이므로 음수만 관찰!



$f(0)=\frac{1}{2}$ 이려면 $b-\frac{5}{3}a=0 \to b=\frac{5}{3}a$

$b=\frac{a}{3}$ 이면 함숫값이 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 상황이 발생함!

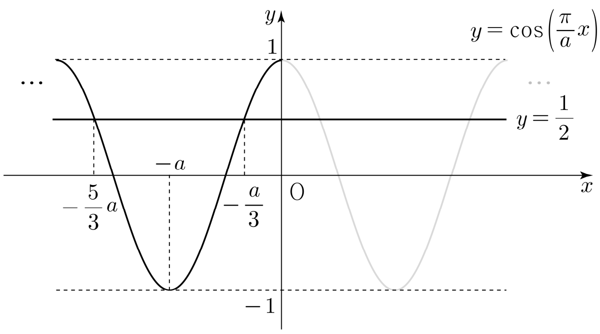


이때 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)$의 최솟값이 -1이려면

$$\frac{2}{3}a \le 2 \le \frac{4}{3}a \rightarrow \frac{3}{2} \le a \le 3$$

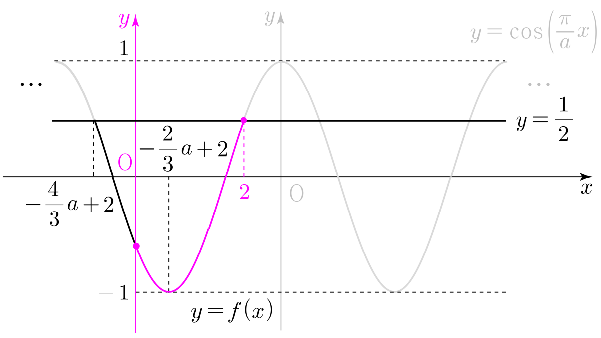
즉, $a+b\left(=\frac{8}{3}a\right)$의 값의 범위는 $4 \le a+b \le 8$

(2) $f(2)=\frac{1}{2}$ 인 경우



$f(2)=\frac{1}{2}$ 이려면 $b-\frac{a}{3}=2 \rightarrow b=\frac{a}{3}+2$

$b=\frac{5}{3}a+2$ 이면 함숫값이 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 상황이 발생함!



이때 $0 \le x \le 2$에서 $f(x)$의 최솟값이 -1이려면

$$-\frac{4}{3}a+2 \le 0 \le -\frac{2}{3}a+2 \rightarrow \frac{3}{2} \le a \le 3$$

즉, $a+b\left(=\frac{4}{3}a+2\right)$의 값의 범위는 $4 \le a+b \le 6$

(1), (2)에 의해 $a+b$의 최댓값은 8이다.

$\therefore\ 8$

18

정답 6

Step 1 **$\sin\theta$의 부호 판단**

부등식

$$(\sin\theta)x^2+2a(\cos\theta)x+b\sin\theta \ge 0 \qquad \cdots ㉠$$

을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 θ의 값의 범위를 찾기 위해 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(\sin\theta)x^2+2a(\cos\theta)x+b\sin\theta$$

로 두고, $\sin\theta$의 부호에 따라 케이스를 분류하자.

(1) $\sin\theta=0$ 인 경우

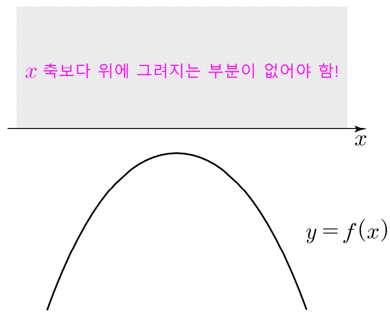
$\sin\theta=0$이면 $f(x)$는 일차함수이므로 일차부등식 ㉠을 만족시키는 실수 x의 값이 반드시 존재하므로 모순!

(2) $\sin\theta>0$ 인 경우

$\sin\theta>0$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 이차부등식 ㉠을 만족시키는 실수 x의 값이 반드시 존재하므로 모순!

(3) $\sin\theta<0$ 인 경우

$\sin\theta<0$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로 이차부등식 ㉠을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않으려면 $D<0$이어야 한다.



$$D<0 \rightarrow (a\cos\theta)^2-b\sin^2\theta<0 \qquad \cdots ㉡$$

Step 2 부등식 ㉡의 해석

부등식 ㉡을 해석하기 위해 $\cos\theta$의 값이 0이냐 아니냐에 따라 케이스를 분류하자. (㉡의 양변을 $\cos\theta$로 나누기 위해서 판단 필요)

(1) $\cos\theta=0$ 인 경우

$\cos\theta=0$이면 부등식 ㉡은

㉡ : $b\sin^2\theta>0$ → $b>0$이고, $\sin^2\theta>0$이므로 항상 성립!

즉, $\cos\theta=0$이고, $\sin\theta<0$인 θ의 값은 $\theta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\theta=\frac{3}{2}\pi$은 부등식 ㉡을 만족시킨다.

(2) $\cos\theta\neq0$ 인 경우

$\cos\theta\neq0$이면 부등식 ㉡의 양변을 $\cos\theta$로 나눌 수 있으므로

㉡ : $\tan^2\theta>\frac{a^2}{b}$ ($\because$ $b>0$)

[Step 2]의 (1), (2)에 의해 부등식 $\tan^2\theta>\frac{a^2}{b}$을 만족시키는 θ의 값의 범위가 $\frac{4}{3}\pi<\theta<p$이어야 한다. (여기에 $\theta=\frac{3}{2}\pi$도 포함!)

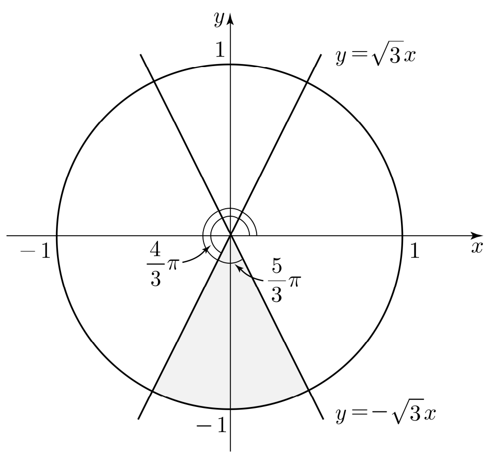
이때 $\theta=\frac{4}{3}\pi$가 경계이므로

$$\tan^2\frac{4}{3}\pi=\frac{a^2}{b} \rightarrow \frac{a^2}{b}=3 \quad \cdots ㉢$$

$\sin\theta<0$일 때, 부등식

$$\tan^2\theta>3 \Leftrightarrow \tan\theta<-\sqrt{3},\ \tan\theta>\sqrt{3}$$

을 만족시키는 모든 θ의 값의 범위가 $\frac{4}{3}\pi<\theta<p$이므로 $p=\frac{5}{3}\pi$



따라서 $a=3$ ($=6\cos p$)이고, ㉢에 의해 $b=3$이므로 $a+b=6$이다.

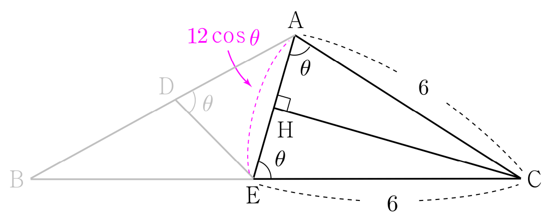
$\therefore$ 6

19

정답 6

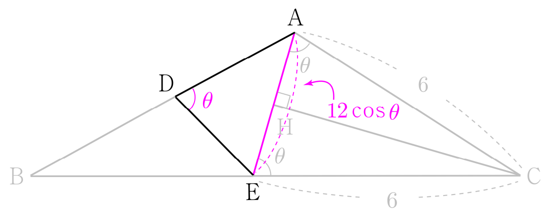
$\angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{CEA}=\angle\mathrm{ADE}=\theta$로 두자.

Step 1 $\cos\theta$의 값과 선분 AE의 길이 구하기



점 C에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{EH}}=6\cos\theta \rightarrow \overline{\mathrm{AE}}=12\cos\theta$$



삼각형 ADE에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin\theta}=2R \rightarrow R=\frac{6}{\tan\theta} \quad (\because\ \overline{\mathrm{AE}}=12\cos\theta)$$

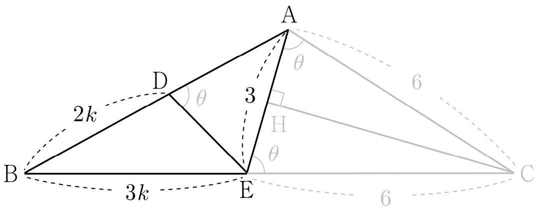
이때 삼각형 ADE의 외접원의 넓이가 $\frac{12}{5}\pi$이므로

$$\pi R^2=\frac{12}{5}\pi \rightarrow \tan\theta=\sqrt{15}$$

에서 $\cos\theta=\frac{1}{4}$, $\overline{\mathrm{AE}}=3$이다.

Step 2 삼각형 BED 와 삼각형 BAE 는 닮음이다.

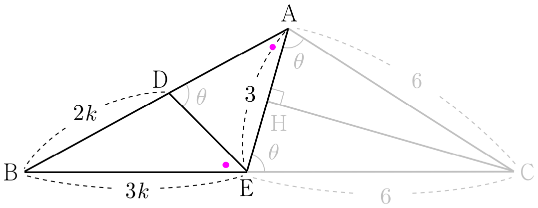
$\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2:3$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}} = 2k$, $\overline{\mathrm{BE}} = 3k$ 로 두자.



삼각형 ADE 에서 세 내각의 크기는 π 이므로

$$\angle\mathrm{DAE} + \angle\mathrm{AED} + \underbrace{\angle\mathrm{EDA}}_{\theta} = \pi = \underbrace{\angle\mathrm{AEC}}_{\theta} + \angle\mathrm{AED} + \angle\mathrm{DEB} \quad (\because \text{ 평각})$$

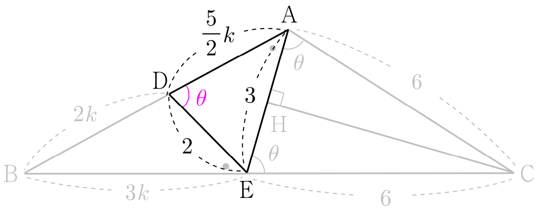
이므로 $\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{DEB}$ 이다.



즉, 두 삼각형 BED 와 BAE 는 AA 닮음이고 닮음비는 $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2:3$ 이므로

$$\overline{\mathrm{DE}} = \frac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AE}} = 2,$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}\times\overline{\mathrm{BE}} = \frac{9}{2}k \ \rightarrow\ \overline{\mathrm{AD}} = \frac{5}{2}k$$



삼각형 ADE 에서 코사인법칙에 의해

$$(\cos\theta =)\ \frac{1}{4} = \frac{2^2+\left(\frac{5}{2}k\right)^2-3^2}{2\times2\times\frac{5}{2}k} \ \Leftrightarrow\ 5k^2-2k-4=0$$

$$\Leftrightarrow\ k = \frac{1+\sqrt{21}}{5}$$

(근의 공식)

이므로 삼각형 ADE 의 둘레의 길이는 $\dfrac{11+\sqrt{21}}{2}$ $\left(=2+3+\frac{5}{2}k\right)$

이므로 $p+q=6$ 이다.

$\therefore$ 6

20

정답 12

Step 1 집합 A 의 원소 관찰

집합

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+pn\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+pn\right) \,\middle|\, n \text{은 자연수} \right\}$$

에 대하여

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+pn\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+pn\right) = -\cos^2(pn)$$

이므로 집합 A 는

$$A = \left\{ -\cos^2(pn) \,\middle|\, n \text{은 자연수} \right\}$$

이다. 집합 A 의 원소의 개수가 3 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $\cos^2(pn)$ 의 값이 3 개만 나오도록 하는 p 에 대해 생각해보자.

Step 2 집합 A 의 원소의 개수가 3 이 되기 위한 p 추론

집합 A 의 원소의 개수가 3 이 되도록 하는 p 의 값을 바로 일반화하여 구하기 힘들기에 우리에게 친숙한 값부터 예시로 잡아보자.

(1) $p=\pi$ 인 경우

$\cos(\pi) = -1$ $(=\cos(\pi\times1))$

$\cos(2\pi) = 1$ $(=\cos(\pi\times2))$

$\cos(3\pi) = -1$ $(=\cos(\pi\times3))$

$\vdots$

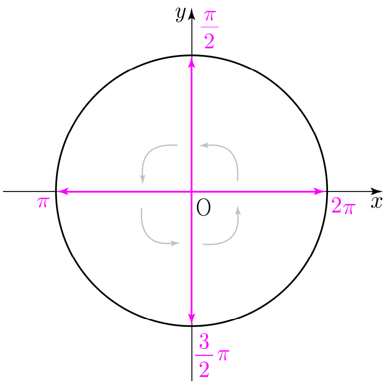
이므로 집합 $A = \left\{ -\cos^2(\pi n) \,\middle|\, n \text{은 자연수} \right\}$ 의 원소의

개수는 1 이다. (조건 만족 X)

↳ $\cos^2(pn)$ 의 값은 항상 1 이다. (제곱 주의!)

즉, 집합 A 의 원소의 개수가 3 이 되려면 $\cos(pn)$ 의 값은 적어도 3 개보다 많아야 하므로 (제곱 고려) $p=$**(유리수)**$\times\pi$ 꼴이어야 한다는 것을 알 수 있다. 정수가 아닌 유리수!

(2) $p=\frac{\pi}{2}$ 계열인 경우



$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\left(=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)\right)$

$\cos(\pi)=-1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)\right)$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0\left(=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 3\right)\right)$

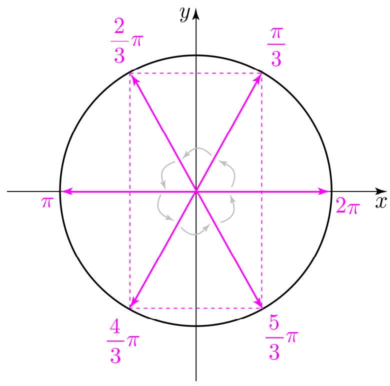
$\cos(2\pi)=1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 4\right)\right)$

$\vdots$

이므로 집합 $A=\left\{-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)\,\middle|\, n\text{은 자연수}\right\}$의 원소의 개수는 $\underline{2}$이다. (조건 만족 X)

↳ $\cos^2(pn)$의 값은 0 또는 1이다. (제곱 주의!)

(3) $p=\frac{\pi}{3}$ 계열인 경우



$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 1\right)\right)$

$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 2\right)\right)$

$\cos(\pi)=-1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 3\right)\right)$

$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)\right)$

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 5\right)\right)$

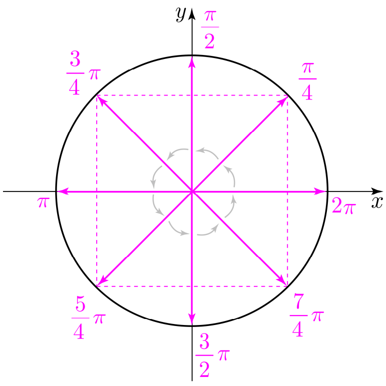
$\cos(2\pi)=1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 6\right)\right)$

$\vdots$

이므로 집합 $A=\left\{-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}n\right)\,\middle|\, n\text{은 자연수}\right\}$의 원소의 개수는 $\underline{2}$이다. (조건 만족 X)

↳ $\cos^2(pn)$의 값은 $\frac{1}{4}$ 또는 1이다. (제곱 주의!)

(4) $p=\frac{\pi}{4}$ 계열인 경우 (정답상황!)



$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times1\right)\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times2\right)\right)$

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times3\right)\right)$

$\cos(\pi)=-1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times4\right)\right)$

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times5\right)\right)$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times6\right)\right)$

$\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times7\right)\right)$

$\cos(2\pi)=1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times8\right)\right)$

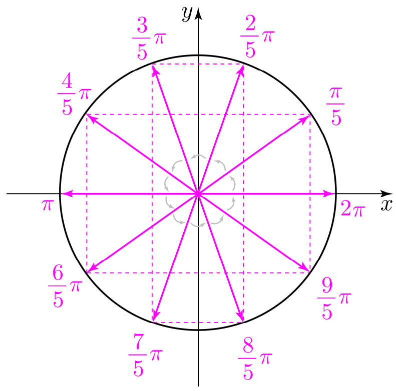
$\vdots$

이므로 집합 $A=\left\{-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}n\right)\;\middle|\; n\text{은 자연수}\right\}$의 원소의

개수는 $\underline{3}$이다. (조건 만족)

↳ $\cos^2(pn)$의 값은 0 또는 $\frac{1}{2}$ 또는 1이다.

(5) $p=\frac{\pi}{5}$ 계열인 경우 (정답상황!)



$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$, $\cdots$ 의 값을 정확히 알 수는 없지만,

동경의 대칭성을 활용하면

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)$

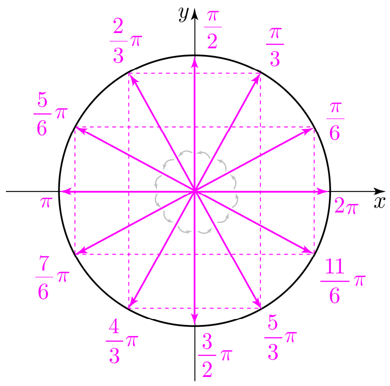
$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)=-\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)$

이므로 집합 $A=\left\{-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}n\right)\;\middle|\; n\text{은 자연수}\right\}$의 원소의

개수는 $\underline{3}$이다. (조건 만족)

↳ $\cos^2(pn)$의 값은 $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 또는 $\cos^2\left(\frac{2}{5}\pi\right)$ 또는 1이다.

(6) $p=\frac{\pi}{6}$ 계열인 경우



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{6}\times1\right)\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(=\cos\left(\frac{\pi}{6}\times2\right)\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\left(=\cos\left(\frac{\pi}{6}\times3\right)\right)$$
$$\vdots$$
$$\cos(\pi)=-1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{6}\times6\right)\right)$$
$$\vdots$$
$$\cos(2\pi)=1\left(=\cos\left(\frac{\pi}{6}\times12\right)\right)$$
$$\vdots$$

이므로 집합 $A=\left\{-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}n\right)\,\middle|\, n\text{은 자연수}\right\}$의 원소의 개수는 $\underline{4}$이다. (조건 만족 X)

↳ $\cos^2(pn)$의 값은 0 또는 $\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}$ 또는 1이다.

그 외에 $p=\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{8}$, $\cdots$ 인 경우는 대칭성을 이용해 생각해보면 집합 A의 원소의 개수는 3보다 클 수 밖에 없다.

(이미 $p=\frac{\pi}{6}$인 경우에서 원소의 개수가 3보다 컸으므로)

(1) ~ (6)에 의해 조건을 만족시키는 p의 값은

$p=\frac{\pi}{4}$ 계열 : $p=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$p=\frac{\pi}{5}$ 계열 : $p=\frac{\pi}{5}, \cdots, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \cdots, \frac{9}{5}\pi$

→ π, 2π 주의!

이므로 모든 p의 값의 합은(대칭성 활용) 12π이다.

$\therefore\ 12$

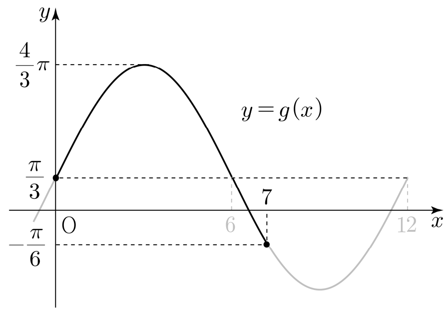
21

정답 ②

함수

$$g(x)=\pi\sin\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3} \ \leftarrow \text{주기 : } 12$$

의 그래프는 다음과 같다.

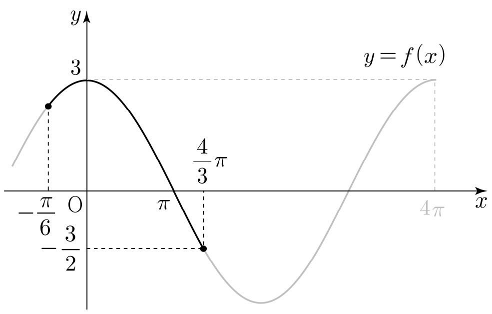


즉, $0\le x\le 7$일 때, $-\frac{\pi}{6}\le g(x)\le\frac{4}{3}\pi$ 이므로

$0\le x\le 7$일 때, $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 관찰하기 위해선 $-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{4}{3}\pi$일 때, $f(t)$의 최댓값과 최솟값을 관찰하면 된다. ($g(x)=t$로 치환한 효과!)

$$f(x)=3\cos\frac{x}{2} \ \leftarrow \text{주기 : } 4\pi$$

의 그래프는 다음과 같다.



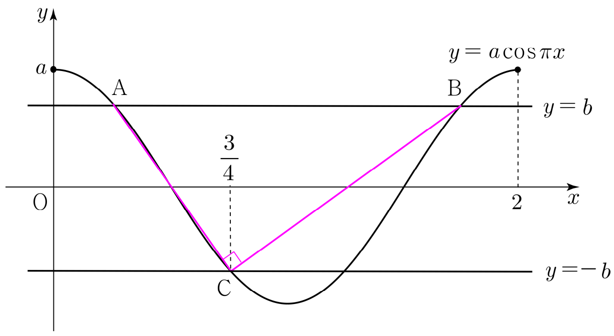
즉, $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{4}{3}\pi$일 때, $-\frac{3}{2}\le f(x)\le 3$

따라서 $0\le x\le 7$일 때, $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $3+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore\ \frac{3}{2}$

22

정답 ①



점 C의 좌표가 $C\left(\frac{3}{4},\ -b\right)$이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$A\left(\frac{1}{4},\ b\right)$: 점 C와 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭!

$B\left(\frac{7}{4},\ b\right)$: 점 A와 직선 $x=1$에 대하여 대칭!

이다. 이때 두 직선 AC와 BC가 서로 수직이므로

(직선 AC 의 기울기) $\times$ (직선 BC 의 기울기)$=-1$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{2b}{\frac{1}{2}}\times\frac{2b}{1}=-1$$

$$\Leftrightarrow\ b=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉, 점 $A\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$가 곡선 $y=a\cos\pi x$ 위의 점이므로

$$a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ \rightarrow\ a=\frac{1}{2}$$

따라서 $a\times b=\frac{\sqrt{2}}{8}$ 이다.

$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{8}$

23

정답 ②

주어진 부등식의 형태를 변형해보면

$$\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\times\left(\sin x-\cos\frac{\pi}{5}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin x\times\sin x\times\left\{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right\}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin^2 x\times\left(\sin x-\sin\frac{3}{10}\pi\right)\geq 0 \qquad \cdots ㉠$$

㉠에서 $\sin x=0$인 경우와 아닌 경우로 케이스를 분류하자.

(1) $\sin x=0$ 인 경우

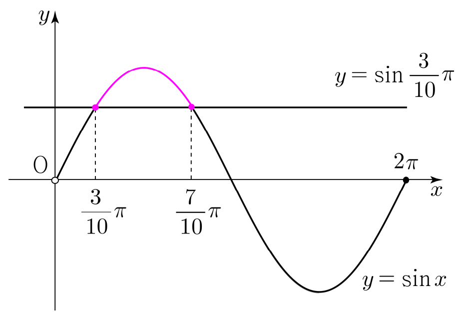
$\sin x=0$이면 부등식 ㉠은 성립하므로

$$\sin x=0\ \rightarrow\ x=\pi,\ \ 2\pi\ \ (\because\ 0<x\leq 2\pi)$$

(2) $\sin x\neq 0$ 인 경우

$\sin x\neq 0$이면 $\sin^2 x>0$이므로 ㉠의 양변을 $\sin^2 x$로 나눠주면

$$㉠ :\ \sin x\geq\sin\frac{3}{10}\pi$$



이때 $\sin x\geq\sin\frac{3}{10}\pi$을 만족시키는 모든 $x\ (0<x\leq 2\pi)$의 값의 범위는 $\frac{3}{10}\pi\leq x\leq\frac{7}{10}\pi$

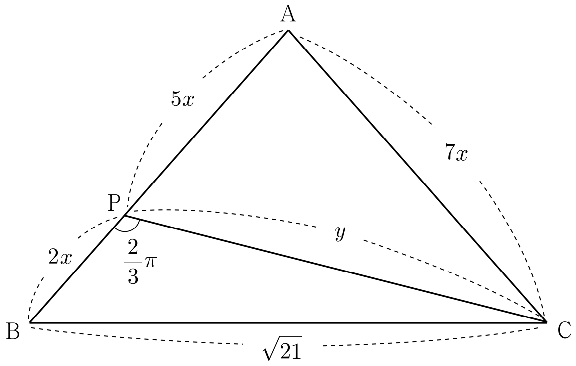
(1), (2)에 의해 부등식 ㉠을 만족시키는 $x\ (0<x\leq 2\pi)$의 최댓값은 2π, 최솟값은 $\frac{3}{10}\pi$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{23}{10}\pi$이다.

$\therefore\ \frac{23}{10}\pi$

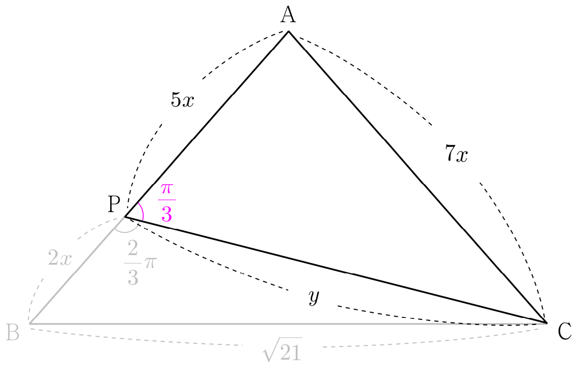
24

정답 ⑤

삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=\sqrt{21}$ 이므로 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이다. $\overline{AP}:\overline{BP}=5:2$ 이므로 $\overline{AP}=5x$, $\overline{AP}=2x$ 로 두자.



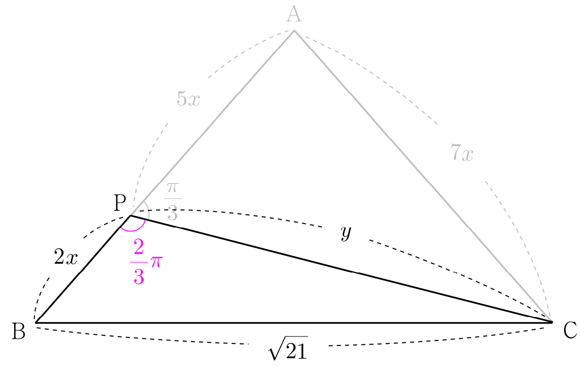
이때 $\overline{CP}=y$ 로 두면 $\angle APC=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 코사인법칙을 2번 쓰면 x, y 의 값을 도출할 수 있다.



삼각형 APC 에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}49x^2&=25x^2+y^2-10xy\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=25x^2+y^2-5xy\end{aligned}$$

이므로 $24x^2+5xy-y^2=0$ … ㉠

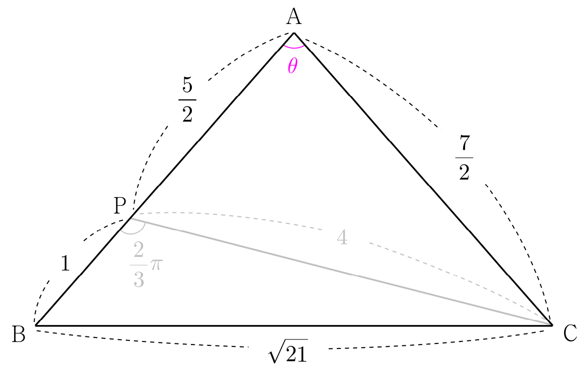


삼각형 BPC 에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}21&=4x^2+y^2-4xy\times\cos\frac{2}{3}\pi\\&=4x^2+y^2+2xy\end{aligned}$$

이므로 $4x^2+2xy+y^2=21$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=4$ 이다.



$\angle BAC=\theta$ 로 두면, 삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$$21=\frac{49}{4}+\frac{49}{4}-2\times\frac{49}{4}\times\cos\theta$$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{7}$, $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ 이다.

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2\times\sin\theta=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

이다.

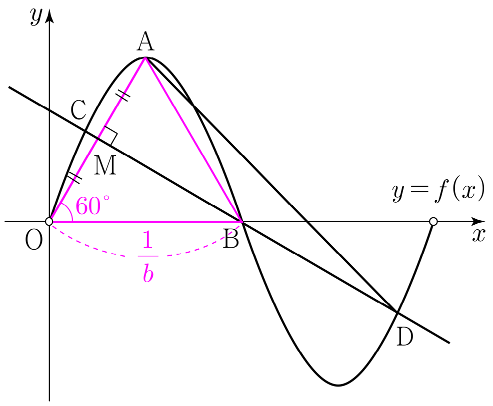
$$\therefore\ \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

25

정답 ③

선분 OA 의 수직이등분선이 점 B 를 지나므로 삼각형 OAB 는 $\overline{AB}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이다. 이때 삼각함수의 그래프의 대칭성에 의해 $\overline{OA}=\overline{AB}$ 이므로

삼각형 OAB : 한 변의 길이가 $\frac{1}{b}$ 인 정삼각형!



점 A 의 좌표는 $A\left(\frac{1}{2b},\ \frac{\sqrt{3}}{2b}\right)$ 이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{2b}$ $\cdots$ ㉠

삼각형 AMD 와 삼각형 OMC 의 넓이를 구해보면

$$\triangle \mathrm{AMD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MD}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2b}\times\overline{\mathrm{MD}}$$

$$\triangle \mathrm{OMC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\overline{\mathrm{MC}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2b}\times\overline{\mathrm{MC}}$$

$$\begin{aligned}(\triangle \mathrm{AMD})-(\triangle \mathrm{OMC})&=\frac{1}{4b}\times(\overline{\mathrm{MD}}-\overline{\mathrm{MC}})\\&=\frac{1}{4b}\times(\overline{\mathrm{MB}}+\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{MC}})\\&\quad\ \text{⤸ } \overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}\\&=\frac{1}{4b}\times(\overline{\mathrm{MB}}+\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{MC}})\\&\quad\ \text{⤸ } \overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{MC}}=\overline{\mathrm{MB}}\\&=\frac{1}{4b}\times 2\times\overline{\mathrm{MB}}\\&\quad\ \text{⤸ } \overline{\mathrm{MB}}\text{는 정삼각형의 높이!}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4b^2}\end{aligned}$$

에서 $\frac{\sqrt{3}}{4b^2}=4\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $b=\frac{1}{4}$, $a=2\sqrt{3}$ ($\because$ ㉠)

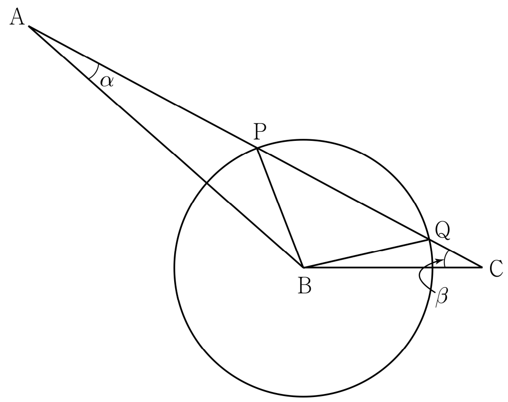
따라서 $\frac{a}{b}$ 의 값은 $8\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore\ 8\sqrt{3}$

26

정답 ④

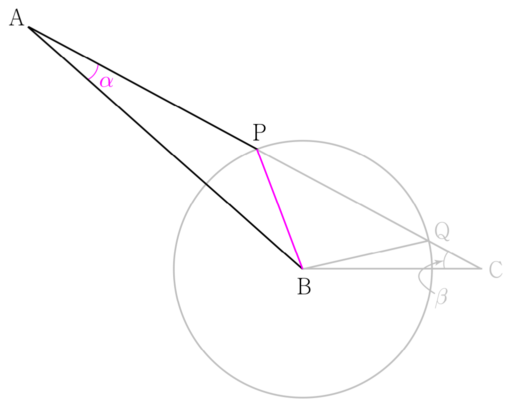
다음 그림과 같이 $\angle\mathrm{CAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{ACB}=\beta$라 하자.



Step 1 $\sin\alpha$, $\sin\beta$ **의 값 구하기**

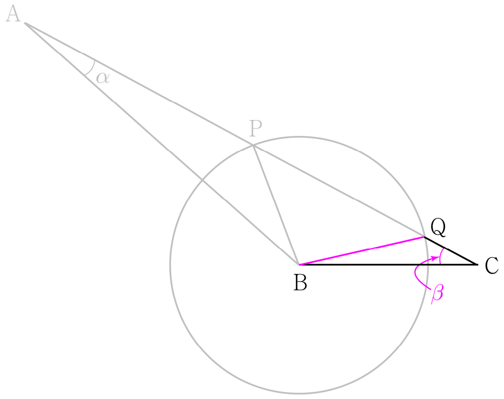
점 B 를 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r,
삼각형 ABP 의 외접원의 반지름의 길이를 R_1,
원 BCQ 의 외접원의 반지름의 길이를 R_2로 두면

조건 (가)와 (나)에 의해 $R_1=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, $R_2=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$



삼각형 ABP 에서 사인법칙에 의해

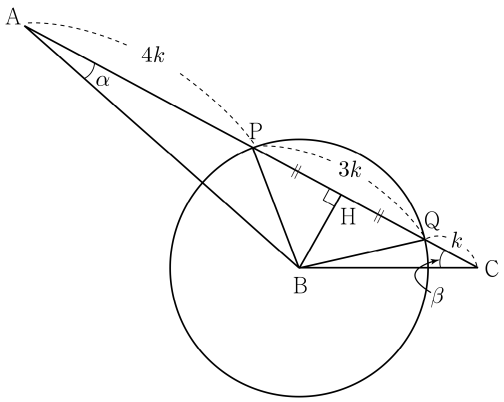
$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ (=2R_1)\qquad\cdots\ ㉠$$



삼각형 BCQ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{r}{\sin\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ (=2R_2) \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 $\sin\beta=2\sin\alpha$ $\qquad\cdots$ ㉢



$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QC}}=4:3:1$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=4k,\quad \overline{\mathrm{PQ}}=3k,\quad \overline{\mathrm{QC}}=k$$

로 두자. 점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
삼각형 AHB, BCH 에서 각각 $(=\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점)

$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\frac{11}{2}k},\quad \tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\frac{5}{2}k}$$

이므로 $5\tan\beta=11\tan\alpha$ $\qquad\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 계산하면

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}},\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad r=1$$

Step 2 **k 의 값 구하기**

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}$ 이므로 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{11}$ 이고, 삼각형 PHB 에서

피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{1-\frac{9}{4}k^2}$ 이므로

$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\frac{11}{2}k}\quad\rightarrow\quad\frac{\sqrt{7}}{11}=\frac{\sqrt{1-\frac{9}{4}k^2}}{\frac{11}{2}k}$$

$$\rightarrow\quad k=\frac{1}{2}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times 8k\times\sqrt{1-\frac{9}{4}k^2}\quad\leftarrow k=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

이다.

$$\therefore\ \frac{\sqrt{7}}{2}$$

27

정답 ③

Step 1 **방정식 $\{(f\circ f)(x)\}^2=\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값**

방정식 $\{(f\circ f)(x)\}^2=\frac{1}{2}$ 을 풀어보면

$$\{(f\circ f)(x)\}^2=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad(f\circ f)(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(x)=t$ 로 치환하여 관찰!

$$\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{2n-1}{4k}\ \text{(단, } n \text{은 정수)}$$

즉, $0<x<2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{2n-1}{4k}$ 가 만나는 점의 개수가 300 보다 작아야 한다.

Step 2 **$k=1$, 2, ⋯ 하나씩 설정해가며 느낌 찾기**

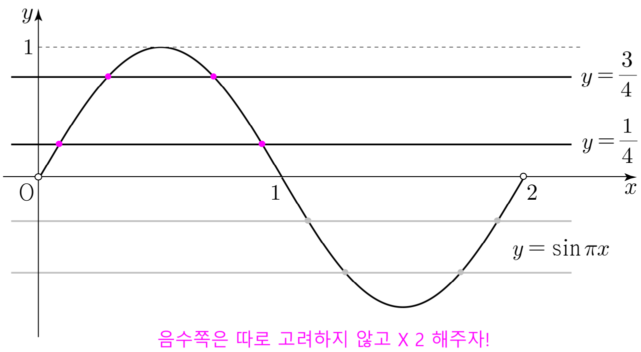
(1) $k=1$ 인 경우

$k=1$ 이면 $-1 \le \dfrac{2n-1}{4} \le 1$ 을 만족시키는 $\dfrac{2n-1}{4}$ 의 값은

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$$ ← 2개! (양수쪽만 고려하고 음수쪽은 ×2 해주자!)

이므로 함수 $f(x)=\sin \pi x$ 의 그래프와

직선 $y=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3}{4}$ 와의 교점을 관찰해보면 다음과 같다.



음수쪽은 따로 고려하지 않고 X 2 해주자!

→ 4×2(음수 부분!)$=8$ $(=8\times 1^2)$개!

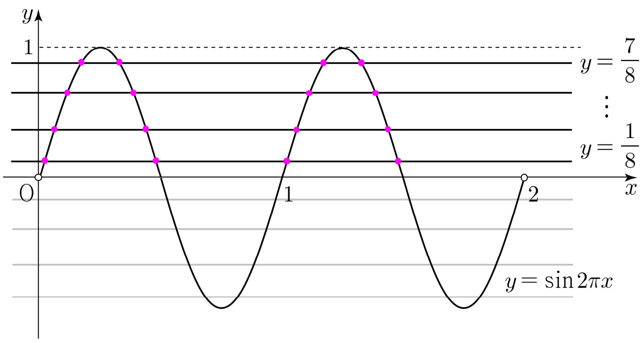
(2) $k=2$ 인 경우

$k=2$ 이면 $-1 \le \dfrac{2n-1}{8} \le 1$ 을 만족시키는 $\dfrac{2n-1}{8}$ 의 값은

$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$$ ← 4개!

이므로 함수 $f(x)=\sin 2\pi x$ 의 그래프와

직선 $y=\dfrac{1}{8}$, ⋯ , $\dfrac{7}{8}$ 와의 교점을 관찰해보면 다음과 같다.



→ 16×2(음수 부분!)$=32$ $(=8\times 2^2)$개!

(3) $k=3$ 인 경우

$k=3$ 이면 $-1 \le \dfrac{2n-1}{12} \le 1$ 을 만족시키는 $\dfrac{2n-1}{12}$ 의 값은

$$\frac{1}{12},\ \frac{3}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{9}{12},\ \frac{11}{12}$$ ← 6개!

이다. 이때 $k=3$ 인 순간에서의 교점을 일반화하여 찾아보면

$$\underline{6}\times\underline{2}\times\underline{3}\times\underline{2}=72\,(=8\times 3^2)$$

[각 숫자의 의미] 6 : $y=\dfrac{2n-1}{12}$ 로 가능한 값이 6개

2 : $y=\dfrac{2n-1}{12}$ 하나당 한 사이클 내에서 교점 2개

3 : 총 3사이클

2 : 음수인 쪽도 고려

Step 3 **규칙성을 파악하여 교점의 개수를 k 로 표현하기**

[Step 2]의 (1), (2), (3)에 의해 방정식

$$f(x)=\frac{2n-1}{4k}$$

의 교점의 개수는 $m=8k^2$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$8k^2<300 \ \rightarrow\ k^2<\frac{75}{2}$$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 $\underline{6}$개다.

: 1부터 6까지 가능!

$\therefore\ 6$

* Remark (교점의 개수를 일반화하는 방법)

어떤 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 사이클과 직선 $y=\dfrac{2n-1}{4k}$의 교점의 개수는 2이므로

$$m = \underbrace{2}_{\text{한 사이클에 교점 2개!}} \times \overbrace{k}^{\text{총 } k\text{개의 사이클!}} \times \left(-1<\frac{2n-1}{4k}<1 \text{인 } n\text{의 개수}\right)$$

$$= 4 \times k \times \left(0<\frac{2n-1}{4k}<1 \text{인 } n\text{의 개수}\right)$$

$$= 4 \times k \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}<n<\frac{4k+1}{2} \text{ 인 } n\text{의 개수}\right)}_{=2k}$$

$$=8k^2$$

근데 사실 문제를 보자마자 일반화하여 표현해야겠다는 생각을 바로 하는 건 어렵다고 생각한다. 더군다나 k가 자연수라고 나와있으니 $k=1,\ 2,\ \cdots$ 를 대입해가며 생각하는 것이 나름 합리적인 추론!

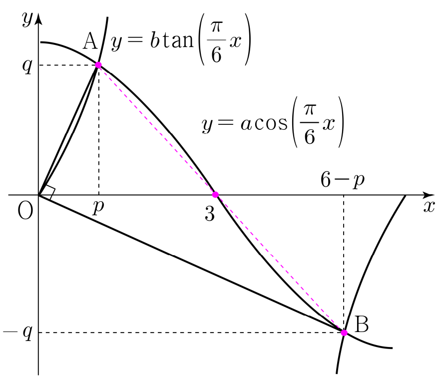
28

정답 10

두 함수

$$y=a\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\ (0\le x\le 6),$$
$$y=b\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\quad (0\le x\le 6,\ x\ne 3)$$

는 모두 점 $(3,0)$에 대하여 점대칭인 함수이므로 두 함수의 그래프가 만나는 점인 A, B도 점 $(3,0)$에 대해 점대칭이다.



즉, 점 A의 좌표를 $A(p,q)$로 두면 점 B의 좌표는 $B(6-p,\ -q)$이다. 이때 직선 OA의 기울기는 $\dfrac{q}{p}$, 직선 OB의 기울기는 $\dfrac{-q}{6-p}$이므로 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$에서

$$\frac{q}{p}\times\frac{-q}{6-p}=-1 \ \rightarrow\ q^2=6p-p^2 \qquad \cdots ㉠$$

또한, $\overline{OA}=\sqrt{6}$이므로 $p^2+q^2=6$ $\qquad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 계산하면 $p=1,\ q=\sqrt{5}$ 이다. 즉,

$$\sqrt{5}=a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \ \rightarrow\ a=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$
$$\sqrt{5}=b\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \ \rightarrow\ b=\sqrt{15}$$

이므로 $a\times b=10$이다.

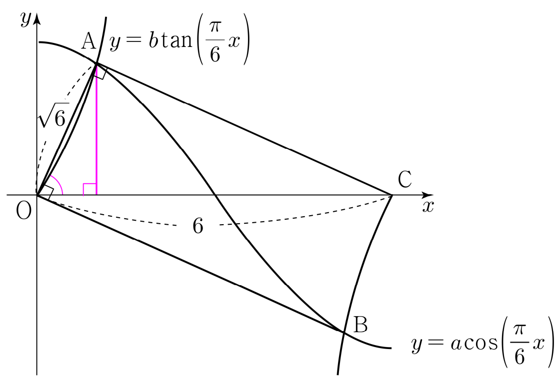
$\therefore\ 10$

다른 풀이!

두 함수

$$y=a\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\ (0\le x\le 6),$$
$$y=b\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)\quad (0\le x\le 6,\ x\ne 3)$$

는 모두 점 $(3,0)$에 대하여 점대칭인 함수이므로 두 함수의 그래프가 만나는 점인 A, B도 점 $(3,0)$에 대해 점대칭이다. 이때 점 $C(6,0)$에 대하여 두 직선 OB, AC는 서로 평행하고 그 길이가 같다. 즉, 사각형 OACB는 직사각형이다.



삼각형 OAC에서 $\overline{OC}=6,\ \overline{OA}=\sqrt{6}$ 이므로

$\cos(\angle AOC)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$이다. 따라서 삼각비에 의해

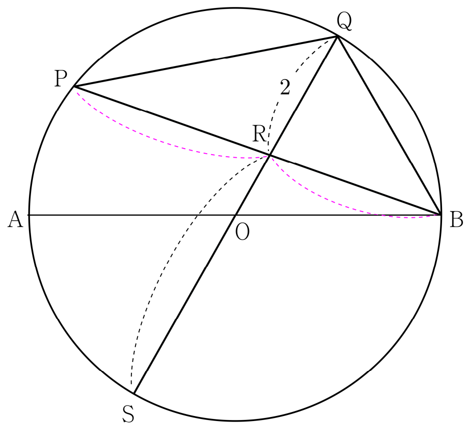
(또는 닮음에 의해!) 점 A의 좌표는

$A(1,\ \sqrt{5})$ (이후 계산은 동일!)

29

정답 31

직선 OQ 를 연장하여 원과 만나는 점을 S 라 하자.



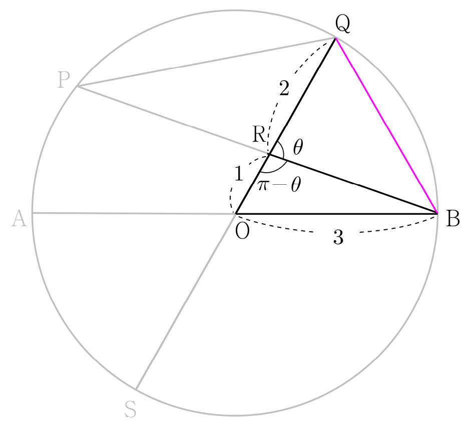
할선 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{RS}}$$

가 성립한다. 이때 $\overline{\mathrm{QR}}=2$, $\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{RB}}=8$ 이므로

$$\overline{\mathrm{RS}}=4\ \rightarrow\ \underline{\overline{\mathrm{OR}}=1,\ \ \overline{\mathrm{OS}}=3}$$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OS}}$ 임을 활용!



$\angle\mathrm{QRB}=\theta$ 로 두면 $\angle\mathrm{ORB}=\pi-\theta$ 이므로 삼각형 ORB 에서 코사인법칙에 의해

$$3^2=1^2+\overline{\mathrm{RB}}^2-2\times\overline{\mathrm{RB}}\times\cos(\pi-\theta)\quad\leftarrow\ \cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\overline{\mathrm{RB}}^2+\overline{\mathrm{RB}}-24=0$$

이므로 $\overline{\mathrm{RB}}=\dfrac{8}{3}$

따라서 삼각형 QRB 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{BQ}}^2=2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\times2\times\frac{8}{3}\times\cos\theta\quad\leftarrow\ \cos\theta=\frac{1}{6}$$

$$=\frac{28}{3}$$

이므로 $p+q=31$ 이다.

$\therefore\ 31$

30

정답 216

$$f(x)=\cos\left(ax+\frac{120\pi}{a}\right)\ :\ \text{주기}=\frac{2\pi}{a},$$

평행이동과 관련된 정보는
바로 안보임!

는 조건 (가), (나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$$\underline{f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)},\quad \underline{f(x)=f(2\pi-x)}$$

주기와 관련된 정보!　　대칭과 관련된 정보!

를 만족시켜야 한다. 주어진 조건을 하나씩 엄밀하게 살펴보자.

Step 1 **$f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 를 통한 주기성 추론**

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 를 만족시키므로

$$(f(x)\text{의 주기})=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{18},\ \cdots$$

이면 된다. 즉,

$$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3},\ \cdots$$

에서 $a=12,\ 24,\ 36,\ \cdots$ 이므로 a 는 12 의 배수! … ㉠

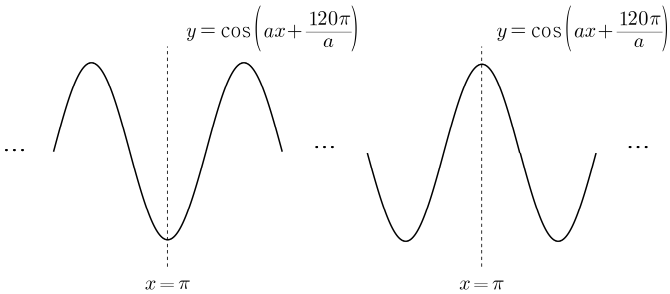
* Remark (함수의 주기)

$f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시킨다고 해서 $f(x)$의 주기를 p라고 말할 수 없다.

주기란, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값이다.

Step 2 **$f(x)=f(2\pi-x)$를 통한 대칭성 추론**

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2\pi-x)$를 만족시키므로 $f(x)$는 $x=\pi$에 대하여 선대칭이어야 한다.



즉,

$$f(\pi)=1 \text{ 또는 } f(\pi)=-1 \;\rightarrow\; \cos\left(a\pi+\frac{120\pi}{a}\right)=\pm 1$$

$$\rightarrow\; a\pi+\frac{120\pi}{a}=(\text{정수})\pi$$

$a+\frac{120}{a}=$(정수) 형태이어야 하므로 a는 120의 약수! $\cdots$ ㉡

[Step 1]의 ㉠, [Step 2]의 ㉡에 의해 a는 12의 배수이면서 120의 약수이어야 한다. 따라서 가능한 자연수 a의 값은

$$a=12,\ 24,\ 60,\ 120$$

이므로 그 합은 216이다.

$\therefore\ 216$