# 01 주목해야할 확률 문제

## 핵심 개념

### 01 수열의 귀납적 정의

### 02 등비급수

### 03 합성함수

### 04 도형의 이동

# 01 수열의 귀납적 정의

## 주목해야할 확률 문제

**필수 예제**

$A$, $B$ 두 상장 속에 각각 검은 공 3개와 흰 공 1개가 들어 있다. 각 상자에서 임의로 공을 1개씩 꺼내어 교환한 다음 상자 속에 다시 넣는다. 이러한 시행을 $n$번 거쳐 다시 처음과 같이 $A$, $B$ 두 상자 속에 각각 검은 공 3개와 흰 공 1개가 들어 있을 확률을 $a_n$이라고 할 때,
$a_{n+1}=pa_n+q$, $a_1=r$가 성립한다. 상수 $p$, $q$, $r$에 대하여 $p+q+r$의 값을 구하시오.

**Approach & Solution**

**유제 1**

민행이가 축구를 하는데 한 번 골에 성공한 후 다음번에도 성공할 확률이 0.7, 한 번 골에 실패한 후 다음번에도 실패할 확률이 0.6이라고 한다. $n$번째 골에 성공할 확률이 $P_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값을 구하시오.

# 02 등비급수

## 주목해야할 확률 문제

**필수 예제**

주사위 한 개를 $n$번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수들 중에서 가장 큰 수를 $a_n$, 가장 작은 수를 $b_n$이라 하자. 예를 들면, 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 3이면 $a_1 = b_1 = 3$이고, 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 $4, 6$이면 $a_2 = 6, b_2 = 4$이다. $a_n - b_n < 5$가 될 확률을 $p_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$의 값은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

**Approach & Solution**

**유제 2**

$n$개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 5일 확률을 $\mathrm{P}_n$이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n$의 합을 구하시오.

# 03 합성함수

## 주목해야할 확률 문제

**필수 예제**

한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 눈의 수를 $a$, 두 번째 나온 눈의 수를 $b$라 할 때, 두 함수

$$f(x)=(a-2)x-4,\quad g(x)=(b-5)x+1$$

에 대하여 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 $x$축과 만나지 않을 확률을 구하시오.

**Approach & Solution**

**유제 3**

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 정의된 함수 $f:X\to X$ 중 $f(1)=2$, $f(f(1))=3$, $f(f(2))=1$ 을 만족하는 모든 함수를 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} f_k(3)f_k(4)f_k(5)$ 의 값을 구하시오.

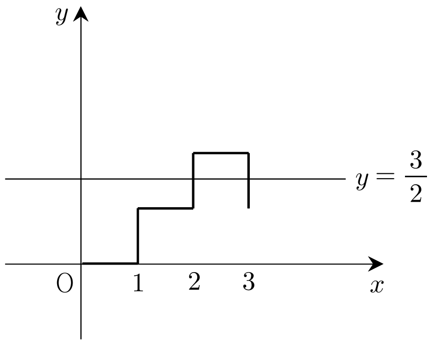
# 04 도형의 이동

## 주목해야할 확률 문제

**필수 예제**

좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P 가 1 개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

| |
|---|
| 앞면이 나오면 $x$ 축의 방향으로 1 만큼, $y$ 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하고,<br>뒷면이 나오면 $x$ 축의 방향으로 1 만큼, $y$ 축의 방향으로 $-1$ 만큼 평행이동한다. |




예를 들어, 동전을 3 번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P 가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y=\frac{3}{2}$ 과 두 점에서 만난다. 동전을 5 번 던질 때, 점 P 가 지나간 자취와 직선 $y=\frac{3}{2}$ 이 오직 한 점에서 만날 확률을 구하시오.

**Approach & Solution**

**유제 4**

수직선의 원점에 놓인 말을 한 개의 주사위를 던져서 다음 규칙에 따라 움직이기로 하였다.

| |
|---|
| Ⅰ. 점의 개수가 1 또는 2인 면이 나오면 $-1$만큼 움직인다.<br>Ⅱ. 점의 개수가 3 또는 4인 면이 나오면 1만큼 움직인다.<br>Ⅲ. 점의 개수가 5 또는 6인 면이 나오면 움직이지 않는다. |

주사위를 4번 던졌을 때, 말이 원점의 위치에 있을 확률을 구하시오.

# 정답 및 유제 해설

| 문제 | 필수예제 1 | 유제 1 | 필수예제 2 | 유제 2 | 필수예제 3 | 유제 3 | 필수예제 4 | 유제 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 정답 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{7}$ | ② | $3$ | $\frac{5}{18}$ | $225$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{19}{81}$ |

## 유제 해설

1. 정답 $\frac{4}{7}$

$(n+1)$번째 골을 성공할 확률은 $P_{n+1}$이므로

$$P_{n+1}=P_n\times 0.7+(1-P_n)\times(1-0.6)\ =0.3P_n+0.4$$

$$P_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{3}{10}\left(P_n-\frac{4}{7}\right)$$

$\left\{P_n-\frac{4}{7}\right\}$는 첫째항이 $P_1-\frac{4}{7}$, 공비가 $\frac{3}{10}$인 등비수열이므로

$$P_n-\frac{4}{7}=\left(P_1-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n=\left(P_1-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{7}$$

2. 정답 $3$

$n$개의 주사위를 던져서 $6$은 나오지 않고 $5$가 적어도 하나 나와야 눈의 수의 최댓값이 $5$가 된다.
따라서 구하는 확률은
(주사위를 $n$개 던져서 1부터 5까지 눈이 나올 전체 확률)−(5가 하나도 나오지 않을 확률)이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}_n=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}-\frac{\frac{4}{6}}{1-\frac{4}{6}}=5-2=3$$

3. 정답 $225$

$f(1)=2$, $f(f(1))=f(2)=3$, $f(f(2))=f(3)=1$을 만족하는 함수를 $f_k(x)$라 하면 $f_k(4)$와 $f_k(5)$는 각각 $1,2,3,4,5$중 하나를 선택할 수 있으므로 $5^2=25$가지가 가능하다.

$\therefore\ n=25$

모든 자연수 $k$에 대하여 $f_k(3)=1$이니까 $f_k(4)f_k(5)$만 생각하자.

| $f_k(5)$ \ $f_k(4)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1·1 | 1·2 | 1·3 | 1·4 | 1·5 |
| 2 | 2·1 | 2·2 | 2·3 | 2·4 | 2·5 |
| 3 | 3·1 | 3·2 | 3·3 | 3·4 | 3·5 |
| 4 | 4·1 | 4·2 | 4·3 | 4·4 | 4·5 |
| 5 | 5·1 | 5·2 | 5·3 | 5·4 | 5·5 |

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(3)\cdot f_k(4)\cdot f_k(5)=\sum_{k=1}^{n} f_k(4)\cdot f_k(5)=(1+2+3+4+5)+2(1+2+3+4+5)+\cdots+5(1+2+3+4+5)$$
$$=(1+2+3+4+5)(1+2+3+4+5)=15^2=225$$

4. 정답 $\dfrac{19}{81}$

(i) $4$번 모두 움직이지 않는 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

(ii) $2$번은 움직이지 않고, $1$번은 왼쪽, $1$번은 오른쪽으로 움직이는 경우의 확률은

$$_4\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\times\frac{1}{3}\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{3}=\frac{12}{81}$$

(iii) $2$번은 왼쪽, $2$번은 오른쪽으로 움직이는 경우의 확률은

$$_4\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{81}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{81}+\frac{12}{81}+\frac{6}{81}=\frac{19}{81}$$